

УДК 533.6.011.5

© 1997 г. В.И. БОГАТКО, Г.А. КОЛТОН

О ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА

Исследован переходный режим течения газа при скачкообразном изменении ускорения движения тела методом сингулярных возмущений при малых числах Фруда. Показано существенное влияние начальных условий на характер течения газа в ударном слое. Для задачи обтекания клина решение получено в квадратурах.

В работе [1] изучалась задача о нестационарном сверхзвуковом обтекании клина при его поступательном равноускоренном движении в покоящемся газе. Решение строилось в виде рядов по целым положительным степеням малого параметра ϵ , представляющего собой аналог числа Фруда. При таком подходе начальные условия задачи, вообще говоря, не могут быть удовлетворены.

В настоящей работе для решения задачи о нестационарном обтекании тела, движущегося поступательно и прямолинейно с переменной сверхзвуковой скоростью, используется аппарат теории сингулярных возмущений [2, 3]. Особое внимание уделяется исследованию переходного режима течения газа.

1. Пусть тело двигается поступательно и прямолинейно с переменной сверхзвуковой скоростью в покоящемся газе. Перейдем к безразмерным величинам, для чего значения компонент вектора скорости v_i и ускорения w_i отнесем к V_∞ и W_∞ – характерным значениям скорости и ускорения тела ($i = 1, 2, 3$), давление p и плотность ρ – к $\rho_\infty V_\infty^2$ и ρ_∞ (ρ_∞ – плотность покоящегося газа), координаты x_i – к характерному для исследуемой области течения размеру L и время – к V_∞ / W_∞ .

Систему координат связем с телом. Тогда система уравнений, описывающая течение идеального газа, может быть представлена в матричном виде

$$\epsilon \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \sum_{j=1}^3 A^{(j)}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = -\epsilon \mathbf{W}(t) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{U} = (v_1, v_2, v_3, p, \rho)^T, \quad \mathbf{W} = (w_1, w_2, w_3, 0, 0)^T, \quad \epsilon = LW_\infty / V_\infty^2$$

$$A^{(j)} = \{a_{ik}^{(j)}\}, \quad i, k = 1, \dots, 5, \quad j = 1, 2, 3$$

$$a_{ij}^{(j)} = v_j, \quad a_{j4}^{(j)} = 1/\rho, \quad a_{4j}^{(j)} = -\rho c^2, \quad a_{5j}^{(j)} = 0$$

Здесь остальные элементы матриц $A^{(j)}$ равны нулю, c – скорость звука.

Границные условия для (1.1)

условие непротекания на поверхности тела

$$x_3 = y_B(x_1, x_2): \mathbf{I} \cdot \mathbf{U}|_B = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{I} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 0, 0)$$

где $\gamma_i, i = 1, 2, 3$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела;

условия динамической совместности на фронте головной ударной волны (Σ)

$$x_3 = y_s(x_1, x_2); \quad \mathbf{U}|_{\Sigma} = \mathbf{H}(q_1, q_2, q, \mathbf{V}(t)) \quad (1.3)$$

$$q_i = \frac{\partial y_s}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad q = \epsilon \frac{\partial y_s}{\partial t}$$

где \mathbf{H} – известная векторная функция, $\mathbf{V}(t)$ – скорость движения тела.

Начальное условие для уравнения (1.1) представим в виде

$$\mathbf{U}(x_i, 0) = \mathbf{U}^o(x_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

где функция \mathbf{U}^o задает распределение параметров течения в начальный момент времени $t = 0$.

В дальнейшем будем считать, что при $t = 0$ происходит переход от равномерного движения тела со скоростью $\mathbf{V}^o = \mathbf{V}(0)$ к неравномерному. Тогда \mathbf{U}^o – решение стационарной задачи

$$\sum_{j=1}^3 A^{(j)}(\mathbf{U}^o) \frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial x_j} = 0, \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{U}^o|_{\mathcal{B}} = 0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{U}|_{\Sigma^o} = \mathbf{H}(q_1^o, q_2^o, 0, V^o)$$

Здесь и далее градусом обозначаются соответствующие величины при $t = 0$.

