

УДК 533.6.011.5:532.517.4

© 1997 г. В.Т. КАЛУГИН

ЭНТРОПИЙНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Предложен вариационный метод расчета двумерных сверхзвуковых турбулентных отрывных течений, основанный на использовании принципа Пригожина (минимума производства энтропии), соотношениях термодинамики необратимых процессов и интегральном уравнении энергии для вязкого газа. Применение этого метода проиллюстрировано на примере расчета параметров отрывных течений с фиксированной точкой отрыва. Внешнее течение в невязкой области рассчитывалось известными методами.

Отрыв потока от обтекаемой поверхности – одно из характерных явлений, сопровождающих движение вязкой жидкости (газа). При отрыве происходит перераспределение давления по поверхности летательного аппарата, вследствие чего изменяются интегральные аэродинамические характеристики. Сложность и многообразие встречающихся в практике отрывных течений требуют детального изучения структур потоков, исследования отдельных их элементов (отрыв, смешение, присоединение, возвратное течение).

Согласно классификации, проведенной в [1–3], к настоящему времени сформировались три основных направления в расчетах отрывных течений: создание струйных и вихревых моделей невязкой жидкости; численные исследования путем решения уравнений Навье – Стокса или Рейнольдса; интегральные, асимптотические и вариационные методы расчета ламинарных и турбулентных течений.

Расчеты по вихревой модели невязкой жидкости в основном применимы при изучении дозвуковых отрывных течений и дают приемлемые результаты по структурам течений, а также по стационарным и нестационарным характеристикам [4].

Численные исследования базируются на решении уравнений Навье – Стокса и достаточно надежно описывают течения при ламинарном отрыве потока. При турбулентном режиме не удастся надежно рассчитать отрывные течения.

В аэродинамике отрывных течений получили развитие асимптотические методы [5], позволяющие определить параметры газа при ламинарном отрыве в случае больших чисел Рейнольдса. В уравнениях Навье – Стокса вводится малый параметр, по которому отыскиваемые решения разлагаются в ряд с последующим «сращиванием» их в соответствующих областях потока.

К наиболее распространенным относятся интегральные методы расчета параметров отрывных течений, которые учитывают взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком, проявляющееся в слое смешения двух потоков [6].

Ниже рассматривается вариационный (энтропийный) метод расчета параметров двумерных установившихся отрывных течений, возникающих в потоке газа при внешнем турбулентном сверхзвуковом обтекании элементов конструкций летательных аппаратов.

Отрывное течение представляется совокупностью подобластей при сопряженных краевых условиях. При этом внешний невязкий поток описывается известными аналитическими, интегральными или численными методами. Благодаря такому подходу удастся достаточно просто рассчитать отрывное течение, проследить влияние

граничных условий на параметры потока и дать наглядную физическую интерпретацию результатов.

1. В основу расчетов параметров отрывных течений положен принцип наименьшего действия, согласно которому процессы, изменяющие состояние системы, протекают так, что функционал, называемый действием, имеет наименьшее возможное значение [7].

Физический смысл принципа наименьшего действия состоит в том, что процесс осуществляется всегда так, чтобы изменения действия были минимальны. Частными случаями этого принципа являются принципы Онзагера и Пригожина.

Согласно Онзагеру [8], при стационарных процессах в открытых системах диссипация энергии минимальна

$$\Phi = \int \varphi_i dW = \min$$

где φ_i – диссипативная функция, W – объем.

Аналогичный вывод был сформулирован Пригожиным в виде принципа минимума производства энтропии [9]: стационарное слабонерасовнованное состояние системы, в которой происходит необратимый процесс, характеризуется тем, что скорость возникновения энтропии имеет минимальное значение при данных внешних условиях, препятствующих достижению системой равновесного состояния

$$P_{\Sigma}^* = \sum_{i=1}^n P_i^* = \min \quad (1.1)$$

где P_i^* – удельное производство энтропии.

Известно, что при движении вязкого газа из-за трения в потоке имеет место диссипация энергии. Ввиду этого часть механической энергии необратимо переходит во внутреннюю [10], т.е. возрастает энтропия. Такой же процесс происходит и при торможении потока в областях отрыва и присоединения [11], где образуются скачки уплотнения.

