МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1997

УДК 533.6.011.8

© 1996 г. Л.А. ПАЛЬЦЕВ

О ТЕНЗОРЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОТОКЕ ЭНЕРГИИ ПРИ МЕДЛЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Из линеаризованного кинетического уравнения Чо – Уленбека получены в газодинамическом приближении тензор напряжений и поток энергии в стационарных состояниях одноатомного газа с учетом первой вириальной поправки в коэффициентах переноса.

В работах [1, 2] из кинетических уравнений методом Чепмена – Энскога получены линейные потоки импульса и энергии в стационарных состояниях слабо разреженных многоатомного газа во внешних полях и одноатомного газа. В частности, в [2] показывается, что ряды для теплового потока и тензора напряжений состоят из конечного числа членов, причем поток тепла дается только барнеттовским приближением, а тензор напряжений – только супербарнеттовским приближением, последующие слагаемые рядов равны нулю. Необходимо, однако, отметить следующее. Представленные в [1] интегральные уравнения для поправок к оператору Вигнера, полученные из линеаризованного уравнения Вальдмана – Снайдера (см. (2.29) в [1]), в барнеттовском и высших приближениях не удовлетворяют условиям разрешимости. В [2] при решении линеаризованного уравнения Больцмана считалось, что в стационарном случае производные по времени среднемассовой скорости в локально-равновесном и диссипативном навье-стоксовском приближениях не только отличны от нуля, но равны по величине и противоположны по знаку (см. (2.5) в [2]).

В данной работе методами кинетической теории определяются линейные потоки импульса и энергии в стационарных неравновесных состояниях умеренно плотного одноатомного газа. Такие состояния газа задаются функцией распределения, удовлетворяющей линеаризованному уравнению Чо – Уленбека [3, 4]. Решение этого уравнения в газодинамическом приближении представляется в виде ряда по малому параметру пространственной неоднородности, для коэффициентов которого получена рекуррентная система уравнений. Рассмотрено решение этой системы уравнений при условии, что газодинамические переменные, как в методах Чепмена – Энскога и Боголюбова, целиком определяются нулевым приближением для функции распределения. Показано, что поток энергии дается только навье-стоксовским приближением, а тензор напряжений – барнеттовским приближением (поправки в высших приближениях равны нулю).

Для газа при нормальной плотности получены функция распределения, поток энергии и тензор напряжений в случае, когда в газодинамические переменные дают вклад не только нулевое, но и высшие приближения для функции распределения. Здесь поправки к потоку энергии в барнеттовском и высших приближениях и к тензору напряжений в супербарнеттовском и высших приближениях являются линейными комбинациями только первых, вторых и третьих производных по пространственной координате поправок к скорости и температуре. Проведено сравнение с результатами работы [2].

1. Неравновесные состояния умеренно плотного одноатомного газа задаются функцией распределения $f(1)$ в фазовом пространстве поступательного движения частицы (одноатомная молекула), эволюция которой во времени дается кинетическим уравнением Чо – Уленбека [3, 4]. В этом уравнении учитываются парные и тройные столкновения, что позволяет определять термодинамические и диссипативные характеристики газа с учетом первой вириальной поправки. В равновесном состоянии решением уравнения Чо – Уленбека является функция распределения Максвелла f_1 при заданных плотности числа частиц n и температуре T, измеряемой в энергетических единицах. В стационарных состояниях, близких к равновесному, $f(1) = f_1(1 + \varphi_1)$, где $\varphi_1 = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$; $\mathbf{r}$ – пространственная координата; $\mathbf{p}_j$ – импульс j-й частицы. В линейном приближении из уравнения Чо – Уленбека для функции φ_1 получаем уравнение

$$-\frac{\mu}{m} p_1^j \nabla_j \varphi_1 - \varepsilon\left\{\mu \sum_{i=1}^{2} \nabla_j I_i^j \varphi_1 - I_3\varphi_1 + 2nBI\varphi_1\right\} = I\varphi_1 \tag{1.1}$$

