МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1997

УДК 533.6.011.55

© 1997 г. И.В. ЕГОРОВ, А.И. ЕРОФЕЕВ

СОПОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО И УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Представлено сопоставление данных математического моделирования гиперзвукового обтекания плоской пластины (установленной под нулевым углом атаки), полученных на основе численного решения полных уравнений Навье–Стокса и метода статистического моделирования Монте-Карло. Рассмотрена проблема влияния условий скольжения и скачка температуры на поверхности тела при различных значениях температурного фактора. Представлен анализ газодинамических переменных на поверхности и в поле течения.

При математическом моделировании обтекания значительную роль приобретают те методы и средства, которые в состоянии описывать движение газа в наиболее широком диапазоне определяющих параметров задачи. Для описания течения газа в любом диапазоне значений числа Kn ($\mathrm{Kn} = \lambda_s/L$, λ_s – длина свободного пробега молекул, L – характерный размер возмущенной области течения) используются уравнения Больцмана, а для режимов сплошной среды ($\mathrm{Kn} \ll 1$) – уравнения Навье – Стокса.

К настоящему времени область применимости обоих подходов простирается от решения фундаментальных задач обтекания тел простой геометрии и простым бесструктурным газом [1] до описания сложных течений около тел пространственной конфигурации с учетом физико-химических превращений [2–4]. Часто модели сплошной среды используются для тех режимов, где формально теряется область их применимости. При этом встает вопрос о достоверности получаемых результатов.

Использование уравнений Навье – Стокса для описания течений разреженного газа требует обоснования в каждом конкретном случае, поскольку область их применимости определяется асимптотически при $\mathrm{Kn} \to 0$ и предполагается малое отклонение функции распределения от локально равновесной. В [1] отмечалось, что при локальном числе Кнудсена $\mathrm{Kn}_l = \lambda_s/l > 0{,}1$, где l – линейный масштаб, связанный с градиентами макропараметров, уравнения сплошной среды перестают адекватно описывать течение газа и необходимо рассмотрение на молекулярном уровне. В то же время из решения задачи об обтекании затупленного тела, приведенного в [1], следует, что давление газа и тепловой поток в окрестности передней критической точки, полученные на основе сплошной среды и молекулярного подходов, оказываются близкими, несмотря на существенное различие макропараметров в поле течения (в зоне ударной волны).

На сегодняшний день одним из основных методов решения уравнений Больцмана является метод статистического моделирования Монте-Карло [5]. С появлением высокопроизводительных ЭВМ применение метода статистического моделирования все дальше продвигается в область режимов обтекания, где $\mathrm{Kn} \ll 1$. Это делает реальным исследование границ применимости подхода сплошносредного для исследования течений разреженного газа.

К настоящему времени разработаны эффективные алгоритмы [6] численного интегрирования полных уравнений Навье–Стокса методом сквозного счета и обеспечивающие свойство консервативности. Данные методы основаны на полностью неявных монотонных разностных схемах второго и выше порядка точности и разрешают многие математические трудности, возникающие при численном анализе задач обтекания.

Для повышения эффективности моделей сплошной среды в переходных по числу Кнудсена областях применяются два основных подхода: использование условий скольжения и скачка температуры на твердой поверхности тела [7] и нелинейная зависимость тензора напряжений от тензора скоростей деформаций [8–9]. При этом первый из подходов, в частности, устраняет математическую особенность в передней кромке острых тел.

Много работ посвящено сопоставлению кинетических и сплошносредных моделей [10–12]. Однако основным недостатком многих результатов является то, что в них для сравнения используются данные из работ, в которых не приводится полный набор входных параметров численного анализа задачи. В частности, поэтому сравнения проводятся в узком наборе определяющих параметров задачи.

Одной из наиболее последовательно изучаемых задач является моделирование течения около плоской пластины, установленной параллельно направлению свободного потока. Несмотря на большие успехи в решении этой проблемы [13–14], имеется ряд неизученных особенностей структуры поля течения как с кинетической, так и с точек зрения сплошной среды.

В настоящей работе представлено сопоставление данных математического моделирования гиперзвукового обтекания плоской пластины, полученных на основе численного решения полных уравнений Навье – Стокса и метода статистического моделирования Монте-Карло. Рассмотрена проблема влияния условий скольжения и скачка температуры на твердой поверхности тела для различных значений температурного фактора. Представлен анализ газодинамических переменных на твердой поверхности и в поле течения.

1. Постановка и решение задачи для уравнений Навье – Стокса. Математическая постановка задачи обтекания произвольного двухмерного тела потоком вязкого теплопроводного газа сводится к системе уравнений Навье – Стокса и граничных условий. Уравнения Навье – Стокса в произвольной криволинейной системе координат (ξ, η)

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta)$$

где x, y – декартовы координаты, можно записать в дивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = 0$$

Здесь $\mathbf{Q}$ – вектор консервативных зависимых переменных задачи, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{G}$ – векторы потоков в криволинейной системе координат. Векторы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{G}$ связаны с соответствующими векторами $\mathbf{Q}_c$, $\mathbf{E}_c$ и $\mathbf{G}_c$ в декартовой системе координат по формулам

$$\mathbf{Q} = J\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{E} = J\left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \xi}{\partial y}\right), \quad \mathbf{G} = J\left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

в которых $J = \partial(x, y)/\partial(\xi,\eta)$ – якобиан преобразования.

Декартовы компоненты векторов $\mathbf{Q}_c$, $\mathbf{E}_c$ и $\mathbf{G}_c$ для двухмерных уравнений Навье – Стокса имеют вид

$$\mathbf{Q}_c = \begin{Vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{E}_c = \begin{Vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho u H - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - \lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{Vmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho v H - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - \lambda \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{Vmatrix}$$

где ρ – плотность, u, v – декартовы компоненты вектора скорости V, p – давление, $e=\rho(c_v T+(u^2+v^2)/2)$ – полная энергия на единицу объема, $H=c_p T+(u^2+v^2)/2$ – полная энтальпия, c_p и c_v – теплоемкости при постоянном давлении и объеме, τ – тензор напряжений с компонентами

$$\tau_{xx}=\mu\left(-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}+2\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \tau_{yy}=\mu\left(-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

μ и λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Система уравнений для совершенного газа замыкается уравнением состояния $p=\rho RT/M$, где R – универсальная газовая постоянная, M – молярный вес газа. При определении коэффициента вязкости в данной работе использовалась зависимость $\mu/\mu_\infty=(T/T_\infty)^{0,7}$, что обеспечивало согласование с моделью межмолекулярного взаимодействия, принятой при решении задачи методом Монте-Карло (см. разд. 2). Коэффициент теплопроводности определялся из соотношения $\mathrm{Pr}=\mu c_p/\lambda=0{,}7$.