Рассматривая выделенный элемент течения (например, отрывное), можно записать, что полное удельное производство энтропии равно

$$P_{\Sigma}^* = \sum_{j=1}^m \frac{\Delta D_j^*}{T_j} + \sum_{k=1}^l \Delta S_k^* \quad (1.2)$$

где ΔD_j^* – удельная диссипация энергии; ΔS_k^* – приращение удельной энтропии в единицу времени; T_j – температура.

Каждое слагаемое в уравнении (1.2) представляет производство энтропии в соответствующей области течения.

Условие (1.1) может быть использовано в качестве замыкающего при расчете отрывных течений.

Как было отмечено ранее, диссипация энергии обусловлена наличием трения в газе, которое главным образом проявляется в областях пограничного слоя перед отрывом потока и смешения. Для плоских и осесимметричных адиабатических сжимаемых стационарных течений величина потери механической энергии из-за трения может быть определена в соответствии с интегральным соотношением В.В. Голубева [4]

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u (u^{t+1} - u_{\delta}^{t+1}) y^j dy = -(t+1) \frac{dp}{dx} \int_0^{\delta} u^t y^j dy + \quad (1.3)$$

$$+(t+1) \left[\int_0^{\delta} u^t \frac{\partial}{\partial y} (\tau y^j) dy - u_{\delta}^t \frac{du_{\delta}}{dx} \int_0^{\delta} \rho u y^i dy \right]$$

где $j = 0$ или 1 в плоском или осесимметричном случаях; x, y – абсцисса и ордината прямоугольной системы координат; ρ – плотность; u – скорость в проекции на ось x ; u_δ – скорость на внешней границе пограничного слоя или слоя смешения; p – давление; τ – напряжение трения; δ – толщина пограничного слоя; $t = 0, 1, \dots$ – параметр.

При $t = 1$ соотношение (1.3) представляет интегральное уравнение энергии

$$\frac{dD}{dx} = \frac{dp}{dx} \int_0^\delta u y^j dy - \left[\int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial y} (\tau y^j) dy - u_\delta \frac{du_\delta}{dx} \int_0^\delta \rho u y^j dy \right] \quad (1.4)$$

$$D = 0,5 \int_0^\delta \rho u (u_\delta^2 - u^2) y^j dy$$

Здесь D – величина, характеризующая часть механической энергии, теряемой из-за вязкости.

Из уравнения Бернулли следует $dp/dx = -\rho_\delta u_\delta du_\delta/dx$, тогда получаем

$$\frac{dD}{dx} = u_\delta \frac{du_\delta}{dx} \int_0^\delta \rho u y^j dy - \rho_\delta u_\delta \frac{du_\delta}{dx} \int_0^\delta u y^j dy - \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial y} (\tau y^j) dy \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) упрощается, если рассматривается безградиентное течение (например, область смешения, для которой $du_\delta/dx \approx 0$)

$$\frac{dD}{dx} = - \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial y} (\tau y^j) dy \quad (1.6)$$

Интегрируя уравнение (1.6), получим

$$\Delta D = \int_0^x dD = \int_0^x \left[- \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial y} (\tau y^j) dy \right] dx \quad (1.7)$$

Для струйных течений можно положить, что при $y = 0$ и $y = \delta$ величина напряжения трения $\tau \approx 0$. Это позволяет упростить правую часть уравнения (1.7), т.е.

$$\Delta D = \int_0^x \left[\int_0^\delta \tau y^j - \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] dx \quad (1.8)$$

Уравнения (1.7) или (1.8) позволяют вычислить диссипативные слагаемые соотношения (1.2).

Процессы за ударными волнами (скачками уплотнения), которые существуют при отрыве и присоединении, характеризуются тем, что часть кинетической энергии движущегося газа практически мгновенно переходит во внутреннюю энергию газа. В этом случае для элементарного процесса без теплообмена с окружающей средой, происходящего в совершенном газе, изменение энтропии определяется уравнением