Здесь поправки на нелокальность к интегралу парных столкновений и линейные интегральные операторы парных I и тройных I_3 столкновений определяются формулами

$$\nabla_j I_i^j \varphi_1 = \frac{1}{2}\int d2\Theta_{12}\omega_i^j \nabla_j(\varphi_2 - (-1)^i\varphi_1)f_1 f_2$$

$$I\varphi_1 = n^2 f_1^{-1} I_2(\varphi)$$

$$I_3\varphi_1 = -\int d2d3\Theta_{12}\left\{(S_{-\infty}(123) - S_{-\infty}(12)) \sum_{j=1}^{3} \varphi_j - \right.$$

$$\left. - S_{-\infty}(12) \sum_{j=1}^{2} (S_{-\infty}(j3) - 1)(\varphi_j + \varphi_3)\right\} \sum_{k=1}^{3} f_k$$

$$\Theta_{12} = f_1^{-1}\Phi' n^j \left(\frac{\partial}{\partial p_1^j} - \frac{\partial}{\partial p_2^j}\right)$$

$$\omega_1^j = x^j J_{12}, \qquad \omega_2^j = J_{12}x^j$$

$$J_{12} = S_{-\infty}(12)S_{\infty}^{(0)}(12)$$

Здесь $\int dk\ldots$ – интеграл по фазовому пространству k-й частицы; $n^j = x^j/x$; $\mathbf{x}$ и $\Phi = \Phi_{12}(x)$ – относительная координата и энергия взаимодействия второй и первой частиц; $I_2(\varphi)$ – известный линеаризованный интеграл столкновений (см., например, (13.3.16) в [4]); операторы эволюции $S_{-\infty}(1 \ldots k)$ и $S_{\infty}^{(0)}(1 \ldots k)$ определены в [3, 4]; B – второй вириальный коэффициент.

В (1.1) параметры пространственной неоднородности (число Кнудсена) μ и разреженности ε поставлены только для указания порядка вклада соответствующих членов в изменение функции распределения на длине свободного пробега; $\nabla_j = \partial/\partial r^j$; по повторяющимся индексам проводится суммирование; m – масса частицы.

Заметим, что I – положительный полуопределенный эрмитовый оператор в гильбертовом пространстве H функций, зависящих от импульса частицы, со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{n}\int d\mathbf{p}_1 \overline{\varphi}_1 f_1 \psi_1$$

Базисом нуль-пространства этого оператора H_0 являются инварианты столкновения.

Газодинамические переменные $n^* = \Delta n/n$ и $T^* = \Delta T/T$ – относительные отклонения плотности числа частиц и температуры от их равновесных значений и u^j – скорость определяются формулами

$$n^* = (1, \varphi) \tag{1.2}$$

$$C_V T^* = (\varepsilon(p), \varphi) + \varepsilon \left\{ \frac{(\Phi; \Sigma\varphi)}{2T} + 2nTn^* \frac{dB}{dT} \right\}$$

$$u^j = (p^j, \varphi) / m$$

$$C_V = \frac{3}{2} - \varepsilon n \frac{d}{dT} \left(T^2 \frac{dB}{dT} \right), \quad \varepsilon_1(p) = \frac{1}{2mT} p_1^2 - \frac{3}{2}$$

$$(a_{12}; \Sigma\varphi) = \frac{1}{n} \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \bar{a}_{12} S_{-\infty}(12) f_1 f_2 \sum_{j=1}^{2} \varphi_j$$

Из (1.1), учитывая свойства симметричной поправки на нелокальность к интегралу парных столкновений ($i = 2$) и локального интеграла тройных столкновений (см., например, приложение в [5]), получаем уравнения сохранения

$$\nabla_j u^j = 0, \quad \nabla_j P^{ij} = 0, \quad \nabla_j Q^j = 0 \tag{1.3}$$

Здесь тензор напряжений и поток энергии

$$P^{ij} = \frac{n}{m} (p^i p^j, \varphi) - \frac{1}{2} \varepsilon n (x \Phi' n^i n^j; \Sigma\varphi) \tag{1.4}$$

$$Q^j = \frac{n}{m} (p^j E(p; \varepsilon), \varphi) + \varepsilon n (W^j(\Phi); \Sigma\varphi)$$

$$E(p_1; \varepsilon) = T(\varepsilon_1(p) - 1) - \varepsilon n T \left(B - T \frac{dB}{dT} \right)$$

$$W^j(\Phi) = \frac{1}{4m} (p_1^i + p_2^i)(\delta_{ij} \Phi - n^i n^j x \Phi')$$

Как и в работе [6], для определения потоков импульса и энергии в газодинамическом приближении, когда $\mu \ll 1$, будем искать решение уравнения (1.1) вне кнудсеновского слоя в виде ряда

