

УДК 532.51.013.4

© 1997 г. Н.Р. СИБГАТУЛЛИН, А.Н. СИБГАТУЛЛИНА

О ДВУМЕРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Показана неустойчивость тангенциального разрыва в сжимаемой диспергирующей среде относительно малых двумерных возмущений.

Ниже исследуется устойчивость тангенциального разрыва в сжимаемой диспергирующей среде относительно малых двумерных возмущений (зависящих от двух пространственных координат). В качестве примера такого разрыва может быть взята граница между двумя потоками тяжелой жидкости в длинноволновом приближении, когда теория мелкой воды дополняется диспергирующим членом (модель Буссинеска), или граница между двумя течениями свободной пленки, где роль градиента давления играет градиент коэффициента поверхностного натяжения, которое в пленке создается присутствием поверхностного активного вещества. Без учета диспергирующих эффектов тангенциальный разрыв оказывается устойчивым относительно двумерных возмущений, если относительная скорость потоков (в единицах невозмущенной скорости звука) больше $\sqrt{8}$. При числах Маха, меньших $\sqrt{8}$, тангенциальный разрыв неустойчив относительно двумерных возмущений [1]. Этот результат Ландау нашел интерпретацию в существенно двумерной теории мелкой воды (или тонкой атмосферы) [2]. С другой стороны, в [3] показана неустойчивость тангенциального разрыва относительно трехмерных возмущений для всех чисел Маха. Такое различие двумерной и трехмерной теории может быть связано с пренебрежением диспергирующих членов, неизбежно возникающих в осредненных по одной из координат моделях. Ниже показано, что тангенциальный разрыв неустойчив при всех числах Маха даже относительно двумерных возмущений, если учесть диспергирующие свойства среды, т.е. рассматривать случай общего положения.

Исследование не относится к исследованию течений тонких пленок на стенках, инициированному работой Капицы [4] (существуют многочисленные публикации по этой тематике, см., например, [5, 6]), но оно связано с исследованием симметричных (варикозных) волн в свободных пленках [7]. В настоящее время существует тонкая экспериментальная техника для изучения двумерных ламинарных и турбулентных сдвиговых течений [8, 9]. В последней работе предложена схема с непрерывно бегущей мыльной пленкой, в которой были успешно преодолены существовавшие трудности с коротким временем наблюдения и неравномерной толщиной пленки. В [10] описаны наблюдения во врачающейся глубокой кювете двумерных и трехмерных гидродинамических структур. В статье [11] экспериментально подтвержден вывод Ландау [1] о стабилизации сверхзвукового тангенциального разрыва относительно длинноволновых возмущений на мелкой воде, это не противоречит настоящим результатам, которые асимптотически переходят в результаты [1] для малых значений параметра γ (см. разд. 2).

1. Постановка задачи и вывод дисперсионного уравнения. В качестве двумерной модели диспергирующей среды рассматривается модель Буссинеска [12]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{a^2}{H_0} \nabla H + b \nabla \Delta H, \quad \frac{dH}{dt} + H \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

Для тонких пленок константа a связана с зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от концентрации поверхности-активного вещества, а в теории мелкой воды $a = \sqrt{gH_0}$, где g есть ускорение силы тяжести; константа b характеризует диспергирующие свойства среды (в теории мелкой воды $b = gH_0^2/3$, где H_0 – невозмущенная глубина жидкости, для варикозных волн $b = T/\rho$, где T есть коэффициент поверхностного натяжения, ρ – массовая плотность). Система (1.1) имеет точное решение с прямолинейными линиями тока

$$v_x = U(y), \quad v_y = 0, \quad H = H_0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим устойчивость такого течения, взяв зависимость от координаты x и времени t для всех малых возмущений в виде $\exp(ikx - i\omega t)$. Возмущения v_i, v_y, H обозначим v'_x, v'_y, H' соответственно. Пренебрегаем членами, нелинейными по возмущениям, из системы (1.1) получим

$$\begin{aligned} iv'_x(kU - \omega) + v'U_{,y} &= -ika^2H'/H_0 + ikb(-k^2H' + H'_{,yy}) \\ iv'_x(kU - \omega) &= -a^2H'_{,y}/H_0 + b(-k^2H' + H'_{,yy}), \\ i(kU - \omega)H' + H_0(ikv'_x + v'_{,y}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В системе (1.3) перейдем к безразмерным переменным и параметрам:

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{v'_x}{a}, \quad v \equiv \frac{v'_y}{a}, \quad h \equiv \frac{H'}{H_0}, \quad ky \rightarrow y, \quad M \equiv \frac{U}{a}, \quad c \equiv \frac{\omega}{ka}, \quad \gamma \equiv \frac{H_0bk^2}{a^2} \\ (M - c)u - iv \frac{\partial M}{\partial y} &= -h + \gamma \left(-h + \frac{\partial^2 h}{\partial h^2} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$(M - c)v - i \frac{\partial h}{\partial y} = -i\gamma \frac{\partial}{\partial y} \left(-h + \frac{\partial^2 h}{\partial h^2} \right) \quad (1.5)$$

$$(M - c)h + u - i \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

Если выразить u и v через h с помощью (1.4), (1.5) и подставить результат в уравнение (1.6), то получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{(M - c)^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} h(1 + \gamma) - \gamma \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \right] \right\} + h + \frac{1}{(M - c)^2} \left(\gamma \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - (\gamma + 1)h \right) = 0 \quad (1.7)$$

Тангенциальный разрыв представляет собой частный случай точного решения (1.2), в котором

$$v_x = U_0/2, \quad y > 0; \quad v_x = -U_0/2, \quad y < 0 \quad (1.8)$$

В этом случае решение уравнения (1.7) для малых возмущений решения (1.8) можно искать при $y > 0$ в виде $h = h_0 \exp(-\alpha y)$, при $y < 0$ в виде $h = h_0 \exp(\beta y)$. Тогда для α и β из (1.7) получим биквадратные уравнения

$$\gamma(\alpha^2 - 1)^2 + 1 - \alpha^2 = (M/2 - c)^2, \quad M \equiv U_0/a \quad (1.9)$$

$$\gamma(\beta^2 - 1)^2 + 1 - \beta^2 = (M/2 + c)^2 \quad (1.10)$$

Представляют интерес лишь те решения уравнений (1.9), (1.10), которые имеют положительную вещественную часть, потому что решения, растущие при $y \rightarrow \pm\infty$,

не связаны с развитием возмущений самого тангенциального разрыва. Поэтому имеем

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{(\Gamma \pm \lambda) / 2\gamma}, \quad \beta_{1,2} = \sqrt{(\Gamma \pm \mu) / 2\gamma} \quad (1.11)$$

$$\Gamma \equiv 1 + 2\gamma, \quad \lambda \equiv \sqrt{1 + \gamma(M - 2c)^2}, \quad \mu \equiv \sqrt{1 + \gamma(M + 2c)^2}$$

В качестве корня из комплексного числа z выберем такую ветвь \sqrt{z} , которая имеет положительную вещественную часть. Для этого проведем разрез в комплексной плоскости z вдоль отрицательной части вещественной оси, так что для точек z в верхней полуплоскости ($\text{Im } z > 0$) корень \sqrt{z} будет в первом квадранте. Для точек z , лежащих в нижней полуплоскости ($\text{Im } z < 0$) корень \sqrt{z} будет в четвертом квадранте.

Таким образом, решение уравнения (1.7) имеет вид

$$h = H_1 \exp(-\alpha_1 y) + H_2 \exp(-\alpha_2 y) \quad y > 0 \quad (1.12)$$

$$h = H_3 \exp(\beta_1 y) + H_4 \exp(\beta_2 y) \quad y < 0 \quad (1.13)$$

Искомое дисперсное уравнение для фазовой скорости c как функции от γ получается из условий сшивки решений (1.12)–(1.13).