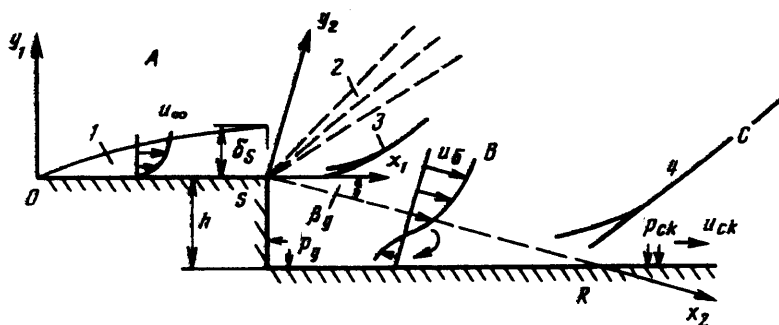
$$dS^* = C_p dT/T - R dp/p$$

где S^* – энтропия на единицу массы в единицу времени; T – температура; R – газовая постоянная; C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Интегрируя это уравнение, получим

$$\Pi^* = \Delta S^* = S_2 - S_1 = [R/(k-1)] \ln[(p_2 \rho_1^k)/(p_1 \rho_2^k)] \quad (1.9)$$

где k – отношение удельных теплоемкостей; индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состоянию системы.



Фиг. 1. Схема отрывного течения

2. Рассмотрим реализацию предложенного подхода применительно к расчету наиболее часто встречающихся двумерных отрывных течений, например с фиксированной точкой отрыва (фиг. 1). При обтекании поверхности OS образуется пограничный слой толщиной δ_1 . Вблизи угловой точки течение характеризуется большим местным расширением. Эксперименты показывают, что отрыв пограничного слоя l происходит непосредственно за угловой точкой на донном срезе. За счет искривления линий тока за изломом поверхности возникают волны сжатия, формирующие всячий (краевой) скачок уплотнения 3 . Характер течения около угловой точки является более сложным, чем обычное течение Прандтля – Майера. Поток вначале перерасширяется в волне 2 , а затем его давление увеличивается при переходе через краевой скачок уплотнения. Обычно при расчете такого отрыва сложный характер течения вблизи угловой точки не учитывается и считается, что отрыв потока происходит в вершине угла S (точка отрыва фиксированна, см. фиг. 1).

В области присоединения происходит разделение потока: одна его часть попадает в циркуляционную зону, а наиболее высокоэнергетический поток, преодолевая λ -образный скачок уплотнения 4 , движется вниз по течению.

Для вычисления произведения энтропии принята следующая модель. Все поле течения разбивается на отдельные области A, B, C . В областях A и B диссипация энергии происходит за счет вязкого трения в пограничном слое и зоне смешения, в области C – в скачке уплотнения. Полагается, что давление во всей донной области постоянно, скорость возвратного течения мала, а слой смешения на границе невязкого потока и зоны смешения является автомодельным. Не учитывается диссипация энергии, обусловленная вязкостными эффектами, в области присоединения, а также возрастание энтропии в краевом скачке уплотнения.

Общее выражение для произведения энтропии Π_{Σ}^* находится с применением принципа суперпозиции. Первоначально рассмотрим составляющие диссипации энергии в областях отрыва и присоединения потока.

Известно, что в достаточно широком диапазоне скоростей течения газа профили скорости в турбулентных свободных слоях смешения и следах удовлетворительно описываются некоторыми универсальными функциями. Избыточный профиль скорости, например, может представляться в виде

$$u/u_{\delta} = 1 - m f(\eta) \quad (2.1)$$

где $f(\eta)$ – некоторая универсальная функция; $m = (u_{\delta} - u_0)/u_{\delta}$; u_0 – скорость в возвратном течении; $\eta = y/\delta$ – безразмерная координата; δ – толщина струйного слоя смешения.

Как показано в [12], приемлемое согласование с экспериментом дает функция

$$f(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \quad (2.2)$$

Если принимается модель течения, когда возвратный поток отсутствует, то можно воспользоваться универсальной зависимостью для профиля скорости в виде [13]

$$u / u_{\delta} = \varphi(\eta_1) = 1 / 2(1 + \operatorname{erf} \eta_1)$$

$$\operatorname{erf} \eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta_1} e^{-\eta_1^2} d\eta_1; \quad \eta_1 = \sigma(y/x); \quad \sigma = 12 + 2,758 M_{\delta}$$

где σ – параметр смешения; M_{δ} – число Маха на внешней границе области смешения.