Задача сверхзвукового обтекания плоской пластины, установленной параллельно направлению свободного потока газа, решалась в прямоугольной области. На входной и верхней границах расчетной области параметры потока задавались равными параметрам в невозмущенном потоке, на выходной границе использованы "мягкие" условия экстраполяции искомых газодинамических переменных. На нижней границе при $x<0$, $y=0$ рассматривалось условие симметрии потока, при $x\geqslant 0$, $y=0$ использовались условия равенства температуры газа температуре стенки и прилипания

$$T=T_w,\quad u=0,\quad v=0 \tag{1.1}$$

Наряду с этими граничными условиями рассмотрены также условия скольжения и скачка температуры [7]

$$u=\frac{2-\theta}{\theta}\frac{5\pi}{16}\lambda_s\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{T}{T_w}=1+\frac{2-\alpha}{\alpha}\frac{75\pi}{128}\frac{\lambda_s}{T}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{1.2}$$

где λ_s – средняя длина свободного пробега молекул, определяемая по формуле

$$\lambda_s=16/5\ \sqrt{\gamma/2}\mu/\rho\sqrt{\pi RT} \tag{1.3}$$

Здесь θ и α – коэффициенты аккомодации, γ – отношение удельных теплоемкостей совершенного газа (показатель адиабаты).

В [15] сделана попытка усовершенствования условий скольжения в переходной по числу Кнудсена области. Основная идея состоит в определении коэффициента пропорциональности между скоростью и ее градиентом из условия согласованности со свободномолекулярным режимом. В [15] показано, что для этого необходимо использовать условие скольжения в виде

$$u=\frac{2}{\theta}\frac{5\pi}{16}\lambda_s\frac{du}{dy} \tag{1.4}$$

В настоящей работе условие (1.4) (называемое обобщенным, модель 3) вместе с условиями (1.2) (модель 2), а также условиями прилипания (1.1) (модель 1) использовано при проведении параметрических исследований гиперзвукового обтекания плоской пластины.

Для получения безразмерных коэффициентов трения C_f и теплового потока Q использованы соотношения

$$C_f=2\mu\frac{\partial u}{\partial y}/(p_\infty V_\infty^2),\quad Q=2\left(\mu u\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)/(\rho_\infty V_\infty^3)$$

Выражение для Q состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое связано с вязкой диссипацией, а второе – с теплопроводностью. Следует отметить, что первое слагаемое в определении Q равно нулю для условий прилипания и отлично от нуля в случае использования условия скольжения на твердой поверхности тела.

Уравнения Навье – Стокса решались полностью неявным конечно-разностным методом [6] с использованием интегроинтерполяционного подхода к аппроксимации. Для вычисления конвективной составляющей вектора потока применена монотонная схема второго порядка точности. При интерполяции консервативных зависимых переменных использован ограничитель вида

$$f(a,b)=\begin{cases}2ab/(a+b), & ab\geqslant 0\\ 2ab(a+b)/(a-b)^2, & ab<0\end{cases}$$

а для вычисления собственных значений и собственных векторов – метод Роу [16] для приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва.

Для аппроксимации диффузионной составляющей вектора потока в уравнениях Навье – Стокса применена разностная схема типа центральных разностей. Шаблон, на котором аппроксимируются двухмерные уравнения Навье – Стокса, состоит в общем случае из 13 точек.

Для решения нелинейных сеточных уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X}$ – вектор искомых сеточных переменных, использован модифицированный метод Ньютона

$$\mathbf{X}^{[k+1]}=\mathbf{X}^{[k]}-\tau_{k+1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}^{k})$$

где $\mathbf{D}=\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}$ – матрица Якоби, k – номер итерации. В процессе численного решения параметр τ_k – определялся по формуле [17]

$$\tau_{k+1}=(\Delta\mathbf{X}^{[k]}-\Delta\mathbf{X}^{[k-1]},\ \mathbf{X}^{[k]}-\mathbf{X}^{[k-1]})/(\Delta\mathbf{X}^{[k]}-\Delta\mathbf{X}^{[k-1]})^2$$

где $\Delta\mathbf{X}^{[k]}$ – вектор поправок. По мере сходимости итерационного процесса $\tau_k\to 1$. Формирование матрицы Якоби осуществлялось при помощи конечных приращений вектора невязки по вектору искомых сеточных переменных. При аппроксимации уравнений Навье – Стокса оператор $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}$ имеет разреженную блочную 13-диагональную структуру, а элементарный блок – плотная матрица размера 4×4.

Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых на итерации по нелинейности, осуществлялось при помощи прямого метода LU-разложения ($\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}=\mathbf{LU}$, где $\mathbf{L}$ – нижняя, $\mathbf{U}$ – верхняя треугольные матрицы). Для снижения суммарного числа арифметических операций предварительно анализировалась структура разреженности матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ и проводилась перенумерация неизвестных по обобщенному методу вложенных сечений [6]. Эта методика была многократно опробована в численных экспериментах и доказала свою надежность и высокую эффективность [18].

Численное решение уравнений Навье – Стокса осуществлялось с использованием ортогональной неравномерной расчетной сетки, содержащей 101×101 точек. Сгущение узлов осуществлялось по двум направлениям: в пристеночной области пластины толщиной $\delta(\delta=2/\ \mathrm{Re}^{1/2})$ число узлов определялось равным 20% от общего числа (101) и в области передней кромки толщиной $\delta_x(\delta_x=2/\mathrm{Re})$ задавалось такое же количество узлов.