Одно условие получается из кинематического условия непрерывности нормальной составляющей скорости. Это же условие можно было бы получить с помощью предельного перехода из уравнения (1.7), интегрируя его по y в тонком слое толщиной ϵ , где функция $M(y)$, непрерывно меняясь от $-M/2$ до $M/2$, переходит в пределе в тангенциальный разрыв. Это условие связывает трети производные от h по обе стороны от тангенциального разрыва. Имея в виду, что уравнение для h (1.7) имеет 4-й порядок, предположим что эта функция на тангенциальном разрыве принадлежит классу гладкости C^2 , т.е. скачок функции h , $\partial h / \partial y$, $\partial^2 h / \partial y^2$ при $y = 0$ равен нулю. При этом динамическое условие непрерывности нормальной составляющей вектора напряжений на тангенциальном разрыве выполнится тождественно.

Выпишем явно упомянутые выше условия сшивки, обозначая предельные значения при $y = 0$ сверху $h_+ \equiv h(+0)$ и предельные значения $y = 0$ снизу $h_- \equiv h(-0)$. Тогда, используя для h выражения (1.12), (1.13) в верхней и нижней полуплоскостях, получим

$$h_+ = h_- \rightarrow H_1 + H_2 = H_3 + H_4$$

$$h_{+,y} = h_{-,y} \rightarrow \alpha_1 H_1 - \alpha_2 H_2 = \beta_1 H_3 + \beta_2 H_4$$

$$h_{+,yy} = h_{-,yy} \rightarrow \alpha_1^2 H_1 + \alpha_2^2 H_2 = \beta_1^2 H_3 + \beta_2^2 H_4$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(M-2c)^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} h_+ (1+\gamma) - \gamma \frac{\partial^3 h_+}{\partial h^3} \right] &= \frac{1}{(M+2c)^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} h_- (1+\gamma) - \gamma \frac{\partial^3 h_-}{\partial h^3} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 - 1} H_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2^2 - 1} H_2 &= \frac{\beta_1}{\beta_1^2 - 1} H_3 + \frac{\beta_3}{\beta_2^2 - 1} H_4 \end{aligned} \quad (1.14)$$

При выводе последнего из условий (1.14) были использованы уравнения (1.9), (1.10). Дальнейший анализ будет связан с анализом определителя однородной линейной системы (1.14), который следует приравнять нулю. Если раскрыть этот определитель, то получим

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\frac{\alpha_1}{(\alpha_1^2 - 1)} (\alpha_2 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) - \frac{\alpha_2}{(\alpha_2^2 - 1)} (\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \beta_2) \right) (\beta_2 - \beta_1) - \\ - & \left(\frac{\beta_1}{(\beta_1^2 - 1)} (\alpha_1 + \beta_2)(\alpha_2 + \beta_2) - \frac{\beta_2}{(\beta_2^2 - 1)} (\alpha_2 + \beta_1)(\alpha_1 + \beta_1) \right) (\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

С помощью группировки соответствующих членов и поделив обе части уравнения (1.15) на общий множитель $(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)$, можно переписать (1.15) в виде

$$(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1) \left(A - B + \frac{1}{(\alpha_1^2 - 1)(\beta_1^2 - 1)} - \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)} \right) - \\ - A(\alpha_1 - \beta_1)^2 - B(\alpha_2 - \beta_2)^2 + (A + B)(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) = 0 \quad (1.16)$$

$$A \equiv \frac{\alpha_1\beta_1}{(\alpha_1^2 - 1)(\beta_1^2 - 1)}, \quad B \equiv \frac{\alpha_2\beta_2}{(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)}.$$