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \mu \varphi_1^{(1)} + \mu^2 \varphi_1^{(2)} + \ldots \tag{1.5}$$

Из (1.2) находим

$$n^* = n^{(0)} + \mu n^{(1)} + \mu^2 n^{(2)} + \ldots \tag{1.6}$$

где $n^{(s)} = (1; \varphi^{(s)})$ и аналогично для $T^{(s)}$, $u^{(s)j}$, а также $P^{(s)ij}$ и $Q^{(s)j}$ (см. (1.4)). Заметим, что $\varphi \sim$ M и $\mu \sim$ M/Re, где M и Re – числа Маха и Рейнольдса. Из (1.1) и (1.5) следует, что $\mu \gg$ M и поэтому здесь рассматриваются только медленные течения при Re $\ll 1$.

Введем функции

$$\psi_1(s) = \varphi_1^{(s)} - \varphi_0(1; s), \quad s = 0, 1, \ldots \tag{1.7}$$

$$\varphi_0(1; s) = n^{(s)} + \varepsilon_1(p) T^{(s)} + p_1^j u^{(s)j} / T$$

Для функций (1.7) из (1.1) и (1.2) получаем следующую рекуррентную систему уравнений

$$-(T/m)^{1/2} \{ (p^1 \nabla^1)(\psi_1(s-1) - \pi(s-1)) - ([\nabla p]^2 \pi(s-1)^2) \} -$$

$$- \varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^{2} (\nabla^1 I_i^1) \psi_1(s-1) + 2nBI\psi_1(s) - I_3 \psi_1(s) \right\} - (b(\varepsilon)^2 [\nabla u^{(s-1)}]^2) - \tag{1.8}$$

$$- (a(\varepsilon)^1 \nabla^1) T^{(s-1)} = I\psi_1(s), \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

и однородные дополнительные условия

$$(h_j, \psi(s)) = \frac{1}{2}\delta_{j5}(\Phi; \Sigma\psi(s)) \tag{1.9}$$

$$(h_1, \ldots, h_5) = (1, p_1^1, \ldots, p_1^3, p_1^2 / 2m)$$

В (1.8) использованы сферические тензоры [7]

$$(A^j B^j) = \sum_{m=-j}^{j} (-1)^{j-m} A^j_{-m} B^j_m$$

где A^j_m есть A_{jm} в обозначениях [7]; шаровая и неприводимая части безразмерного тензора напряжений (см. (1.4))

$$\pi(s) = \frac{1}{3}(p^2, \psi(s)) - \frac{\varepsilon}{6T}(x\Phi'; \Sigma\psi(s)) \tag{1.10}$$

$$\pi(s)^2_m = (-1)^m \left\{([p]^2_{-m}, \psi(s)) - \frac{\varepsilon}{2T}(x\Phi'[n]^2_{-m}; \Sigma\psi(s))\right\}$$

$$b(\varepsilon)^2_m = (1 + \varepsilon nB) b_2(1)^2_m + \varepsilon I_{2u}(1)^2_m$$

$$a(\varepsilon)^1_m = (1 + \varepsilon nB) a_1(1)^1_m + \varepsilon I_{2T}(1)^2_m$$

$$b_2(1)^2_m = [p]^2_m$$

$$a_1(1)^1_m = (nT / \rho)^{1/2} p^1_m (\varepsilon_1(p) - 1)$$

$$I_{2u}(1)^2_m = -\int d2\Theta_{12} J_{12} f_1 f_2 [xp_{21}]^2_m$$

$$I_{2T}(1)^2_m = -\int d2\Theta_{12} J_{12} f_1 f_2 x^1_m (V^1 p^1_{21})$$

$$[ab]^2_m = \sum_{m_1 m_2} \langle 1m_1 1m_2 | 2m \rangle a^1_{m_1} b^1_{m_2}$$

Здесь $[c]^j_m$ – компоненты симметричного неприводимого тензора j-го ранга, построенные из компонент вектора $\mathbf{c}$; ρ – плотность частиц; $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$ – коэффициенты Клебша – Гордана [7]