2. Постановка и решение задачи методом прямого статистического моделирования Монте-Карло. Решение задачи при кинетическом подходе проводилось методом прямого статистического моделирования, подробное описание которого дано в [5]. Здесь отметим только, что в этом методе реальное течение потока разреженного газа моделируется движением ансамбля частиц в некоторой расчетной области. Расчетная область разбивается на ячейки, размер которых должен быть меньше местной длины свободного пробега частиц. В начальный момент времени область течения заполняется частицами, поступательные скорости и внутренняя энергия которых определяются по начальной функции распределения, как правило, соответствующей невозмущенному состоянию газа в потоке. Затем последовательно на каждом шаге по времени dt проводятся свободное перемещение частиц и столкновение между ними, причем сталкиваться могут лишь частицы, находящиеся в одной геометрической ячейке. При движении частиц в расчетной области они могут сталкиваться с твердыми поверхностями, а также вылетать за пределы области. Вылетевшие частицы исключаются из дальнейшего рассмотрения, а на каждом временнóм шаге с границ области проводится вбрасывание частиц в соответствии с граничной функцией распределения. Через некоторое число шагов в системе устанавливается квазистационарное состояние, с этого момента производится сбор необходимой информации о полях течения, о потоках импульса и энергии на поверхности и других выходных параметрах.

В данной работе решение проводилось одним из вариантов метода Монте-Карло [19], в котором вероятность столкновения частиц в ячейке за время dt определяется соотношением

$$P = \sigma(g)g dt / W \tag{2.1}$$

где $\sigma(g)$ – полное сечение столкновения, g – относительная скорость пары частиц, W – объем ячейки. Пара столкнувшихся частиц определяется на основе (2.1) перебором всех возможных пар в данной ячейке. Как показала практика (см., например, [20]), этот метод позволяет проводить расчеты с малым числом матриц, вплоть до числа частиц в невозмущенном потоке $N = 1$. Это обстоятельство позволяет уменьшить требования к оперативной памяти ЭВМ и при ограничениях на объем оперативной памяти проводить расчеты с бóльшим числом ячеек, чем в случае $N \gg 1$, а следовательно, при заданной оперативной памяти проводить расчеты при меньших числах Кнудсена.

Проведенные в данной работе методические исследования ($M_\infty = 23$, $T_w/T_0 = 0{,}2$, $\mathrm{Re}_\infty = 1000$) показали, что при изменении N от 1 до 4 результаты расчетов потоков импульса и энергии не зависят от величины N (при одинаковых величинах потоков частиц на поверхность). При проведении систематических расчетов принималось $N = 2$; число ячеек изменялось в пределах $(2{,}24 - 6) \cdot 10^5$, число моделирующих частиц изменялось в пределах $(4{,}7 - 12{,}5) \cdot 10^5$; число ударов частиц о поверхность для большинства случаев составляло величину $N_d \geqslant 2 \cdot 10^5$.

Сечение столкновения определялось на основе модели сфер переменного диаметра [21, 22] для степенного потенциала взаимодействия частиц $U(r) = A/r^s$. Для этой модели зависимость коэффициента вязкости от температуры имеет вид $\mu \sim T^\omega$, $\omega = 0{,}5 + 2/s$, а связь между средней длиной свободного пробега молекул и коэффициентом вязкости описывается соотношением

$$\lambda_s = \frac{16}{5}\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{\sqrt{2\pi RT}}\left(1-\frac{2}{3s}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right)$$

В дальнейшем будет принято $s = 10$; при этом значении s зависимость μ от T хорошо аппроксимирует температурную зависимость коэффициента вязкости азота при $T \geqslant 300$ K. В интервале температур $T = 300 - 20000$ K погрешность аппроксимации справочных данных [23] не превышает 6%.

Одним из основных требований при применении метода Монте-Карло является выполнение условия $h < \lambda_s$, где h – размер ячейки, λ_s – местная средняя длина свободного пробега частиц. Практика применения метода показала, что результаты расчетов не зависят от размеров ячейки при $h < \lambda_s/3$; кроме того, выяснилось [24, 25], что такое жесткое требование необходимо выполнять в направлении наибольших градиентов функции распределения или ее моментов. Поскольку в различных зонах течения величины λ_s могут сильно различаться, то желательно иметь методику, позволяющую в процессе счета "подстраивать" расчетную сетку под местную длину свободного пробега частиц. В данной работе такая "подстройка" проводится на основе расчетов поля плотности (см. также [25, 26]). Действительно, средняя длина свободного пробега частиц для модели сфер переменного диаметра в равновесных условиях $\lambda_s \sim T^{2/s}/n$. Если температура в поле течения $T > T_\infty$ то для оценок можно принять

$$\lambda_s = \lambda_{s\infty} n_\infty / n$$

и использовать это соотношение для определения размеров ячеек. Адаптация размеров ячеек под поле плотности проводилась следующим образом: в начальный момент времени базовый размер ячейки устанавливался равным h (расчеты велись на декартовой сетке) и на текущей итерации определялось поле плотности; на следующей итерации в случае, если плотность газа в ячейке превышает значение n_* (принималось $n_* = 1{,}5\, n_\infty$), то проводится дробление базовой ячейки в направлении той координатной оси, вдоль которой градиент плотности максимален. Если ячейка примыкает к твердой поверхности, то дробление проводится по той координатной оси, вдоль которой максимальна проекция нормали к поверхности. Такое дробление в определенном смысле обеспечивает и адаптацию сетки к обтекаемым поверхностям. Как правило, 2–3 итераций обычно бывает достаточно для получения сходящихся результатов.

Расчеты проводились для газа, имеющего вращательные степени свободы. Обмен энергией между поступательной и вращательной модами описывался моделью Ларсена – Боргнакке [27] с постоянным параметром φ_0, который связян с параметром релаксации $Z_R = \tau_R/\tau_c$ (τ_R – время вращательной релаксации, τ_c – среднее время свободного пробега молекул) соотношением

$$\varphi_0 = 2{,}06 / Z_R \tag{2.2}$$

Для моделирования одноатомного газа параметр φ_0 полагался равным 10^{-4}, что практически означает "замораживание" обмена энергией между поступательными и вращательными степенями свободы. В этом случае число Маха и значение температурного фактора $t_w = T_W/T_0$ определялось для $\gamma = 5/3$. В качестве граничных условий на поверхности принималось диффузное отражение с коэффициентом аккомодации, равным единице.