Уравнение (1.6) для диссипации энергии в зоне отрывного течения содержит турбулентное касательное напряжение τ , которое может быть определено формулой

$$\tau = \nu_T \frac{du}{dx}$$

Коэффициент турбулентной вязкости ν_T , характеризующий свойства рассматриваемого течения, определяется принятой моделью турбулентности. Эксперименты показывают, что для струйных и отрывных течений приемлема самая простая модель пути смешения Прандтля [12, 14], согласно которой турбулентная вязкость

$$\nu_T = \kappa \delta \rho (u_{\delta} - u_0) \quad (2.3)$$

где κ – свободный параметр (константа турбулентности).

С учетом соотношений (2.1) и (2.3)

$$\tau = -\kappa \rho_{\delta} u_{\delta}^2 m^2 [df(\eta) / d\eta] (\rho / \rho_{\delta})$$

Принимая, что

$$\rho / \rho_{\delta} = (1 - Cr_{\delta}^2)(1 - Cr_{\delta}^2[1 - mf(\eta)]^2)^{-1}$$

$$Cr_{\delta} = [1 + 2 / (M_{\delta}^2(k - 1))]^{-0,5}$$

где Cr_{δ} – число Крокко, с учетом (2.2) выражение для напряжения трения

$$\tau = 6\kappa \rho_{\delta} u_{\delta}^2 m^2 \eta (1 - \eta) [1 - Cr_{\delta}^2][1 - Cr_{\delta}^2[1 - mf(\eta)]^2]^{-1} \quad (2.4)$$

Рассмотрим вычисление диссипации энергии для области отрыва, принимая различные модели течения в отрывных зонах.

В простейшем случае будем считать, что профиль скорости при смешении потоков подчиняется закономерностям струйного течения без обратных токов. Для этого положим в формуле (2.1) значение параметра $m = 1$. Тогда диссипация энергии определяется соотношением ($j = 0$ – плоское течение, ось x_2 направлена по свободной границе невязкого потока, см. фиг. 1)

$$\Delta D_2 = 36 \rho_{\delta} u_{\delta}^3 \kappa (1 - Cr_{\delta}^2) \Delta x_2 \int_0^1 \frac{\eta^2 (1 - \eta)^2}{1 - Cr_{\delta}^2 [1 - f(\eta)]^2} d\eta \quad (2.5)$$

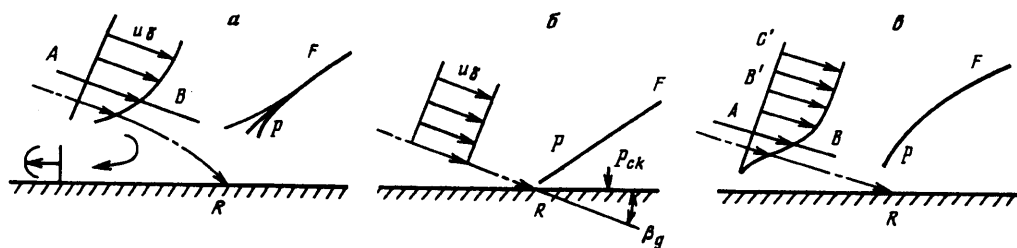
Если для зоны отрыва рассматривается модель с учетом возвратного течения, то вычисление диссипации энергии усложняется. В этом случае следует воспользоваться зависимостью (1.7). Тогда для плоского потока с учетом (2.4) будем иметь

$$\Delta D_2 = - \int_{x_{2S}}^{x_{2R}} u_{\delta} A_1 \int_0^1 (1 - mf) B_1 d\eta dx \quad (2.6)$$

$$A_1 = 6 \rho_{\delta} u_{\delta}^2 \kappa m^2 (1 - Cr_{\delta}^2)$$

$$B_1 = \frac{(1 - 2\eta)[1 - Cr_{\delta}^2(1 - 2mf + m^2 f^2)] - (\eta - \eta^2)[-Cr_{\delta}^2(-2mf' + 2m^2 f f')] }{[1 - Cr_{\delta}^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]^2}$$

где f определяется зависимостью (2.2), а $f' = \partial f(\eta) / \partial \eta$.