2. В большинстве практически интересных случаев параметр $\epsilon \ll 1$. Поэтому положим $\theta = t/\epsilon$ и, следуя [3], будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}^*(x_i, t) + \Pi \mathbf{U}(x_i, \theta), \quad i = 1, 2, 3 \\ y_s(x_i, t) &= y_s^*(x_i, t) + \Pi y_s(x_i, \theta), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \mathbf{U}^* , $\Pi \mathbf{U}$, y_s^* и Πy_s – регулярные функции параметра ϵ

$$U^*(x_i, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k U_k(x_i, t); \quad \Pi U(x_i, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \Pi_k U(x_i, \theta) \quad (2.2)$$

$$y_s^*(x_i, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k y_{sk}(x_i, t); \quad \Pi y_s(x_i, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \Pi_k y_s(x_i, \theta)$$

Первые слагаемые в (2.1) описывают квазистационарное течение газа около обтекаемого тела, вторые представляют собой так называемые "погранслойные" поправки, с помощью которых удовлетворяется начальное условие.

Подставляя асимптотические разложения (2.1) и (2.2) в (1.1)–(1.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , причем отдельно при членах, зависящих от t , и отдельно при членах, зависящих от θ , получим последовательность задач

$$(\epsilon^0): \quad \sum_j A^{(j)}(\mathbf{U}_0) \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x_j} = 0, \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{U}_0|_{\mathcal{B}} = 0,$$

$$\mathbf{U}_0|_{\Sigma_0} = \mathbf{H}(q_{10}, q_{20}, 0, \mathbf{V}(t)),$$

$$\Sigma_0: \quad x_3 = y_{s0}(x_i, t), \quad q_{i0} = \frac{\partial y_{s0}}{\partial x_i};$$

$$(\varepsilon^1): \sum_j A^{(j)}(\mathbf{U}_0) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial A^{(j)}}{\partial U} \mathbf{U}_1 \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x_j} = -\mathbf{W} - \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial t}$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{U}_1 \Big|_{B=0}, \quad \mathbf{U}_1 \Big|_{\Sigma_0} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i}(q_{10}, q_{20}, 0, \mathbf{V}(t)) q_{i1} +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q}(q_{10}, q_{20}, 0, \mathbf{V}(t)) \frac{\partial y_{s0}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x_3} \Big|_{\Sigma_0} y_{s1}, \quad q_{i1} = \frac{\partial y_{s1}}{\partial x_i}$$

$$(\Pi\varepsilon^1): \frac{\partial \Pi_1 \mathbf{U}}{\partial \theta} + \sum_j A^{(j)}(\mathbf{U}_0^\circ) \frac{\partial \Pi_1 \mathbf{U}}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial A^{(j)}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}_0^\circ) \Pi_1 \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x_j}(x_i, 0) = 0$$

$$\mathbf{I} \cdot \Pi_1 \mathbf{U} \Big|_{B=0}, \quad \Pi_1 \mathbf{U} \Big|_{\Sigma_0^\circ} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i}(q_{10}^\circ, q_{20}^\circ, 0, V^\circ) \frac{\partial \Pi_1 y_s}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q}(q_{10}^\circ, q_{20}^\circ, 0, V^\circ) \frac{\partial \Pi_1 y_s}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x_3} \Big|_{\Sigma_0^\circ} \Pi_1 y_s; \text{ и т. д.}$$

Задачи (ε^k) ($k = 0, 1, 2, \dots$) не содержат производных по времени от функций, определяемых в k -том приближении. Поэтому время входит в эти задачи в качестве параметра и постановка для них начальных условий лишена смысла. Начальные условия исходной задачи (1.1)–(1.4) должны быть учтены при решении задач $(\Pi\varepsilon^k)$.

Решение предельной задачи (ε^0) описывает квазистационарное обтекание тела потоком газа, имеющим скорость $\mathbf{V}(t)$. Сравнение задач (ε^0) и (1.5) показывает, что $\mathbf{U}_0(x_i, 0) = \mathbf{U}^\circ(x_i)$, т.е. решение задачи (ε^0) автоматически удовлетворяет начальному условию (1.4). Именно поэтому в разложения для "погранслойных" функций ПИ и Πy_s не было необходимости включать члены нулевого порядка по ε .

Подставив (2.1) и (2.2) в (1.4), найдем начальные условия для задач $(\Pi\varepsilon^k)$

$$\Pi_k \mathbf{U}(x_i, 0) = -\mathbf{U}_k(x_i, 0), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$$\Pi_k y_s(x_j, 0) = -y_{sk}(x_j, 0), \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3$$

Кроме того, дополнительно потребуем, чтобы

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \Pi_k \mathbf{U}(x_i, \theta) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \Pi_k y_s(x_j, \theta) = 0, \quad j = 1, 2; \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Условие (2.4) обеспечивает выход решения на квазистационарный режим, определяемый задачами (ε^k) .