В процессе расчета определялись параметры газа в поле течения; плотность n, компоненты средней скорости U_i, поступательная T_{tr} и вращательная T_R температуры, а также температуры газа в направлениях координатных осей

$$T_{ii} = m / k\int (\xi_i - U_i)^2 f(\xi) d\xi \tag{2.3}$$

где ξ_i, U_i – компоненты скорости и средней скорости молекул. На поверхности пластины при $y = 0$ вычислялись потоки импульса и энергии

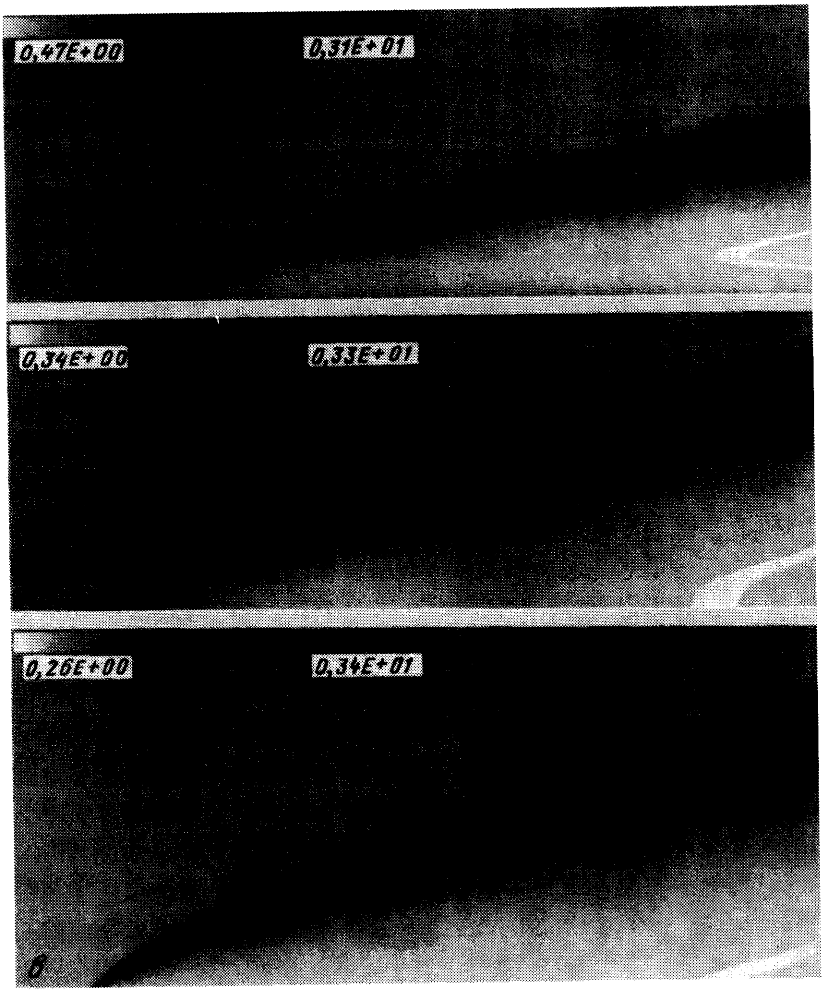
$$P_n = m\int \xi_n \xi_n f(\xi, E_R) d\xi dE_R, \quad P_\tau = m\int \xi_\tau \xi_n f(\xi, E_R) d\xi dE_R$$

$$Q = \int \left(\frac{m\xi^2}{2} + E_R \right) \xi_n f(\xi, E_R) d\xi dE_R$$

и "поверхностные" значения плотности газа, тангенциальной скорости, поступательной и вращательной температур. Здесь E_R – вращательная энергия молекул. Для получения безразмерных коэффициентов нормальной и тангенциальной компонент, действующей на поверхность силы, и теплового потока на поверхности использовались скоростной напор $\rho_\infty U_\infty^2/2$ и $\rho_\infty U_\infty^3/2$ соответственно.

Программа расчета двухмерного обтекания тел методом Монте-Карло разрабатывалась совместно с В.Д. Перминовым.

3. Результаты расчетов и их анализ. Сопоставление результатов численных расчетов, полученных на основе кинетического подхода методом Монте-Карло и на основе уравнений Навье – Стокса, проведем для $Re_\infty = 10^4$, $M_\infty = 23$, $\gamma = 5/3$, $t_w = 0{,}0812 - 1{,}0$, $Kn_\infty = 0{,}00315$. Расчеты выполнены на ЭВМ RS-6000/58H класса рабочей станции. Проведенное сравнение имеет более общий характер, а не только относится к конкретному значению числа Re_∞, в силу свойства "параболичности" решения. Под этим термином понимается то, что результаты расчетов характеристик

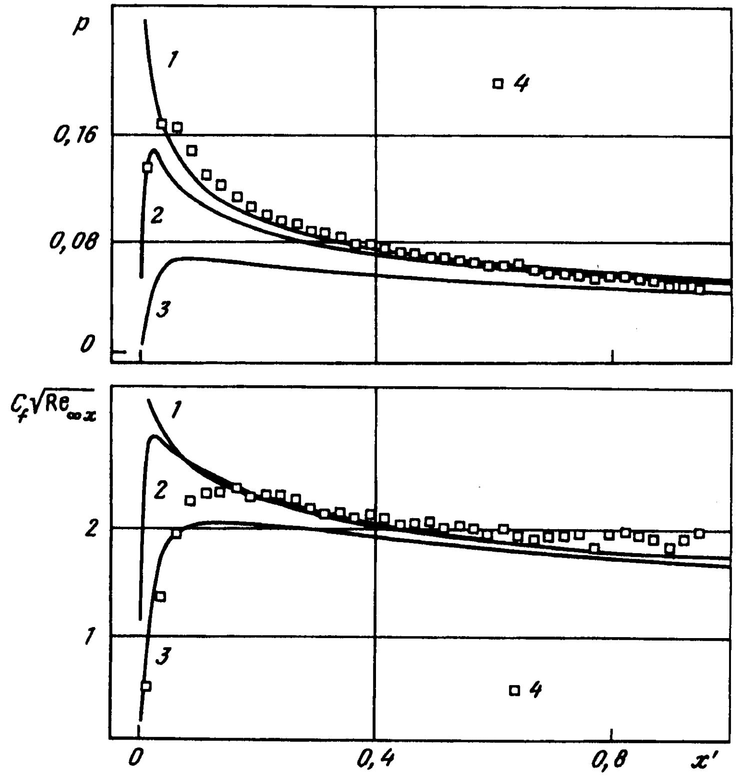


Фиг. 1. Распределение плотности при обтекании пластины *а* – t_w = 0,081, *б* – 0,5, *в* – 1,0