Фиг. 2. Течение в области присоединения

Оценить влияние параметра m на величину диссипации энергии возможно, если предположить, что скорость на оси (в возвратном течении) изэнтропически увеличивается от нулевого значения в области присоединения до своего максимального значения, которое рассчитывается по известному перепаду давления $\Delta p = p_R - p_g$. Если используется модель "односкачкового" присоединения, то

$$u_0 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_{ck}}{\rho_{ck}} \left[1 - \left(\frac{p_g}{p_{ck}} \right)^{(k-1)/k} \right]} \cos \beta_g$$

где p_{ck} , p_g , ρ_{ck} , ρ_g — давление и плотность в областях присоединения и смешения.

Принимая, что изменение параметра m вдоль координаты x_2 в области отрывного течения соответствует уравнению эллипса, можно получить

$$m = 1 + \frac{1}{M_8} \sqrt{\frac{2}{k-1} \frac{p_{ck}}{p_g} \frac{\rho_g}{\rho_{ck}} \left[1 - \left(\frac{p_g}{p_{ck}} \right)^{(k-1)/k} \right] [1 - (x_2^* - 1)^2]} \cos \beta_g \quad (2.7)$$

где $x_2^* = x_2 / [(x_{2S} - x_{2R})/2]$.

Уравнения (2.5) и (2.6) позволяют вычислить производство энтропии для области отрывного течения. Например, при $m = 1$ из (2.5) имеем

$$P_2 = \frac{\Delta D_2}{T_2} = 72 \rho_g u_g \kappa C_v \text{Cr}_8^2 \Delta x_2 \int_0^1 \frac{\eta^2 (1-\eta)^2}{1 - \text{Cr}_8^2 (1-f)^2} d\eta \quad (2.8)$$

где C_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

В принятой модели сверхзвукового отрывного течения присоединение потока происходит через скачок уплотнения. Схематически это показано на фиг. 2,а. Перед областью присоединения профиль скорости неравномерен, что приводит к неодинаковой интенсивности скачка уплотнения PF. Этот скачок расположен выше некоторой звуковой линии тока АВ. Кроме того, если течение осесимметричное, то поток является сходящимся. Все эти факторы несколько усложняют решение задачи по вычислению энтропии. Определение параметров потока для плоского течения в невязкой части осуществляется с применением теории скачков уплотнения или численным методом сквозного счета. При расчете производства энтропии в области присоединения рассматриваются две модели.

Схема течения, соответствующая первой модели, показана на фиг. 2,б. Параметры потока за точкой присоединения в этом случае рассчитываются по величинам на внешней границе области смешения (пренебрегается неравномерностью профиля скорости) и средненному углу разворота потока β_g . Решается следующая система уравнений:

$$\frac{p_{ck}}{p_g} = \frac{2k}{k+1} M_8^2 \sin^2 \theta_c - \frac{k-1}{k+1}$$

$$\frac{\rho_{ck}}{\rho_g} = \frac{(k+1)M_\delta^2 \sin^2 \theta_c}{2 + (k-1)M_\delta^2 \sin^2 \theta_c} \quad (2.9)$$

$$\operatorname{tg} \beta_g = \operatorname{ctg} \theta_c (M_\delta^2 \sin^2 \theta_c - 1) [1 + ((k+1)/2 - \sin^2 \theta_c) M_\delta^2]^{-1}$$

$$\Pi_{3,1}^* = C_v \ln \left[\frac{\rho_{ck}}{\rho_{ck}^k} \frac{\rho_g^k}{\rho_g} \right]$$

где θ_c – угол наклона скачка уплотнения.

Для второй модели учитывается неравномерный профиль скорости перед областью присоединения (фиг. 2,б). Производство энтропии рассчитывается по осредненным параметрам потока в области смешения. Текущее осредненное число M поперек струйного слоя определяется как

$$M_{cp} = \int_{\eta_M}^1 \frac{M d\eta}{1 - \eta_M} = \frac{M_\delta}{1 - \eta_M} J_m$$

$$J_m = \int_{\eta_M}^1 \frac{\varphi d\eta}{[1 + (1 - \varphi^2)(k-1)M_\delta^2/2]^{0.5}}$$

где $\varphi = 1 - f(\eta)$, η_M – безразмерная координата, соответствующая звуковой линии тока.

С учетом участка потока $B'C'$, соответствующего невязкой области

$$M_{cp} = \frac{M_\delta}{\eta_c - \eta_M} [J_m + \eta_c - 1]$$

где η_c – безразмерная координата граничной точки C' .