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \left(\frac{n}{\rho T}\right)^{1/2}, \quad \mathbf{p}_{21} = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{2T}, \quad \mathbf{V} = \frac{n}{2\rho}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

При получении системы уравнений (1.8) использовали следующие из (1.3) уравнения

$$(\nabla^1 u^{(s)1}) = 0 \tag{1.11}$$

$$\nabla^1_m (p^{(s)} + \pi(s)) = \sum_{m_1 m_2} (-1)^{m_1} \langle 1m1m_1 | 2m_2 \rangle \nabla^1_{-m_1} \pi(s)^2_{m_2}$$

$$(\nabla^1 q(s)^1) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

$$p^{(s)} = n^{(s)} + T^{(s)} + \varepsilon n \left(2n^{(s)} B + T^{(s)} \frac{dTB}{dT}\right) \tag{1.12}$$

$$q(s)^1_m = (-1)^{1-m} \left\{(a^1_{1-m}, \psi(s)) + \frac{\varepsilon}{T}(W^1_{-m}(\Phi); \Sigma\psi(s))\right\}$$

Из системы уравнений (1.8) и определений (1.10), (1.12), учитывая (1.7), (1.9), (1.11), можно найти функцию распределения, тензор напряжений и поток энергии в любом приближении по параметру пространственной неоднородности.

2. Решение системы уравнений (1.8) будем искать в виде

$$\psi_1(s)=\psi_1(s;0)+\varepsilon\psi_1(s;1),\quad s=0,1,\ldots \tag{2.1}$$

при условии, что газодинамические переменные, как в методах Чепмена – Энскога и Боголюбова [3–5], целиком определяются функцией $\varphi_1(0)=\varphi_0(1;\,0)$. В локально-равновесном приближении ($s=0$) из (1.8), учитывая (1.9), получаем $\psi_1(0;\,k)=0$ при $k=0,\,1$ и, следовательно

$$\varphi_1^{(0)}=n^*+\varepsilon_1(p)T^*+p_1^ju^j/T \tag{2.2}$$

$$P^{ij}(0)=\delta_{ij}nTp^*$$

$$Q^j(0)=0$$

$$\nabla_ju^j=0,\quad \nabla_jp^*=0$$

где давление (см. (1.12) при $s=0$)

$$p^*=n^*+T^*+\varepsilon n\left(2n^*B+T^*\frac{dTB}{dT}\right) \tag{2.3}$$

Здесь и везде ниже параметры ε и μ поставлены только для указания порядка соответствующих членов.

В диссипативном навье-стоксовском приближении ($s=1$) из (1.8) получаем уравнения

$$\Phi_1^{(k)}(1;0)=I\psi_1(1;k),\quad k=0,1 \tag{2.4}$$

$$\Phi_1^{(k)}(1;s)=-(b_2^{(k)}(1)^2[\nabla u^{(s)}]^2)-(a_1^{(k)}(1)^1\nabla^1)T^{(s)}$$
$$b_2^{(0)}(1)_m^2=b_2(1)_m^2,\quad b_2^{(1)}(1)_m^2=I_{2u}(1)_m^2+I^{(3)}b_2(1)_m^2 \tag{2.5}$$

Здесь оператор $I^{(3)}=I_3I^{-1}-nB$; аналогично определяются $a_1^{(k)}(1)_m^1$ через $a(1)_m^1$ и $I_{2T}(1)_m^1$.

Из (2.4), (1.3) и (1.4), учитывая (1.9), находим

$$\psi_1(1;k)=I^{-1}\Phi_1^{(k)}(1;0) \tag{2.6}$$

$$P^{ij}(1;k)=-2\eta^{(k)}[\nabla u]^{ij}$$

$$Q^j(1;k)=-\frac{\lambda^{(k)}}{k}T\nabla_jT^*$$

$$\Delta T^*=0,\quad \Delta u^j=0$$

$$[\nabla u]^{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_iu^j+\nabla_ju^i)$$

Здесь и ниже I^{-1} – оператор обратный I в H/H_0 (см., например, [1]); $P^{ij}(l;\,k)$ и $Q^j(l;\,k)$ – поправки к тензору напряжений и потоку энергии вычисляются по функциям $\psi_1(l;\,k)$; $\eta^{(0)}$ и $\lambda^{(0)}$ – коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности для газа при нормальной плотности [4] и поправки по плотности к этим коэффициентам $\eta^{(1)}$ и $\lambda^{(1)}$ (см., например, (13.3.46в) и (13.3.45в) в [4]); k – постоянная Больцмана; Δ – оператор Лапласа.