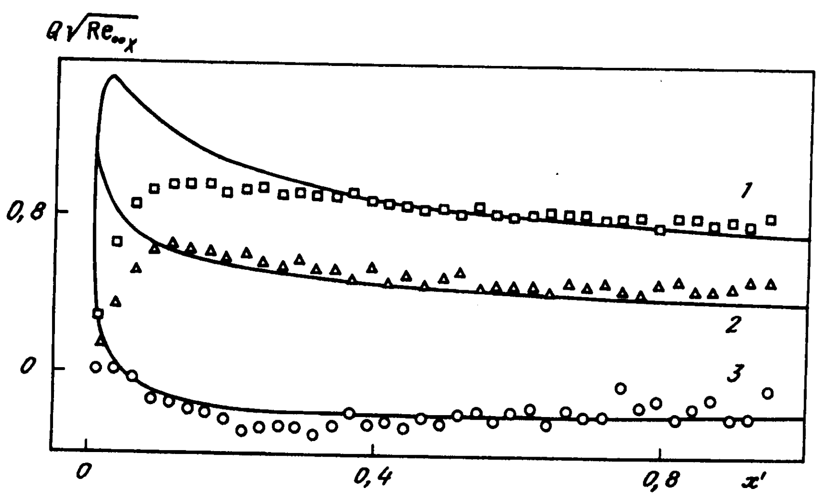
течения для фиксированного значения числа $\mathrm{Re}_{\infty x} = \mathrm{Re}_\infty x/L$ не зависят от длины пластины L, за исключением некоторой зоны вблизи задней кромки. Из анализа результатов расчетов методом Монте-Карло для двух значений числа Re_∞: 4395 и 10^4, следует, что влияние задней кромки простирается на расстояние, примерно равное $0{,}1L$ вверх по потоку. Ранее для меньших значений числа Re_∞ в [10] отмечалась параболичность решения для трения на пластине, но величина давления существенно зависела от размеров пластины.

Для общего представления о структуре течения газа для различных значений температурного фактора на фиг. 1 показаны картины (томограммы) распределения плотности, полученные при решении уравнений Навье – Стокса ($\mathrm{Re}_\infty = 10^4$, $M_\infty = 23$, $\gamma = 5/3$). При этом на поверхности тела использовано граничное условие (1.2) скольжения. Видно, что размер возмущенной области течения увеличивается примерно в 2 раза при увеличении t_w с 0,0812 до 1.

На фиг. 2, 3 приведены результаты расчетов давления p, трения $C_f\sqrt{\mathrm{Re}_{\infty x}}$ и теплового потока $Q\sqrt{\mathrm{Re}_{\infty x}}$ на поверхности пластины, полученные методом Монте-Карло и



Фиг. 2. Давление и трение на поверхности пластины (t_w = 0,2); *1* – уравнения Навье – Стокса с граничными условиями прилипания (1.1), *2* – скольжения (1.2); *3* – скольжения (1.4); *4* – метод Монте-Карло



Фиг. 3. Тепловой поток на поверхности пластины: *1* – t_w = 0,081, *2* – 0,5, *3* – 1. Сплошные кривые – уравнения Навье – Стокса с граничными условиями скольжения (1.2), маркеры – метод Монте-Карло

на основе уравнений Навье – Стокса. Данные фиг. 2 получены для $t_w = 0{,}2$ с граничными условиями прилипания (1.1), скольжения (1.2) и обобщенного скольжения (1.4). Маркерами показаны данные, полученные методом Монте-Карло. Результаты расчетов с использованием уравнений Навье – Стокса, представленные на фиг. 3, получены для граничного условия (1.2) скольжения. На этих и других рисунках по оси абсцисс отложены безразмерные значения линейного параметра, отнесеные к L.

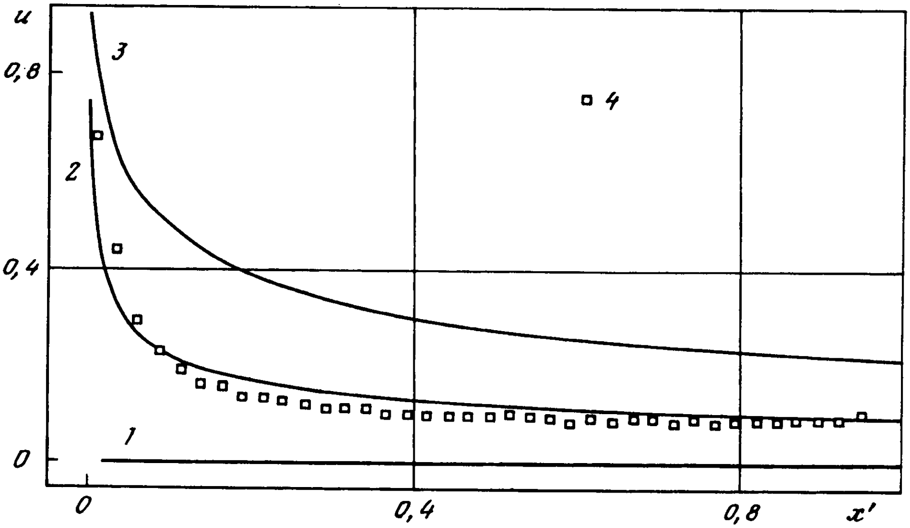
Анализ расчетных данных показывает, что для $t_w \leqslant 0{,}2$ и $x' = x/L \leqslant 0{,}5$ (за исключением окрестности передней кромки) лучшее согласование по распределению давления на поверхности пластины результатов, полученных методом Монте-Карло и на основе уравнений Навье – Стокса, имеет место для граничных условий прилипания. При $x' \geqslant 0{,}5$ расчеты давления p, полученные методом Монте-Карло, хорошо согласуются с результатами, полученными на основе уравнений Навье – Стокса для граничных условий по модели (1.2). Общая тенденция такова, что с увеличением температуры поверхности результаты расчетов методом Монте-Карло лучше согласуются с результатами, полученными с использованием уравнений Навье – Стокса для модели (1.2). Так, при $t_w \geqslant 0{,}5$ такое согласование имеет место при $x' \geqslant 0{,}1$. Одной из причин этого, возможно, является уменьшение градиентов параметров газа вблизи поверхности при росте T_w.