Уравнение (1.16) запишем в удобном для дальнейшего исследования виде

$$(\sqrt{\Gamma + \lambda} - \sqrt{\Gamma + \mu})(\sqrt{\Gamma - \lambda} - \sqrt{\Gamma - \mu}) = \\ = 2\Gamma - b_+ - b_- + \frac{(\lambda + \mu)(a_-b_+ - a_+b_- + 2(\Gamma - 1)(b_+ - b_-))}{a_-b_+ + a_+b_-} \quad (1.17)$$

$$b_+ \equiv 2\gamma\alpha_1\beta_1 = \sqrt{(\Gamma + \lambda)(\Gamma + \mu)}, \quad b_- = \sqrt{(\Gamma - \lambda)(\Gamma - \mu)}$$

$$a_+ \equiv 4\gamma^2(\alpha_1^2 - 1)(\beta_1^2 - 1) = (1 + \lambda)(1 + \mu), \quad a_- = (\lambda - 1)(\mu - 1)$$

2. Исследование асимптотик решений дисперсионного уравнения. Рассмотрим асимптотику решения дисперсного уравнения (1.17) при $\gamma \rightarrow 0$. Согласно (1.11), имеем

$$\lambda \approx 1 + 2\gamma(M/2 - c)^2 - 2\gamma^2(M/2 - c)^4$$

$$\mu \approx 1 + 2\gamma(M/2 - c)^2 - 2\gamma^2(M/2 - c)^4 \quad (2.1)$$

Поэтому правая часть уравнения (1.17) с точностью до членов порядка γ^2 имеет вид

$$2\Gamma - b_+ - b_- - 2\gamma + (\lambda + \mu) \left(-1 + \frac{a_-}{b_-} \right) + \frac{2\gamma b_+}{b_-} - \left(1 - \frac{a_-}{2b_-} \right) \quad (2.2)$$

Для функций, входящих в выражение (2.2), легко получить асимптотики

$$\frac{a_-}{b_-} \approx 2\gamma\sigma, \quad \gamma \frac{b_+}{b_-} \approx 1 + \gamma + \frac{3\gamma\sigma - \Delta}{2}, \quad \lambda + \mu \approx 2 + 2\gamma\sigma, \quad \sigma \equiv 2c^2 + \frac{M^2}{2} \quad (2.3)$$

$$\Delta \equiv (c^2 - M^2/4)^2 - \sigma$$

При вычислении b_- учитывалось, что корни $\sqrt{\Gamma - \lambda}, \sqrt{\Gamma - \mu}$ должны иметь положительную вещественную часть. Поэтому произведение этих корней равно $\sqrt{(\lambda - \Gamma)(\mu - \Gamma)}$. В силу уравнения (1.17) Δ имеет тот же порядок, что и γ . С учетом асимптотических выражений (2.3) правая часть (1.17) с точностью до членов порядка γ^2 равна $-\Delta + 2\gamma\sigma$.

Рассмотрим теперь асимптотику левой части уравнения (1.17). При $\gamma \rightarrow 0$ имеем

$$\sqrt{\Gamma + \lambda} - \sqrt{\Gamma + \mu} \approx -2Mc\gamma\sqrt{2}, \quad \sqrt{\Gamma - \lambda} - \sqrt{\Gamma - \mu} \approx i\sqrt{2\gamma\sigma} \operatorname{sign}(\operatorname{Im} c) \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) учитывалось, что знак мнимой части корня $\sqrt{\lambda - \Gamma}$ определяется знаком мнимой части c .

Таким образом, с точностью до членов порядка γ^2 для безразмерной фазовой скорости c получается уравнение

$$(c^2 - M^2/4)^2 - \sigma\Gamma - 4Mc\gamma i\sqrt{\gamma\sigma} \operatorname{sign}(\operatorname{Im} c) = 0 \quad (2.5)$$

При $\gamma = 0$ из уравнения (2.5) следует точное дисперсное уравнение для возмущений тангенциального разрыва в недиспергирующем идеальном баротропном газе [1], из которого имеем

$$c = \pm \sqrt{1 + M^2 / 4 \pm \sqrt{1 + M^2}} \quad (2.6)$$

Поэтому при $M > \sqrt{8}$ все корни (2.6) биквадратного уравнения $\Delta = 0$ вещественны, однако при $M < \sqrt{8}$ пара корней этого уравнения чисто мнимые и сопряженные. Таким образом, в случае недиспергирующего газа при $M > \sqrt{8}$ тангенциальный разрыв устойчив относительно двумерных возмущений, при $M < \sqrt{8}$ тангенциальный разрыв неустойчив.