В диссипативном барнеттовском приближении ($s=2$) из (1.8), учитывая (2.6), получаем уравнения

$$\Phi_2^{(k)}(1;0) = I\psi_1(2;k), \quad k = 0,1 \tag{2.7}$$

$$\Phi_j^{(k)}(1;s) = (-1)^j\{(b_{j+1}^{(k)}(1)^{j+1}[\nabla\ldots u^{(s)}]^{j+1}) + (a_j^{(k)}(1)^j[\nabla]^j)T^{(s)}\} \tag{2.8}$$

$$b_j^{(k)}(1)_m^j = b_j^{(k)}(1;2,3,\ldots,j-1)_m^j + (I^{(3)} - nB)b_j^{(k-1)}(1)_m^j + \sum_{i=1}^{2}\ [I_i I^{-1} b_{j-1}^{(k-1)}(1)^{j-1}]_m^j$$

$$b_j(1;i_0,i_1,\ldots,i_{j-3},i')_m^i = (nT/\rho)^{1/2}[pI^{-1}b_{j-1}(1;i_0,i_1,\ldots,i_{j-3})^{i'}]_m^i$$

$$[\nabla\ldots u]_m^j = [\nabla[\nabla\ldots u]^{j-1}]_m^j, \quad j = 3,4,\ldots$$

$$[pd^{i'}]_m^i = \sum_{ns}\ \langle 1ni's \mid im\rangle p_n^1 d_s^{i'}$$

Аналогично определяются $a_j^{(k)}(1)_m^j$ через $a_i^{(k-1)}(1)_m^i$ и $a_j^{(k)}(1;1,2,\ldots,j-1)_m^j$ при $i = j-1, j$ и $j = 2, 3, \ldots$

Из (2.7) и (1.4) с учетом (1.9) находим

$$\psi_1(2;k) = I^{-1}\Phi_2^{(k)}(1;0) \tag{2.9}$$

$$P^{ij}(2;k) = 2\Lambda^{(k)}\nabla_i\nabla_j T^*$$

$$Q^j(2;k) = 0$$

где кинетический коэффициент линейных температурных напряжений для газа при нормальной плотности $\Lambda^{(0)}$ и поправка по плотности к этому коэффициенту $\Lambda^{(1)}$ определяются формулами

$$\Lambda^{(k)} = \frac{nT}{10}\sum_{m=-2}^{2}\{([p]_m^2, I^{-1}a_{2\,m}^{(k)2}) - n(x\Phi'[n]_m^2; \Sigma I^{-1}a_{2\,m}^{(k-1)2})\} \quad k = 0,1 \tag{2.10}$$

При сферически-симметричном межмолекулярном взаимодействии

$$I_3[p]_m^j = g_3[p]_m^j$$

$$I_i^1[p]_m^j = g_i(+)[p]_m^{j+1} + g_i(-)[p]_m^{j-1}$$

где функции g_3 и $g_i(\pm)$ зависят только от модуля импульса. Учитывая свойства коэффициентов Клебша – Гордана [7], можно показать, что при $(\nabla^1 u^1) = 0$

$$\sum_{nspq}\ \langle 1\,n\,k\pm 1\,s \mid k\,m\rangle\langle 1\,p\,k\,q \mid k\pm 1\,s\rangle \nabla_n^1\nabla_p^1[\nabla\ldots u]_q^k = C_k(\pm)\Delta[\nabla\ldots u]_m^k$$

где, например, $c_2(+) = (64/315)^{1/2}$, $c_2(-) = (3/20)^{1/2}$, $c_3(+) = (25/112)^{1/2}$, $c_3(-) = c_2(+)$, ... Тогда из (1.8) и (1.4) при условиях (1.9) получаем в супербарнеттовском и высших приближениях

$$\psi_1(l;k) = I^{-1}\Phi_l^{(k)}(1;0) \tag{2.11}$$

$$P^{ij}(l;k) = 0, \quad Q^j(l;k) = 0, \quad l = 3,4,\ldots, \quad k = 0,1$$

где функции $\Phi_l^{(k)}(1; s)$ определены в (2.8).