Если в качестве критерия при сопоставлении распределения трения принять различие порядка 10%, то можно отметить хорошее согласование результатов, полученных методом Монте-Карло и на основе уравнений Навье–Стокса, при $x' \geqslant 0{,}1$. Вблизи передней кромки лучшее согласование имеет место для граничных условий (1.4) с обобщенным скольжением. Следует отметить, что при малых значениях температурного фактора результаты, полученные методом Монте-Карло, при $x' \geqslant 0{,}5$ идут выше всех результатов, полученных на основе уравнений Навье – Стокса, а при $t_w \geqslant 0{,}5$ находятся между результатами сплошной среды с граничными условиями (1.1) и (1.2), причем с увеличением температуры поверхности результаты метода Монте-Карло все лучше согласуются с данными уравнений Навье – Стокса для граничных условий (1.2).

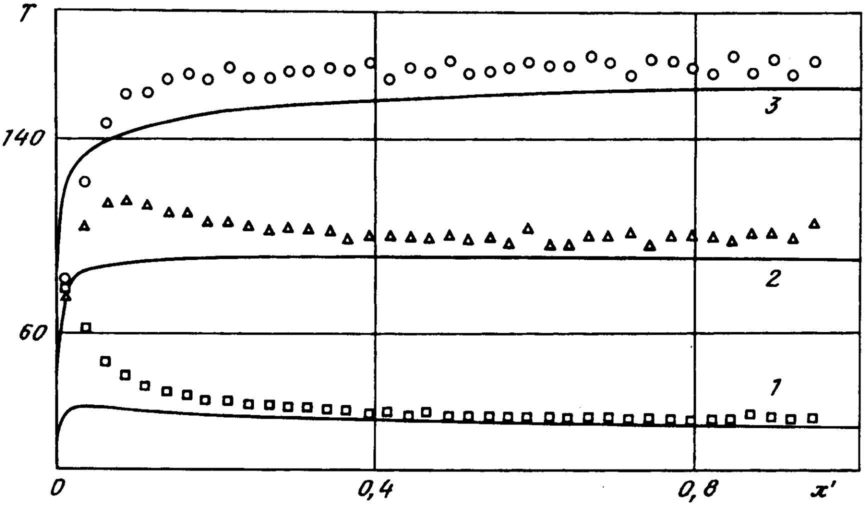
В целом сопоставление результатов по тепловому потоку Q для разных моделей следует тем же тенденциям, что и трение, причем отличия даже меньше, за исключением больших значений температурного фактора $t_w = 0{,}75$ и 1,0, когда тепловые потоки становятся малыми и точность их вычисления методом Монте-Карло падает.

Следующая серия сравнений результатов относится к газодинамическим переменным: скорости и температуре, определенным на поверхности пластины – фиг. 4, 5. Данные фиг. 4 получены для $t_w = 0{,}2$. При этом для уравнений Навье – Стокса (фиг. 5) использовано граничное условие скольжения (1.2).

При сопоставлении температуры и скорости газа на поверхности необходимо иметь в виду, что эти величины определены для уравнений Навье – Стокса как некоторые фиктивные значения на стенке, обеспечивающие совпадение вне кнудсеновского слоя решений уравнений Навье – Стокса с решением уравнения Больцмана с истинными условиями на границе. Эти истинные значения T_w и u получены в данной работе методом Монте-Карло. Таким образом, речь идет о сопоставлении истинных значений параметров газа на поверхности и их фиктивных значений, определяемых из решения сплошносредных уравнений и которые в общем случае могут и не совпадать. Из фиг. 4, 5 следует, что, за исключением зоны течения вблизи передней кромки, температура и скорость газа на поверхности, полученные при решении уравнений Навье – Стокса, не только качественно, но и количественно хорошо согласуются с результатами расчета течения методом Монте-Карло, т.е. с "истинными" значениями параметров газа на поверхности. Наиболее сильное различие имеет место для скорости газа при низких значениях температурного фактора: при $t_w = 0{,}0812$ скорость скольжения превышает истинную скорость газа примерно в 1,5 раза даже при боль-

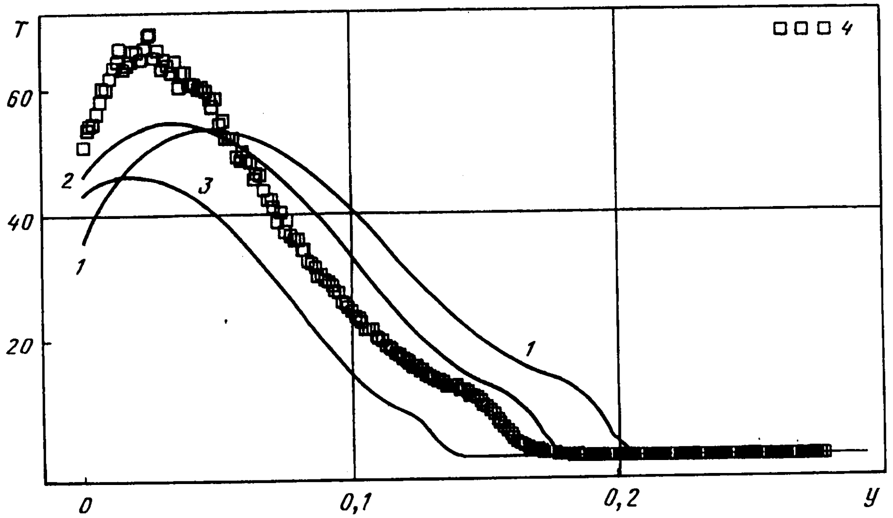


Фиг. 4. Скорость газа на поверхности пластины ($t_w = 0{,}2$): *1* – уравнения Навье – Стокса с граничными условиями прилипания (1.1), *2* – скольжения (1.2); *3* – скольжения (1.4), *4* – метод Монте-Карло