Безразмерная координата звуковой линии тока η_M вычисляется из уравнения

$$\frac{a^*}{u_\delta} = \varphi_{\eta_M} \left(\frac{1}{C_{r_\delta}} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = 3\eta_M^2 - 2\eta_M^3 \right)$$

(a^* – критическая скорость звука).

В качестве характерного размера, ограничивающего область рассматриваемого течения в поперечном направлении, принят $H = h + \delta_s$ (где h – высота обратного уступа, δ_s – толщина пограничного слоя перед точкой отрыва).

Тогда удельное производство энтропии для области присоединения (вторая расчетная модель) определится соотношением

$$\Pi_{3,2}^* = C_v \ln \left(\frac{\rho_{cp}}{\rho_{cp}^k} \frac{\rho_g^k}{\rho_g} \right)$$

в котором ρ_{cp} , p_{cp} – параметры потока за скачком уплотнения, вычисляемые по осредненным величинам.

Для расчета диссипации энергии перед точкой отрыва используются известные результаты теории пограничного слоя [15, 16]. Вычисление скорости поперек пограничного слоя производится по степенной зависимости

$$u / u_\infty = (y / \delta_1)^{1/n} \quad (2.10)$$

Величина показателя n слабо зависит от числа Рейнольдса. При $Re_x = 10^6 - 10^8$ можно принять $n = 7$. Результаты экспериментальных исследований профиля скорости показали [15], что число M и температурный фактор $T_f = T_w/T_0$ (где T_0 , T_w – температуры торможения и стенки) оказывают малое влияние на форму распределения скоростей.

Изменение напряжения трения поперек пограничного слоя, согласно данным работы [16], может быть представлено зависимостью

$$\tau / \tau_w = 1 - 3(y / \delta_1)^2 + 2(y / \delta_1)^3 \quad (2.11)$$

Здесь τ_w – напряжение трения на обтекаемой поверхности ($y = 0$).

Величина трения τ_w может быть найдена известным методом с использованием многослойной модели течения в пограничном слое: ламинарный (вязкий) подслой, переходная область и т.д. Для течения вблизи стенки, согласно результатам [15], получена зависимость

$$\tau_w = \frac{0,0226 \rho_\infty u_\infty^2}{\text{Re}_\delta^{0,25}} Q(k, M_\infty) P(T_f) \quad (2.12)$$

где ρ_∞ , u_∞ , M_∞ – плотность, скорость, число M на внешней границе пограничного слоя в невозмущенном (перед точкой отрыва) потоке

$$Q(k, M_\infty) = \frac{[1 + 0,5(k-1) \cdot M_\infty^2]^{0,75}}{[1 + 0,375(k-1)M_\infty^2]^{1,31}}; \quad P(T_f) = T_f^{0,75} \left(\frac{2}{1 + T_f} \right)^{1,31}$$

Здесь Re_δ число Рейнольдса, подсчитанное по толщине пограничного слоя.

С использованием зависимостей (2.10)–(2.12) вычисляется диссипация энергии в пограничном слое перед точкой отрыва

$$\Delta D_1 = - \int_0^{x_{1S}} \left[\int_0^{\delta_S} u \frac{\partial \tau}{\partial y_1} dy_1 \right] dx_1 = \int_0^{x_{1S}} A_2 \frac{dx_1}{\text{Re}_\delta^{0,25}} \quad (2.13)$$

где $A_2 = 0,01618 \rho_\infty u_\infty^3 Q(k, M_\infty) P(T_f)$.

С учетом поправки на сжимаемость в пограничном слое соотношение (2.13) преобразуется к виду

$$\Delta D_1 = 1,25 \frac{A_2}{B_2^{1,25}} \delta_S$$

где $B_2 = 0,37(1 + 0,12M_\infty^2)^{0,35}$.

Тогда производство энтропии будет определяться зависимостями

$$\Pi_1 = \frac{\Delta D_1}{T_\infty} = A_3 \delta_S \rho_\infty u_\infty$$

$$A_3 = \frac{0,0202}{B_2^{1,25}} (k-1) k C_v M_\infty^2 Q(k, M_\infty) P(T_f) \quad (2.14)$$

где T_∞ – температура в невозмущенном потоке перед точкой отрыва.