Таким образом, в стационарных состояниях умеренно плотного одноатомного газа, близких к состоянию теплового равновесия

$$\varphi_1 = n^* + \varepsilon_1(p)T^* + \frac{p_1^j u^j}{T} + \sum_{k=0}^{1}\sum_{s=1}^{\infty}\ (-1)^s\varepsilon^k\mu^s I^{-1}\{(b_{s+1}^{(k)}(1)^{s+1}[\nabla\ldots u]^{s+1}) +$$

$$+(a_s^{(k)}(1)^s[\nabla]^s)T^*\} \tag{2.12}$$

$$P^{ij}=\delta_{ij}nTp^*-2\mu\eta[\nabla u]^{ij}+2\mu^2\Lambda\nabla_i\nabla_j T^*$$

$$Q^j=-\frac{\mu\lambda}{k}T\nabla_j T^*$$

где $\eta=\eta^{(0)}+\varepsilon\eta^{(1)}$ и аналогично для λ и Λ; давление p^* дано в (2.3). Газодинамические переменные в (2.12) подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned}&\nabla_j u^j=0, \quad \nabla_j p^*=0\\ &\Delta u^j=0, \quad \Delta T^*=0\end{aligned} \tag{2.13}$$

которые в случае газа при нормальной плотности можно получить из уравнений (6.1) работы [8] в стационарном случае.

При максвелловском законе межмолекулярного взаимодействия (максвелловские молекулы)

$$(I-\omega_{ji})S_{j+1/2}^{(i)}(p^2/2)[p]_m^j=0$$

где $S_j^{(i)}(x)$ – полиномы Сонина [4] и $\omega_{ji}\sim\eta/nT$ определяются, например, в [9]. Тогда для газа при нормальной плотности из (2.6), (2.9)–(2.11) находим

$$\Lambda=\frac{2\eta\lambda}{5nk}$$

$$\psi_1(s;0)=(-1)^s\left(\frac{T}{m}\right)^{(s-1)/2}\left\{U^{(s)}([p]^{s+1}[\nabla\ldots u]^{s+1})+\left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}V^{(s)}([p]^s[\nabla]^s)T^*\right\}$$

$$U^{(s)}=\prod_{j=1}^{s}\omega_{j+10}^{-1}$$

$$V^{(s)}=\prod_{j=1}^{s}\omega_{j1}^{-1}(\varepsilon_1(p)-s)+\sum_{k=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-k}\prod_{i=1}^{k}\omega_{j1}^{-1}\omega_{s+1-i0}^{-1}$$

Для сравнения с результатами [2] найдем, следуя этой работе, поправки к функции распределения и тензору напряжений в барнеттовском и супербарнеттовском приближениях. Отметим, что в [2] газодинамические переменные целиком определяются функцией нулевого приближения. В обозначениях данной работы из (2.6) в [2] и определения тензора напряжений получаем

$$\varphi_1^{(2)}=I^{-1}\Psi_2(1;0)-(C(1)^2\Delta[\nabla u]^2) \tag{2.14}$$

$$\varphi_1^{(3)}=I^{-1}\Psi_3(1;0)+(C(1)^2\Delta[\nabla u]^2)+(D(1)^3[\nabla\ldots u]^3)$$

$$P^{(2)ij}=2\Lambda\nabla_i\nabla_j T^*-2\Gamma\Delta[\nabla u]^{ij}$$

$$P^{(3)ij}=-2(\Theta-\Gamma)\Delta[\nabla u]^{ij}$$

$$\Psi_2(1;s)=c_2(-)(b_3(1;2)^1\Delta u^{(s)1})+\Phi_2^{(0)}(1;s) \tag{2.15}$$

$$\Psi_3(1;s)=-(b_4(1)^2\Delta[\nabla u^{(s)}]^2)+\Phi_3^{(0)}(1;s)$$

$$C(1)_m^2=\eta I^{-1}I^{-1}[p]_m^2/\rho$$

$$D(1)_m^3=I^{-1}\left(I^{-1}b_3(1)_m^3-\left(\frac{nT}{\rho}\right)^{1/2}[pC(1)^2]_m^3\right)$$

$$b_3(1;2)^1_m = (nT/\rho)^{1/2}\{[pI^{-1}[p]^2]^1_m - (20/3)^{1/2} p^1_m \eta / nT\}$$