3. Исследуем более подробно плоскую задачу о нестационарном обтекании клина. Начало координат поместим в его вершине, ось $x_1 = x$ направим вдоль поверхности клина, а ось $x_3 \equiv y$ – по нормали к ней. В дальнейшем будем рассматривать только такие режимы движения, при которых головная ударная волна присоединена к вершине клина.

Тогда решение задачи (ε^0) имеет вид

$$\mathbf{U}_0(t) = \mathbf{H}(q_{10}, 0, \mathbf{V}(t))$$

где величина $q_{10} \equiv k_0(t) = dy_{s0}(t)/dx$ определяется из условия непротекания $\mathbf{I} \cdot \mathbf{H}(k_0(t), 0, \mathbf{V}(t)) = 0$, $\mathbf{I} = (0, 1, 0, 0)$. Это решение описывает пространственно однородный поток, параллельный поверхности клина. Поскольку в рассматриваемом случае $\partial \mathbf{U}_0 / \partial x_j \equiv 0$, системы уравнений задач (ε^1) и $(\Pi\varepsilon^1)$ расщепляются и первые три уравнения каждой из систем совместно с соответствующими краевыми и начальными условиями образуют замкнутые задачи для определения поправок первого порядка к компонентам вектора скорости v_x , v_y и давлению.

Задача (ϵ^1) принимает вид

$$A(t) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + B(t) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial y} = - \frac{d \mathbf{U}_0}{dt} - \mathbf{W}(t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{U}_1(x, y = k_0 x, t) = f_1(t) \frac{\partial y_{s1}}{\partial x} + \mathbf{f}_2(t) k'_0 x \quad (3.2)$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{U}_1(x, 0, t) = 0, \quad \mathbf{I} = (0, 1, 0) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{f}_1(t) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_1}(q_{10}, 0, \mathbf{V}(t)), \quad \mathbf{f}_2(t) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q}(q_{10}, 0, \mathbf{V}(t))$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} v_0(t) \\ 0 \\ p_0(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & v_0 & 0 \\ \rho_0 c_0^2 & 0 & v_0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь под \mathbf{H} подразумевается трехкомпонентная векторная функция, задающая зависимость скорости и давления на фронте ударной волны от dy_s/dx , $\varepsilon dy_s/dt$ и $\mathbf{V}(t)$. Нижний индекс ноль по-прежнему относится к решению предельной задачи (ϵ^0).

Решение задачи (3.1)–(3.3) ищем в виде

$$\mathbf{U}_1(x, y, t) = x \mathbf{F}(t, \xi), \quad \xi = y/x$$

Тогда уравнение (3.1) дает

$$A \mathbf{F} + (B - \xi A) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} = - \left(\frac{d \mathbf{U}_0}{dt} + \mathbf{W} \right) \equiv \mathbf{R}(t) \quad (3.4)$$

Дифференцируя (3.4) по ξ , получаем

$$(B - \xi A) \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \xi^2} = 0$$

В силу невырожденности матрицы $(B - \xi A)$ будем иметь

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\alpha}_1(t) + \xi \boldsymbol{\alpha}_2(t) \quad (3.5)$$

Таким образом, \mathbf{F} – линейная функция ξ или, что то же самое, \mathbf{U}_1 – линейная функция декартовых координат x и y .

Подставляя решение (3.5) в граничные условия (3.2), (3.3) и в уравнение (3.4), получаем алгебраическую систему уравнений для определения векторов $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$

$$A \boldsymbol{\alpha}_1 + B \boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{R}, \quad \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{e}_0 \cdot (\boldsymbol{\alpha}_1 + k_0 \boldsymbol{\alpha}_2) = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot (\boldsymbol{\alpha}_1 + k_0 \boldsymbol{\alpha}_2) = k'_0(t)$$

Здесь \mathbf{e}_0 – вектор, ортогональный \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 , а векторы $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1$ и \mathbf{e}_2 образуют базис, взаимный с $\mathbf{e}_0, \mathbf{f}_1$ и \mathbf{f}_2 .