Следует отметить, что в расчетах параметров отрывных течений удобнее использовать удельное производство энтропии. Например, для плоского течения в качестве характерного массового расхода принимается

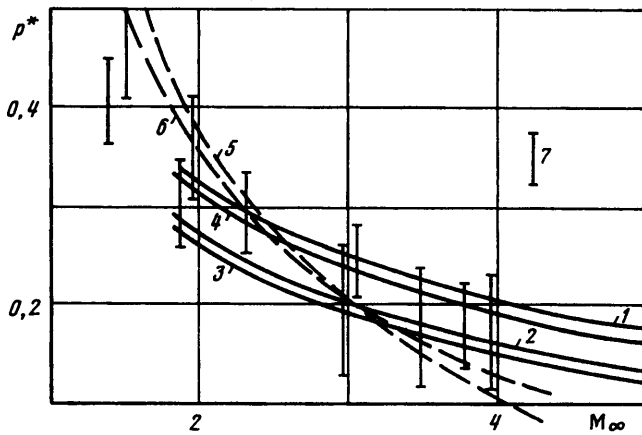
$$\dot{m} = \rho_{ck} u_{ck} H$$

$$u_{ck} = u_\delta \cos \theta_c / (\cos(\theta_c - \beta_g))$$

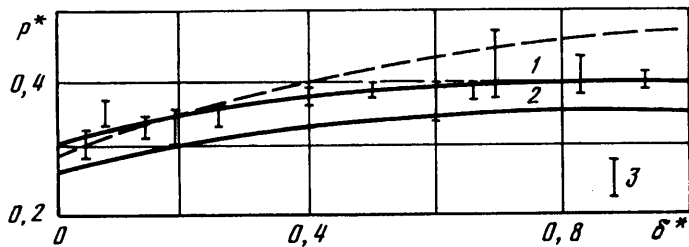
где ρ_{ck} – вычисляется из (2.9).

В соответствии с указанным зависимостями (2.14), (2.8) преобразуются к виду

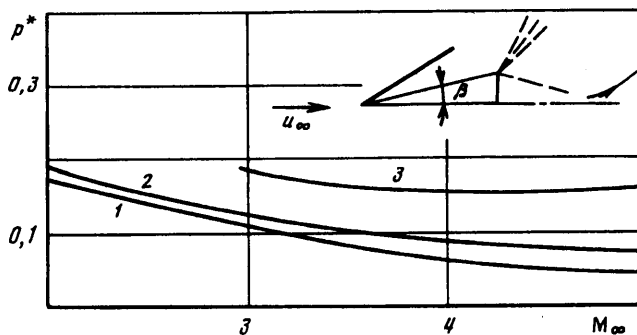
$$\Pi_1^* = \frac{\Pi_1}{\dot{m}} = \frac{A_3 (\delta_S / h)}{[1 + (\delta_S / h)]} \frac{(1 - \text{Cr}_\infty^2)^{1/(k-1)}}{(1 - \text{Cr}_\delta^2)^{1/(k-1)}} \frac{\text{Cr}_\infty}{\text{Cr}_\delta} F(k, M_\delta, \theta_c)$$



Фиг. 3. Зависимость p^* от числа M_∞



Фиг. 4. Влияние толщины пограничного слоя на донное давление



Фиг. 5. Влияние угла клина β на донное давление:
1 - $\beta = 5^\circ$, 2 - 10° , 3 - 30°

$$P_2^* = 72 \kappa C_v Cr_\delta^2 \frac{F(k, M_\delta, \theta_c)}{\sin \beta_g [1 + (\delta_s / h)]_0} \int_0^1 \frac{\eta^2 (1 - \eta)^2}{1 - Cr_\delta^2 [1 - f(\eta)]^2} d\eta$$

$$F(k, M_\delta, \theta_c) = \frac{\cos(\theta_c - \beta_g) [1 + 0,5(k - 1)M_\delta^2 \sin^2 \theta_c]}{\cos \theta_c [0,5(k + 1)M_\delta^2 \sin^2 \theta_c]}$$

Таким образом, решение задачи об определении давления в отрывной зоне сводится к расчету параметров течения невязкого потока при условии минимума полной диссипации энергии в вязком течении и скачках уплотнения.