$$b_4(1)^2_m = c_2(-)b_4(1;\,2,1)^2_m + c_2(+)b_4(1;\,2,3)^2_m$$

$$\Gamma = nT \sum_{m=-2}^{2} ([p]^2_m, C^2_m) \tag{2.16}$$

$$\Theta = \Theta_1/20 + 4\Theta_3/105$$

$$\Theta_j = nT \sum_{m=-j}^{j} (b_3(;2)^j_m,\; I^{-1}b_3(;2)^j_m)$$

Здесь η и Λ – коэффициенты сдвиговой вязкости и температурных напряжений для газа при нормальной плотности.

Для максвелловских молекул $\Gamma = \eta^3/\rho nT$ и $\Theta = 5\eta^3/3\rho nT$.

Последние члены в правых частях выражений для поправок к функции распределения в барнеттовском и супербарнеттовском приближениях и к тензору напряжений в барнеттовском приближении в (2.14) по порядку величины равны соответственно μ^3M, μ^4M и $\mu^3 nT$M, где M – число Маха, и являются внепорядковыми в соответствующих приближениях. Аналогичное свойство имеет место для поправок к функции распределения, получаемых из (2.6) в [2], и в высших приближениях.

Таким образом, в отличие от [2] поправки к функции распределения в (2.6), (2.9) и (2.11) не содержат внепорядковых членов, в потоке энергии и тензоре напряжений отсутствуют барнеттовские и супербарнеттовские члены соответственно. Заметим, что в [2] в отличие от (2.13) считается, что уравнением переноса импульса является уравнение $\nabla_j p = \eta\Delta u^j/nT$.

3. Решение системы уравнений (1.8) можно также искать в виде (2.1), но при условии, что в газодинамические переменные дают вклад не только нулевое, но и высшие по μ приближения для функции распределения. Заметим, что это условие более естественно при рассмотрении стационарных состояний газа, чем условие Чепмена – Энскога. Ниже ограничимся определением тензора напряжений и потока энергии в газе при нормальной плотности. Тогда, как и во втором разделе, решая последовательно при $s = 0, 1, 2, \ldots$ систему уравнений (1.8) с учетом определений (1.10), (1.12), условий (1.9) и уравнений переноса (1.11) при $\varepsilon = 0$, получим

$$\begin{aligned}
&\psi_1(s) = \sum_{j=1}^{s} I^{-1}\Psi_j(1;s-j)\\
&P^{ij}(s) = \delta_{ij} nTp^{(s)} - 2\eta[\nabla u^{(s-1)}]^{ij} + 2\Lambda\nabla_i\nabla_j T^{(s-2)} - 2\Theta\Delta[\nabla u^{(s-3)}]^{ij}\\
&Q^j(s) = -\frac{\lambda}{k} T\nabla_j T^{(s-1)} + \Lambda\Delta u^{(s-2)j} \qquad s = 0,1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где газодинамические переменные подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned}
&\nabla_j u^{(s)j} = 0, \quad \Delta T^{(s-1)} = 0\\
&\nabla_j P^{(s)} = \eta\Delta u^{(s-1)j}/nT\\
&s = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В (3.1) $\psi_1(s) = \psi_1(s;\,0)$ (см. (2.1)) и аналогично для тензора напряжений и потока энергии; $\Psi_j(1;\,s)$ при $j = 1$ есть $\Phi_1^{(0)}(1;\,s)$, определенная в (2.8), при $j = 2, 3$ определены в (2.15)

$$\Psi_j(1;s) = (-1)^j (b_{j+1}(1)^{j-1}\Delta[\nabla\ldots u^{(s)}]^{j-1}) + \Phi_j^{(0)}(1;s), \quad j = 4,5,\ldots$$

Здесь

$$b_{j+1}(1)_m^{j-1} = c_2(-)b_{j+1}(1;2,1,2,3,\dots,j-2)_m^{j-1} + c_2(+)b_{j+1}(1;2,3,2,3,\dots,j-2)_m^{j-1} +$$

$$+ c_{j-1}(+)b_{j+1}(1;2,3,\dots,j)_m^{j-1} + \sum_{k=3}^{j-2} c_k(+)b_{j+1}(1;2,3,\dots,k,k+1,k,\dots,j-2)_m^{j-1}, \quad j=4,5,\dots$$

где использованы функции из (2.5) и (2.8); давление $p^{(s)} = n^{(s)} + T^{(s)}$; η, λ и Λ – коэффициенты переноса для газа при нормальной плотности; супербарнеттовский коэффициент сдвиговых напряжений Θ определен в (2.16).