Для исследования влияния диспергирующих эффектов на картину устойчивости представим c виде $c_0 + \gamma c_1$, где c_0 является одним из корней (2.5). Тогда, подставляя $c_0 + \gamma c_1$ вместо c и пренебрегая членами порядка γ^2 , из (2.5) получим

$$c_0 c_1 (c_0^2 - M^2 / 4 - 1) = 4c_0^2 + M^2 + M c_0 i \sqrt{\gamma} \operatorname{sign}(\operatorname{Im} c) \quad (2.7)$$

При $M > \sqrt{8}$ все корни c_0 вещественны и мнимые части c совпадают с мнимыми частями c_1 . Поэтому из уравнения (2.7) следует

$$\operatorname{Im} c_1 (c_0^2 - M^2 / 4 - 1) = M \sqrt{\gamma} \operatorname{sign}(\operatorname{Im} c) \quad (2.8)$$

откуда $c_0^2 - M^2 / 4 - 1 > 0$. Это условие отбрасывает пару корней $c_0 = \pm \sqrt{1 + M^2 / 4 - \sqrt{1 + M^2}}$.

Рассмотрим теперь поведение решения дисперсионного уравнения вблизи такой кривой на плоскости M, γ на которой $c = 0$. При этом покажем, что на этой кривой имеет место исчезновение одной из ветвей решений дисперсионного уравнения.

Если подставить $c = 0$ в уравнение (1.17), то для функций, входящих в правую часть уравнения (1.17), имеем

$$b_+ = \Gamma + \lambda_0, \quad b_- = \lambda_0 - \Gamma, \quad a_+ = (1 + \lambda_0)^2, \quad a_- = (\lambda_0 - 1)^2,$$

$$\lambda = \mu = \lambda_0 = \sqrt{1 + \gamma M^2}$$

$$a_- b_+ + a_+ b_- = 2\lambda_0(1 + \lambda_0^2 - 2\Gamma), \quad a_- b_+ - a_+ b_- = 2\Gamma(1 + \lambda_0^2) - 4\lambda_0^2$$

Вследствие этого правая часть (1.17) при $c = 0$ может быть приведена к виду

$$2\lambda_0(\lambda_0 + 1)(2\Gamma - 1 - \lambda_0)(1 + \lambda_0^2 - 2\Gamma)^{-1} \quad (2.9)$$

Поправки к этому выражению при малых c имеют порядок c^2 . Для функций, входящих в левую часть уравнения (1.17), получаются асимптотические выражения

$$\sqrt{\Gamma + \lambda} \approx \sqrt{\Gamma + \lambda_0} - \frac{\gamma M c}{\lambda_0 \sqrt{\Gamma + \lambda_0}}, \quad \sqrt{\Gamma + \mu} \approx \sqrt{\Gamma + \lambda_0} + \frac{\gamma M c}{\lambda_0 \sqrt{\Gamma + \lambda_0}}$$

Поэтому дисперсионное уравнение с точностью до членов порядка c^2 имеет вид

$$-2i\gamma M c \operatorname{sign}(\operatorname{Im} c) \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Gamma}{\lambda_0 + \Gamma}} = \frac{\lambda_0^2(\lambda_0 + 1)(2\Gamma - 1 - \lambda_0)}{1 + \lambda_0^2 - 2\Gamma} \quad (2.10)$$

У этого уравнения решение для c существует только в области $2\Gamma - 1 - \lambda_0 > 0$. Эта ветвь решения не существует в области $2\Gamma - 1 - \lambda_0 < 0$.

Итак, выбранная ветвь дисперсионного уравнения имеет смысл только в области $2\Gamma - 1 - \lambda_0 > 0$ или $M^2 < 8(1 + 2\gamma)$. В этой области тангенциальный разрыв неустойчив, так как корни дисперсионного уравнения, ограниченные при $\gamma \rightarrow \infty$, являются чисто мнимыми. Поэтому неосциллирующие решения, соответствующие этим корням, возрастают или убывают экспоненциально по времени.