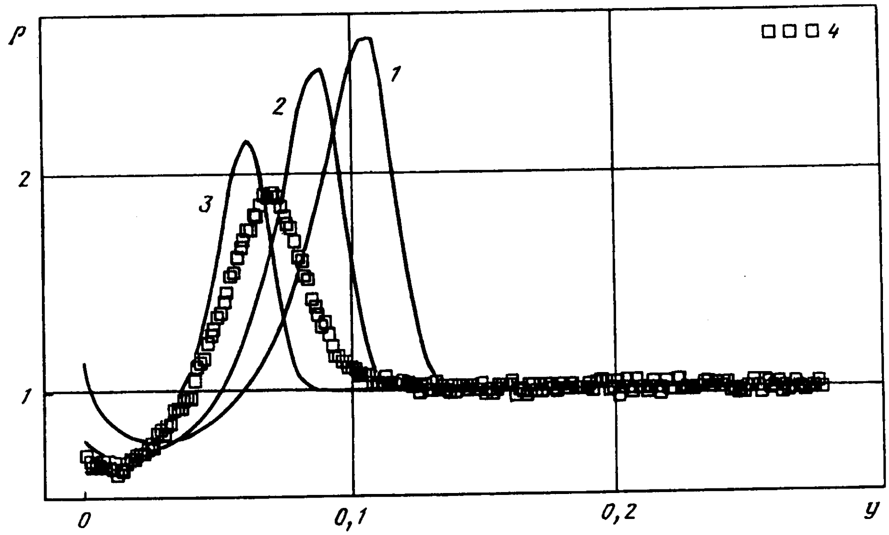


Фиг. 5. Температура газа на поверхности пластины: *1* – $t_w = 0{,}081$, *2* – 0,5, *3* – 1. Сплошные кривые – уравнения Навье – Стокса с граничными условиями скольжения (1.2), маркеры – метод Монте-Карло

ших числах Re_x, т.е. на значительном удалении от передней кромки. Если при $t_w = 0{,}0812$ скорость скольжения превышает скорость газа на всей пластине, то с увеличением t_w картина меняется: $x' > 0{,}2$ скорость газа примерно равна скорости скольжения, а при $x' < 0{,}2$ существенно превышает эту величину. Характер изменения температуры газа вдоль поверхности зависит от величины температурного фактора: при малых значениях t_w температура газа имеет максимум вблизи передней кромки, с ростом t_w величина максимума уменьшается и при $t_w = 1$ температура становится монотонной функцией расстояния от передней кромки. Зависимости $T(x')$, полученные при решении уравнений Навье – Стокса, следуют этой последней тенденции. Что



Фиг. 6. Профили температуры газа для $x' = 0{,}5$; *1* – уравнения Навье – Стокса с граничными условиями прилипания (1.1), *2* – скольжения (1.2), *3* – скольжения (1.4), *4* – метод Монте-Карло



Фиг. 7. Профили плотности газа для $x' = 0{,}25$, *1* – уравнения Навье – Стокса с граничными условиями прилипания (1.1), *2* – скольжения (1.2), *3* – скольжения (1.4), *4* – метод Монте-Карло

касается плотности, то расчеты методом Монте-Карло и по уравнениям Навье – Стокса показывают немонотонный характер изменения ρ вдоль поверхности, причем при $x' > 0{,}1$ результаты расчетов для двух моделей среды хорошо согласуются между собой.

Обратимся к сопоставлению результатов расчета полей течения. Результаты расчета температуры T для $x' = 0{,}5$ приведены на графиках фиг. 6 ($t_w = 0{,}2$). На графиках фиг. 7 представлены профили плотности $\rho = n(y)/n_\infty$ для $x' = 0{,}25$. Анализ расчетных данных показывает, что при $M_\infty = 23$ вблизи передней кромки "скачок" для данных метода Монте-Карло более размыт, а его величина (амплитуда) и положение примерно соответствуют "скачку", полученному на основе уравнений Навье – Стокса, для граничных условий скольжения (1.4). По мере удаления от передней кромки толщина и амплитуда "скачка" для метода Монте-Карло приближается к "скачку" для модели сплошной среды, а положение максимума смещается к положению "скачка" с граничными условиями (1.2).

Результаты расчета поступательной температуры в поле течения показывают наиболее сильные различия для разных моделей газа вблизи поверхности пластины, что соответствует приведенным выше данным на самой поверхности. По мере отхода от поверхности результаты метода Монте-Карло приближаются к результатам сплошной среды и располагаются между теми из них, которые получены с граничными условиями (1.2) и (1.4). С увеличением температуры поверхности различие результатов, полученных методом Монте-Карло и на основе уравнений Навье – Стокса, вблизи стенки уменьшается.

В отличие от других характеристик профили компоненты скорости u, полученные в расчетах для метода Монте-Карло, лучше всего согласуются с результатами решения уравнений Навье – Стокса для граничных условий обобщенного скольжения (1.4). Что же касается профиля скорости v, то тенденции его изменения в зависимости от параметров задачи и моделей газа качественно согласуются с описанным выше анализом для профиля плотности.