После определения векторов α_1 и α_2 можно найти поправку к форме фронта головной ударной волны

$$y_{s1}(x, t) = \frac{x^2}{2} \mathbf{e}_1 \cdot (\alpha_1 + k_0 \alpha_2)$$

Решение, определяемое соотношениями (3.5) и (3.6), было найдено другим способом в [1].

Задача (Пе¹) для клина принимает вид

$$\frac{\partial \Pi_1 \mathbf{U}}{\partial \theta} + A^\circ \frac{\partial \Pi_1 \mathbf{U}}{\partial x} + B^\circ \frac{\partial \Pi_1 \mathbf{U}}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

$$\Pi_1 \mathbf{U}(x, k_0 x, \theta) = \mathbf{f}_1^\circ \frac{\partial \Pi_1 y_s}{\partial x} + \mathbf{f}_2^\circ \frac{\partial \Pi_1 y_s}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{I} \cdot \Pi_1 \mathbf{U}(x, 0, \theta) = 0, \quad \Pi_1 \mathbf{U}(x, y, 0) = -x \mathbf{F}(0, y/x)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \Pi_1 \mathbf{U} = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \Pi_1 y_s = 0$$

Решение будем искать в виде

$$\Pi_1 \mathbf{U} = x \Phi(\tau, \xi), \quad \Pi_1 y_s = x^2 Y(\tau); \quad \tau = \frac{\theta}{x}, \quad \xi = \frac{y}{x} \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.7), приходим к следующей задаче для функции Φ (значок градуса опускаем):

$$(E - \tau A) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + (B - \xi A) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + A \Phi = 0 \quad (3.9)$$

$$\Phi(\tau, k_0) = (2Y - \tau \dot{Y}) \mathbf{f}_1 + \dot{Y} \mathbf{f}_2 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{I} \cdot \Phi(\tau, 0) = 0 \quad (3.11)$$

$$\Phi(0, \xi) = -\mathbf{F}(0, \xi)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Phi(\tau, \xi) = 0 \quad (3.12)$$

Здесь точками обозначены производные по τ , E – единичная матрица.

Найдем характеристики системы (3.9). Разрывы производных функции Φ на линиях слабого разрыва в силу (3.9) удовлетворяют соотношениям

$$(E - \tau A) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] + (B - \xi A) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (3.13)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] = \mu \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right]$$

где $d\tau/d\xi = -\mu$ – угловой коэффициент наклона характеристики к оси ξ .

Исключая из (3.13) величину $[\partial \Phi / \partial \xi]$, получаем

$$(E + \mu B - (\tau + \mu \xi) A) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (3.14)$$

Для существования нетривиального решения системы (3.14) необходимо и достаточно, чтобы характеристические направления удовлетворяли уравнению

$$\det(E + \mu B - (\tau + \mu \xi)A) = 0 \quad (3.15)$$

Разрешая (3.15) относительно $v = \tau + \mu \xi$, находим

$$\tau + \mu \xi = v_i(\mu), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

$$v_{1,2} = \frac{M_0 \pm \sqrt{1 + c_0^2(M_0^2 - 1)\mu^2}}{c_0(M_0^2 - 1)}$$

$$v_3 = \frac{1}{v_0}, \quad M_0 = \frac{v_0}{c_0}, \quad \mu = -\frac{d\tau}{d\xi}$$

Уравнение (3.16) есть уравнение Клеро, поэтому его интегральными кривыми являются прямые линии

$$\tau = -\mu_i \xi + v_i(\mu_i), \quad i = 1, 2, 3$$

Легко видеть, что все характеристики третьего семейства проходят через точку ($\tau = 1/v_0, \xi = 0$), а характеристики первых двух семейств огибают эллипс

$$[c_0(M_0^2 - 1)\tau - M_0]^2 + (M_0^2 - 1)\xi^2 = 1 \quad (3.17)$$

Таким образом, через каждую точку области течения, лежащую вне эллипса (3.17), проходят три характеристики, а через точку, находящуюся внутри эллипса, проходит одна характеристика третьего семейства. Из (3.14) и (3.13) следует, что разрывы производных на характеристиках удовлетворяют соотношениям

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] = \lambda_i S_i, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] = \lambda_i \mu_i S_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.18)$$

$$S_i = \begin{pmatrix} v_i \\ -\mu_i \\ \rho_0(1 - v_i v_0) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \mu_3 v_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

где λ_i – скаляр.