Система уравнений переноса (3.2) в каждом конкретном приближении не замкнута. Например, для определения поправки к плотности числа частиц в s-м приближении необходимо знать поправку к температуре, получаемую из $s+1$-го приближения. Аналогичное свойство имеет место при сплошносредном описании медленных изотермических течений, так, например, течения, реализуемые в линейном эффекте Скотта [6], когда $u^{(0)j} = 0$, а $u^{(s)j}$, отличные от нуля при $s \geqslant 1$, обусловлены тепловым крипом и скольжениями высшего порядка. Граничные условия для (3.2) можно получить (см., например, [10]), решая уравнение (1.1) для газа при нормальной плотности в кнудсеновском слое при поправках к функции распределения в объеме газа (3.1).

Из (3.1) и (3.2) получаем функцию распределения, тензор напряжений, поток энергии и уравнения переноса

$$\varphi_1 = n^* + \varepsilon_1(p)T^* + \frac{p_1^j u^j}{T} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{s} \mu^s l^{-1} \Psi_j(1; s-j) \tag{3.3}$$

$$P^{ij} = \delta_{ij} nT(n^* + T^*) - 2\mu\eta[\nabla u]^{ij} + 2\mu^2 \Lambda \nabla_i \nabla_j T^* - 2\mu^3 \Theta \Delta [\nabla u]^{ij}$$

$$Q^j = -\frac{\mu\lambda}{k} T \nabla_j T^* + \mu^2 \Lambda \Delta u^j$$

$$\nabla_j u^j = 0, \quad \mu \Delta T^* = 0$$

$$\nabla_j (n^* + T^*) = \mu\eta \Delta u^j / nT$$

где, однако, в отличие от [2] в n^*, определенной в (1.6), $n^{(s)}$ отличны от нуля при $s \geqslant 1$ и аналогично для T^* и u^j. Заметим, что уравнения переноса в (3.3) согласуются с уравнениями (6.1) работы [8] в стационарном случае.

Заключение. Из стационарного линеаризованного уравнения Чо – Уленбека получены в газодинамическом приближении функция распределения и линейные тензор напряжений и поток тепла вне кнудсеновского слоя с учетом первой вириальной поправки в любом приближении по числу Кнудсена. В случае, когда газодинамические переменные, как и в методе Чепмена – Энскога, целиком определяются нулевым приближением для функции распределения, тензор напряжений и поток тепла, в отличие от [2], дается только барнеттовским и навье-стоксовским приближениями соответственно (последующие слагаемые рядов равны нулю). Если газодинамические переменные определяются не только нулевым, но и высшими приближениями для функции распределения, то поток тепла зависит только от первых и вторых, а тензор напряжений – только от первых, вторых и третьих производных по пространственным координатам локальной скорости и локальной температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moraal H.* Quantum kinetic theory of polyatomic gases // Phys. Repts. 1975. V. 17. № 5. P. 226–306.
2. *Галкин В.С.* Вырождение рядов Чепмена – Энскога для переносных свойств в случае медленных стационарных течений слаборазреженных газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 157–163.
3. *Уленбек Дж., Форд Дж.* Лекции по статистической механике. М.: Мир, 1965. 307 с.
4. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.

5. *Пальцев Л.А.* О колебательной и вращательной релаксациях в умеренно плотном газе. I // Теорет. и мат. физика. 1988. Т. 77. № 3. С. 412–425.
6. *Cercignani C., Lampis M.* Kinetic theory analysis of the Scott effect // Raref. Gas Dynamics. Proc. 15th Intern. Symp., Grado, 1986. Stuttgart: Teubner, 1986. V. 1. P. 336–344.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 10. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 767 с.
8. *Grad H.* Asymptotic theory of the Boltzman equation // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 2. P. 147–181.
9. *Вальдман Л.* Явления переноса в газах при среднем давлении // Термодинамика газов. М.: Машиностроение, 1970. С. 169–414.
10. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1995