Если принять в качестве критерия 10%-ное различие в результатах расчета силовых характеристик и теплового потока на поверхность, то можно сказать, что согласование кинетической и сплошносредной моделей газа начинается при $x / L \cong 0{,}1$ ($M_\infty = 23$). Это соответствует локальным числам $\mathrm{Re}_{\infty x} \cong 1000$ или $\mathrm{Kn}_{\infty x} = 0{,}03$. Приведем также "граничное" значение критерия подобия Re_{0x}, поскольку применение этого критерия позволяет скоррелировать результаты для разных моделей взаимодействия между молекулами [10, 20]. Для $M_\infty = 23$ $\mathrm{Re}_{0x} = 30$. Эти значения отличаются от полученных ранее [10] оценок, а именно $\mathrm{Re}_{0x} \geqslant 10$, но в этой работе оценка носила качественный характер без привлечения количественного критерия. Приведенные оценки для $\mathrm{Re}_{\infty x}$ согласуются с данными, полученными в [15].

Заключение. Результаты настоящей работы показывают, что в задаче имеются области течения вблизи поверхности и в зоне ударной волны, где состояние газа существенно неравновесно и где применение уравнений Навье – Стокса, строго говоря, необосновано. Это находит свое отражение в различиях полей течения, полученных методом Монте-Карло и на основе уравений Навье – Стокса. С другой стороны, в областях течения, где градиенты переменных невелики, имеется хорошее согласование результатов для различных моделей описания течения газа. Если же говорить о воздействии потока на пластину, то здесь положение таково: результаты метода Монте-Карло и уравнений Навье – Стокса хорошо согласуются между собой на большей части пластины, за исключением области вблизи передней кромки. В этой связи, по-видимому, следует говорить о различных подходах к определению границ применимости уравнений Навье – Стокса в зависимости от того, анализируются ли детальные характеристики течения в различных областях или речь идет о вычислении некоторых интегральных характеристик воздействия потока на обтекаемое тело.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bird G.A.* Low density aerothermodynamics // AIAA Paper. 1985. № 994. 9 p.
2. *Ivanov M.S.* Rarefied CFD for reentry problems // Proc. 5th. ISCFD. Sendai, 1993. V. 2. P. 376–384.
3. *Mundt C., Monnoyer F., Hold R.* Computational simulation of aerothermodynamic characteristics for the reentry of HERMES // AIAA Paper. 1993. № 93-5069. P. 1–11.
4. *Yamamoto Y.* Nurecal simulation of real gas effects and aerodynamic heating of hypersonic space transportation vehicles // Comput. Methods in Appl. Sci. 1992. P. 137–149.

5. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
6. *Егоров И.В., Зайцев О.Л.* Об одном подходе к численному решению двумерных уравнений Навье – Стокса методом сквозного счета // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 2. С. 286–299.
7. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
8. *Кузнецов М.М., Никольский В.С.* Кинетический анализ гиперзвуковых вязких течений многоатомного газа в тонком трехмерном ударном слое // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 3. С. 38–49.
9. *Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K.* A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // AIAA Paper. 1991. № 783.
10. *Гусев В.Н., Ерофеев А.И., Климова Е.В. и др.* Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1855. 43 с.
11. *Ботин А.В., Егоров И.В., Николаев К.В.* Сравнение сплошносредных и кинетических методов расчета гиперзвукового обтекания затупленного тела в промежуточном режиме // Тр. 10-й Юбилейной науч.-техн. конф. по аэродинамике больших скоростей. Жуковский. 1990. С. 270–274.
12. *Lengrand J.C.* Using experimental results to validate numerical solutions of rarefied flow problems // AIAA Paper. 1994. № 2632. 9 p.
13. *Pullin D.I., Harvey J.K.* A numtrical simulation of the rarefied hypersonic flat-plate problem // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. P. 4. P. 689–707.
14. *Nagamatsu H.T., Messitt D.G., Myrabo L.N., Sheer R.E.* Computational, theoretical, and experimental investigation of flow over a sharp flat plate, $M_1 = 10–25$ // AIAA Paper. 1994. № 2350. 14 p.
15. *Gokcen T., MacCormack R.W., Chapman D.R.* Computatioal fluid dynamics near the continuum limit // AIAA 8th Comput. Fluid Dyn. Conf. Honolulu, Haw, 1987. P. 153–158.
16. *Roe P.L.* Approximate Reimann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. № 2. P. 357–372.
17. *Каримов Т.Х.* О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 5. С. 1038–1042.
18. *Yegorov I.V., Zaitsev O.L.* Development of efficient algorithms for computational fluid dynamic problems // Proc. 5th ISCFD. Sendai, 1993. V. 3. P. 393–400.
19. *Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е.* Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 5. С. 1195–1208; № 6. С. 1553–1567.
20. *Белоцерковский О.М., Ерофеев А.И., Яницкий В.Е.* О нестационарном методе прямого статистического моделирования течений разреженного газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 5. С. 1174–1204.
21. *Ерофеев А.И.* О моделировании межмолекулярного взаимодействия при решении уравнения Больцмана методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 6. С. 171–175.
22. *Bird G.A.* Monte-Carlo simulation in an engineering context // Progr. in Astronaut. and Aeronaut. V. 74. Rar. Gas Dynam. N. Y.: AIAA. 1981. Pt 1. P. 239–255.
23. *Гордеев О.А., Калинин А.П., Комов А.П. и др.* Потенциалы вазимодействия, упругие сечения, интегралы столкновений компонентов воздуха для температур до 20000 K (Методы определения. Рекомендуемые данные) // Обзоры по теплофизическим свойствам веществ. М.: Ин-т высоких температур АН СССР, 1985. № 5/55. 99 с.
24. *Николаев К.В.* Аэродинамические и тепловые характеристики обтекания затупленных тел разреженным газом: Канд. дис. М.: МФТИ, 1990. 190 с.
25. *Taylor J.C., Moss J.N., Hassan H.A.* Study of hypersonic flow past charp cones // AIAA Paper. 1989. № 1713. 9 p.
26. *Olynic D.P., Hassan H.A., Moss J.N.* Grid generation and adaptation for direct simulation Monte Carlo method // AIAA Paper. 1988. № 2734. 10 p.
27. *Larsen P.S., Borgnakke C.* Statistical collision model for simulating polyatomic gas with restricted energy exchange // Proc. 9th Intern. Symp. on Rar. Gas Dynam. Potz-Wahn, 1974. V. 1. P. A7/1–A7/9.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1995