3. Неустойчивость тангенциального разрыва в свободной тонкой пленке при отсутствии ПАВ. Случай $\gamma \rightarrow \infty$ может иметь место только для свободных пленок в отсутствие поверхностно-активного вещества. Для длинных волн на поверхности тяжелой жидкости параметр $\gamma \equiv bH_0k^2/a^2 = H_0^2k^2$ всегда меньше единицы.

Рассмотрим сначала случай варикозных волн в пленках, когда коэффициент поверхностного натяжения является константой, т.е. положим $a = 0$. Возвратимся к уравнению (1.17) при $\gamma \rightarrow \infty$ и введем новые безразмерные переменные

$$\frac{c}{\sqrt{\gamma}} \rightarrow c, \quad \frac{M}{2\sqrt{\gamma}} \rightarrow M, \quad \frac{\lambda}{2\gamma} \rightarrow \lambda, \quad \frac{\mu}{2\gamma} \rightarrow \mu$$

Новые безразмерные переменные не содержат параметра a и поэтому при $a \rightarrow 0$ из уравнения (1.17) имеем

$$(\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1+\mu})(\sqrt{1-\lambda} - \sqrt{1-\mu}) = 2 - b_+ - b_- + \frac{(b_+ - b_-)^2}{2} \quad (3.1)$$

$$\lambda \equiv M - c, \quad \mu \equiv M + c,$$

$$b_+ \equiv \sqrt{(1+\lambda)(1+\mu)}, \quad b_- \equiv \sqrt{1-\lambda}\sqrt{1-\mu}$$

Фазовая скорость c может быть комплексной величиной. При выборе нужной ветви решения дисперсионного уравнения (3.1) необходимо принять во внимание условие угасания возмущений при $y \rightarrow \pm \infty$, т.е. $\operatorname{Re}(\sqrt{1 \pm \lambda}) \geq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{1 \pm \mu}) \geq 0$. Если возвести в квадрат обе части уравнения (3.1), то, используя соотношение $\lambda + \mu = (b_+^2 - b_-^2)/2$, получим

$$4 + \lambda\mu = 2(b_+ + b_-) \quad (3.2)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (3.2)

$$b_+b_- = 1 + \lambda^2\mu^2/8 \quad (3.3)$$

Еще раз возводя в квадрат, теперь уже уравнение (3.3), получим

$$(1 + \lambda^2\mu^2/8)^2 = (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) \quad (3.4)$$

После подстановки выражений для λ и μ из уравнения (3.4) имеем

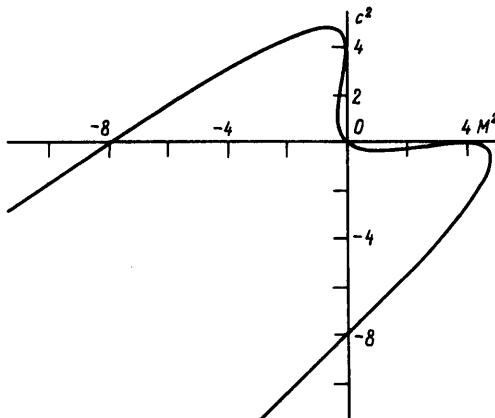
$$c^2 = -(\tau - 1)^2\tau(\tau + 2) \quad (3.5)$$

$$\tau \equiv (M^2 - c^2)/4, \quad M^2 \equiv U_0^2/(4H_0bk^2) \quad (3.6)$$

Выражение M^2 не зависит от c и определяется только заданными параметрами тангенциального разрыва. Из (3.5) следует

$$M^2 = -(\tau + 1)^2\tau(\tau - 2) \quad (3.7)$$

Уравнения (3.5), (3.7) определяют дисперсионную кривую в плоскости M^2, c^2 в параметрической форме. Однако из-за возведений в квадрат при выводе этой параметрической зависимости не все полученные ветви решений будут удовлетворять дисперсионному уравнению (3.1): ему удовлетворяет только часть дисперсионной кривой при $0 < \tau < 1$. Из определения M^2 следует, что этот параметр принимает только