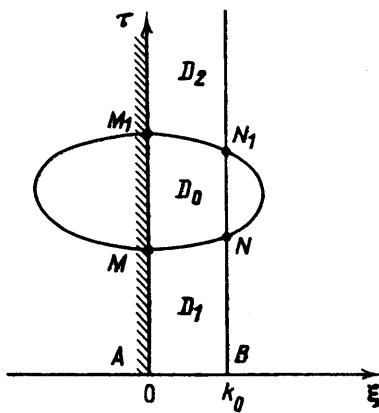
В областях D_1 и D_2 , расположенных (см. фиг. 1) вне эллипса (3.17), решение может быть построено методом характеристик.

Область D_1 , расположенная ниже эллипса, разбивается характеристиками на ряд подобластей, в каждой из которых решение является линейной функцией ξ и τ , а "погранслойная поправка" $Y(\tau)$ к форме фронта ударной волны – кусочно-квадратичная функция. Заметим, что, как следует из (3.18) и (3.19), на характеристиках третьего семейства производные третьей компоненты Φ^3 вектора Φ не терпят разрывов. Поэтому, если ограничиться отысканием лишь "погранслойной поправки" к давлению, то достаточно использовать первые два семейства характеристик, что существенно упрощает вычисления.

В области D_2 , расположенной выше эллипса (3.17), система уравнений (3.9) и условия (3.11) и (3.12) будут удовлетворены, если положить

$$\Phi(\tau, \xi) \equiv 0, \quad (\tau, \xi) \in D_2$$

Перейдем к построению решения в области D_0 . Для этого исключим из системы (3.9) первые две компоненты вектора Φ . После несложных, но громоздких выкладок



Фиг. 1. Характерные области на плоскости переменных τ и ξ

получим для компоненты Φ^3 эллиптическое в D_0 уравнение

$$(1 - \tau'^2)\Phi_{\tau\tau}^3 - 2\xi'\tau'\Phi_{\tau\xi'}^3 + (1 - \xi'^2)\Phi_{\xi'\xi'}^3 = 0 \quad (3.20)$$

$$\tau' = c_0(M_0^2 - 1)\tau - M_0, \quad \xi' = \xi\sqrt{M_0^2 - 1}$$

При этом эллипс (3.17) переходит в единичную окружность $\tau'^2 + \xi'^2 = 1$. Запишем краевые условия для уравнения (3.20). На дугах MN и M_1N_1 в силу непрерывности Φ имеем

$$\Phi^3|_{M_1N_1} = 0 \quad (3.21)$$

$$\Phi^3|_{MN} = \Phi_s^3(\tau', \xi') \quad (3.22)$$

где $\Phi_s^3(\tau', \xi')$ – кусочно-линейная функция, известная из решения задачи в области D_1 . Условие непротекания (3.11) в силу (3.9) примет вид

$$\frac{\partial \Phi^3}{\partial \xi'}(\tau', 0) = 0 \quad (3.23)$$

Из (3.10) и (3.9) следует, что при $\xi' = k_0\sqrt{M_0^2 - 1} \equiv \xi_0$

$$h'_1(\tau') \frac{\partial^2 \Phi^3}{\partial \tau'^2} + h'_2(\tau') \frac{\partial^2 \Phi^3}{\partial \tau' \partial \xi'} = 0 \quad (3.24)$$

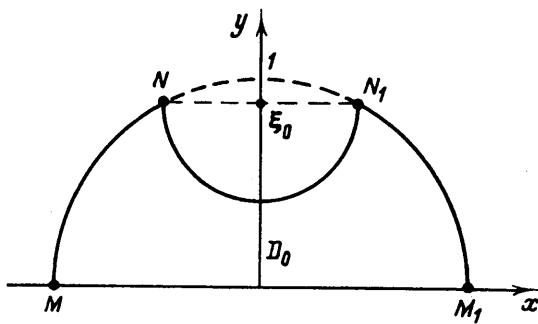
$$h'_1(\tau') = \sqrt{v_0^2 - c_0^2} h_1 \left(\frac{\tau' + M_0}{c_0 \sqrt{M_0^2 - 1}} \right)$$