Расчет параметров течения невязкого потока возможно вести методом характеристик или с использованием численного метода сквозного счета. Система уравнений, описывающих плоское отрывное течение за обратным уступом, запишется в виде (в качестве исходных данных принимаются параметры невозмущенного потока)

$$\beta_g = \omega(M_\delta, k) - \omega(M_\infty, k); \quad \frac{p_\infty}{p_g} = \frac{[1 + 0,5(k-1)M_\delta^2]^{k/(k-1)}}{[1 + 0,5(k-1)M_\infty^2]^{k/(k-1)}} \quad (2.15)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (M_i^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M_i^2 - 1}$$

$$\Pi_1^* + \Pi_2^* + \Pi_3^* = \min$$

где i равен соответственно δ и ∞ .

Уравнения (2.15) решаются при задании константы турбулентности κ , которую можно определить на основе единичного эксперимента.

3. По предложенному алгоритму были проведены расчеты на ЭВМ с целью сравнения полученных результатов для различных модификаций метода и с имеющимися экспериментальными данными.

В качестве иллюстрации на фиг. 3 представлены расчетные зависимости относительного донного давления $p^* = p_g/p_\infty$ за плоским уступом от числа M_∞ внешнего потока ($\delta_1 = 0$), полученные энтропийным методом при $m = 1$ – кривые 1 ($\kappa = 0,02$), 2 (0,04), 3 (0,05) и переменных значениях m – кривая 4 ($\kappa = 0,02$) с использованием второй из рассмотренных моделей течения в области присоединения. Здесь же приведены результаты экспериментов 7, систематизированные в [4], и данные других расчетных методов. Кривая 5 соответствует методу разделяющей линии тока, кривая 6 – интегральному методу, разработанному Л.В. Гогишем и Г.Ю. Степановым [1].

Влияние относительной толщины пограничного слоя $\delta^* = \delta_g/h$ на величину донного давления p^* при $M_\infty = 2$ показано на фиг. 4. Расчетные кривые 1 ($\kappa = 0,03$), 2 (0,04) относятся к энтропийному методу, штриховая линия – к интегральному методу, 3 соответствуют экспериментальным данным. Результаты параметрических исследований обтекания тела в виде клина показаны на фиг. 5. Как и следовало ожидать, донное давление за тонким симметрично обтекаемым клином практически равно давлению за обратным уступом. С увеличением угла клина β донное давление растет, что подтверждено экспериментальными данными [17].

Заключение. Предложенный энтропийный метод применим при известной физической структуре отрывного течения. Вычислительный алгоритм включает совместное решение задач невязкого обтекания и определения минимальной диссипации энергии в возмущенных областях. Полученные соотношения для производства энтропии в характерных зонах отрывного течения и методология позволяют использовать данный алгоритм для расчета параметров потока не только в области ближнего следа, но и в зонах отрыва при обтекании наклонных преград, при неравномерном набегающем потоке, с учетом массообмена и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 31–47.
2. Швец А.И., Швец И.Т. Газодинамика ближнего следа. Киев: Наук. думка, 1976. 382 с.
3. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Калугин В.Т. Аэродинамика отрывных течений. М.: Высш. шк., 1988. 351 с.
4. Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990. 382 с.
5. Нейланд В.Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики. 1981. Т. 4. Вып. 2. С. 3–62.

6. Крокко Л., Лиз Л. Теория смешения для определения взаимодействия диссипативного и почти изэнтропического потоков // Вопросы ракетной техники. 1953. № 2. С. 3–53.
7. Шахпаронов М.И. Неравновесная термодинамика и принцип наименьшего действия // Термодинамика необратимых процессов. М.: Наука, 1987. С. 87–96.
8. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высш. шк., 1976. 447 с.
9. Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: Изд-во МГУ, 1989. 240 с.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
11. Tanner M. Two different theoretical approaches to the base pressure problem in two-dimensional supersonic flow // Aeronaut. Quart. 1978. V. 29. Pt2. P. 114–130.
12. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969. 397 с.
13. Макдональд Г. Исследование турбулентного отрывного течения, возникающего при обтекании вогнутого угла сверхзвуковым потоком // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1966. № 1. С. 50–76.
14. Теория турбулентных струй / Под ред. Г.Н. Абрамовича. М.: Наука, 1984. 715 с.
15. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.
16. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982. 312 с.
17. Бондарев Е.Н., Юделович М.Я. О возможности повышения донного давления за клином при полете с гиперзвуковой скоростью // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 5. С. 186–188.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1995