Дисперсионная кривая, определяемая уравнениями (3.5), (3.7)

положительные значения. В интервале $0 < M^2 < 4$ квадрат фазовой скорости оказывается отрицательным. Поэтому рост возмущений для этих значений M^2 оказывается монотонно растущим экспоненциально. В окрестности точки O (см. фигуру) характер неустойчивости оказывается таким же, как и в классическом случае тангенциального разрыва в идеальной несжимаемой жидкости (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца).

Получим асимптотику решения дисперсионного уравнения (1.7) при $\gamma \rightarrow \infty$, предполагая $c \sim 1$, $M \sim 1$

$$\lambda \approx 2\sqrt{\gamma} \left(\frac{1}{2}M - c \right) \left(1 + \frac{1}{8\gamma(M/2 - c)^2} \right)$$

$$\mu \approx 2\sqrt{\gamma} \left(\frac{1}{2}M + c \right) \left(1 + \frac{1}{8\gamma(M/2 - c)^2} \right)$$

$$b_+ - b_- \approx 2\sqrt{\gamma M}, \quad a_- b_+ - a_+ b_- \approx 2M\sqrt{\gamma}(M^2 - 4c^2 - 4)$$

$$\sqrt{\Gamma \pm \lambda} \approx \sqrt{2\gamma} \left(1 \pm \frac{M - 2c}{4\sqrt{\gamma}} \right), \quad \sqrt{\Gamma \pm \mu} \approx \sqrt{2\gamma} \left(1 \pm \frac{M + 2c}{4\sqrt{\gamma}} \right)$$

Приравнивая в уравнении (1.17) члены порядка единицы, получим $c \approx \pm iM/2$. Опуская вычисления для следующего приближения, выпишем только окончательный результат

$$c \approx \pm \frac{iM}{2} \left(1 - \frac{3M^2}{16\gamma} + \dots \right)$$

Заключение. Присутствие сколь угодно малого диспергирования у среды приводит в сжимаемой среде к неустойчивости тангенциального разрыва при всех числах Маха даже относительно двумерных возмущений.

Авторы благодарят Г.Г. Черного и С.Я. Герценштейна за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-0101340).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д.* Об устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44. № 4. С. 151–153.
2. *Базденков С.В., Погуце О.П.* О "сверхзвуковой" стабилизации тангенциального разрыва в тонкой атмосфере // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. Вып. 7. С. 317–319.
3. *Сыроватский С.Д.* Неустойчивость тангенциального разрыва в сжимаемой среде // ЖЭТФ. 1964. Т. 27. Вып. 1. С. 121–123.
4. *Капица П.Л., Капица С.П.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. Вып. 2. С. 105–120.
5. *Шкалов В.Я.* К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 2. С. 20–25.
6. *Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.* Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 255 с.
7. *Taylor G.* The dynamics of thin sheets of fluid. II. Waves on fluid sheets // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1959. V. 253. № 1959. P. 296–321.
8. *Mysels K.J., Shinoda K., Frankel S.* Soap films: Studies of their thinning and bibliography. London: Pergamon Press, 1959. 116 p.
9. *Charib M., Derango Ph.* A liquid film (soap film) tunnel to study two-dimensional laminar and turbulent shear flows // Physica. D. 1989. V. 37. № 1–3. P. 406–416.
10. *Hopfinger E.J., Browand F.K., Gagne Y.* Turbulence and waves in a rotating tank // J. Fluid Mech. 1982. V. 125. P. 505–534.
11. *Антипов С.В., Незлин М.В., Родионов В.К., Снежкин Е.Н., Трубников А.С.* Стабилизация неустойчивости тангенциального разрыва на мелкой воде при "сверхзвуковом" течении жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. Вып. 7. С. 319–322.
12. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1995