$$h'_2(\tau') = -h_2 \left(\frac{\tau' + M_0}{c_0 \sqrt{M_0^2 - 1}} \right)$$

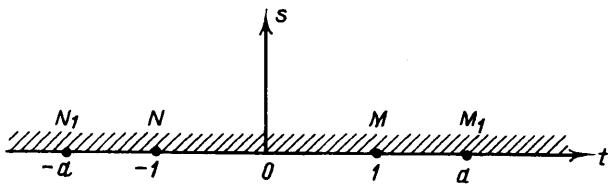
$$h_1(\tau) = I_0(k_0A - B)^{-1}(E - \tau A)(f_2 - \tau f_1)$$

$$h_2(\tau) = -I_0(f_2 - \tau f_1), \quad I_0 = (0, 0, 1)$$

Таким образом, для уравнения (3.20) имеем в области D_0 смешанную краевую задачу с граничными условиями (3.21)–(3.24) на замкнутом контуре MNN_1M_1 .



Фиг. 2. Плоскость переменных x и y



Фиг. 3. Плоскость переменных s и t

Продифференцируем (3.20) по τ' . Тогда для величины $Q = \partial\Phi^3/\partial\tau'$ (штрихи в дальнейшем опускаем) получаем уравнение

$$(1-\tau^2)Q_{\tau\tau} - 2\xi\tau Q_{\tau\xi} + (1-\xi^2)Q_{\xi\xi} - 2\tau Q_\tau - 2\xi Q_\xi = 0$$

которое преобразованием Чаплыгина

$$\tau = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \xi = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

приводится к уравнению Лапласа

$$\Delta Q = 0 \tag{3.25}$$

При этом окружность $\tau^2 + \xi^2 = 1$ переходит в единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$, прямая $\xi = 0$ – в прямую $y = 0$, прямая $\xi = \xi_0$ в дугу NN_1 окружности $x^2 + (y - 1/\xi_0)^2 = -1 + 1/\xi_0^2$ (см. фиг. 2).

Границные условия (3.23) и (3.24) принимают вид

$$\frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial n} \Big|_{NN_1} \equiv 0 \tag{3.27}$$

$$\mathbf{n} = (h_1^\circ, h_2^\circ), \quad x^2 + y^2 - 1 = 2x\tau_0$$

$$h_1^\circ(x, y) = \frac{1}{2}h_1(\tau_0)(1+x^2-y^2) + yxh_2(\tau_0)$$

$$h_2^\circ(x, y) = yxh_1(\tau_0) + \frac{1}{2}(1+y^2-x^2)h_2(\tau_0)$$

Краевые условия (3.21) и (3.22) совместно с уравнением (3.20) дают

$$Q|_{M_1 N_1} = 0 \quad (3.28)$$

$$Q|_{MN} = Q_s \quad (3.29)$$

где $Q_s = \partial \Phi_s^3 / \partial t$ – кусочно-постоянная функция.

Для решения краевой задачи (3.25)–(3.29) введем комплексные переменные $z = x + iy$ и $\zeta = t + is$. Функция $z = \operatorname{tg}(g(\zeta))$

$$g(\zeta) = A \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + b$$

$$b = \frac{1}{2} \ln R^* - i \frac{\pi}{2}, \quad R^* = \sqrt{\frac{1-\xi_0}{1+\xi_0}}$$

отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$ (фиг. 3) на область D_0 . Точки, переходящие друг в друга при этом отображении, обозначены на фиг. 2 и 3 одинаковыми буквами. Постоянные A и $k = 1/a$ находятся из указанного соответствия точек

$$AK(k) = -\frac{1}{2} \ln R^*, \quad AK(k') = \pi$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I рода.

Положим $Q^\circ(\zeta) = Q(z(\zeta))$ и введем в рассмотрение регулярную в верхней полуплоскости функцию $F(\zeta) : \operatorname{Re} F(\zeta) = Q^\circ(\zeta)$, которая в силу (3.26)–(3.29) удовлетворяет следующим условиям на вещественной оси:

$$\operatorname{Re} F(t) = Q_s^\circ(t), \quad |t| < 1$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad 1 < t < a$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial F}{\partial n} = 0, \quad -a < t < 1$$

$$\operatorname{Re} F(t) = 0, \quad |t| > a$$

причем $Q_s^\circ(t) = Q_s(z(t))$, $z(t) \in MN$, $t \in (-1, 1)$.

Пусть $\beta(t)$, $t \in (-a, -1)$, – угол между направлением вектора \mathbf{n} и положительным направлением вещественной оси и

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1, |t| > a \\ \frac{\pi}{2}, & t \in (1, a) \\ \beta(t), & t \in (-a, -1) \end{cases}$$

Рассмотрим регулярную в верхней полуплоскости вспомогательную функцию $q(\zeta) : \operatorname{Re} q(t) = \alpha(t)$, $t \in R$. В соответствии с интегралом Шварца имеем

$$q(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \frac{dt}{t - \zeta} = \frac{1}{2i} \ln \frac{a - \zeta}{1 - \zeta} + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{-1} \beta(t) \frac{dt}{t - \zeta}$$

Положим $F_1(\zeta) = e^{iq(\zeta)} F'(\zeta)$

Легко убедиться, что на вещественной оси

$$\operatorname{Re} F_1(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ e^{-q_s(t)} \frac{dQ_s^\circ}{dt}, & |t| < 1 \end{cases}$$

Используя снова интеграл Шварца, находим

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{\pi i} F_0(\zeta) + i \left(\frac{B_1}{\zeta + a} + \frac{B_2}{\zeta - 1} \right)$$

$$F_0(\zeta) = \int_{-1}^1 e^{-q_s(t)} \frac{dQ_s^\circ}{dt} \frac{dt}{t - \zeta}, \quad B_1, B_2 \in R$$

Так как функция $Q_s^\circ(t)$ – кусочно-постоянна, то

$$F_0(\zeta) = \sum_k \gamma_k e^{-q_s(t_k)} \frac{1}{t_k - \zeta}$$

где t_k, γ_k – точки разрыва и величины скачков функции соответственно. Тогда

$$Q^\circ(\zeta) = \operatorname{Re} \int_{t_0}^{\zeta} e^{-iq(\zeta)} F_1(\zeta) d\zeta$$

Постоянные B_1 и B_2 определяются из условий

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} Q^\circ(t) = Q_s(M_1) \equiv Q_1, \quad \lim_{t \rightarrow -a+0} Q^\circ(t) = Q_s(N_1) = 0$$

В результате получаем систему уравнений для нахождения B_1 и B_2

$$B_1 + B_2 = - \sum_k \gamma_k e^{-q_s(t_k)}$$

$$\int_1^a \sqrt{\frac{t-1}{a-t}} \left\{ \frac{B_1}{t+a} + \frac{B_2}{t-1} \right\} q_0(t) dt = Q_1 - \frac{1}{\pi} \int_1^a \sqrt{\frac{t-1}{a-t}} q_0(t) F_0(t) dt$$

$$q_0(t) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{-1} \beta(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \right)$$

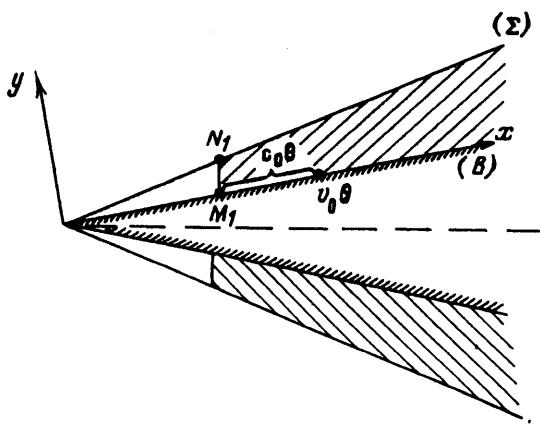
Распределение вдоль поверхности клина величины Q , определяющей «погранслойную» поправку к давлению, задается соотношением

$$Q^\circ(t) = \int_a^t \sqrt{\frac{t-1}{a-t}} \left\{ \frac{B_1}{t+a} + \frac{B_2}{t-1} - \frac{1}{\pi} F_0(t) \right\} q_0(t) dt$$

Анализ построенного решения показывает, что на плоскости (ξ, τ) область влияния начальных условий представляет собой четырехугольник ABN_1M_1 (фиг. 1), которому на физической плоскости соответствует область (фиг. 4)

$$0 \leq \lambda \leq k_0, \quad r \geq v_0 \theta \left(\cos \lambda - \sqrt{\frac{1}{M_0^2} - \sin^2 \lambda} \right)$$

$$x = r \cos \lambda, \quad y = r \sin \lambda$$



Фиг. 4. Характерные области на физической плоскости

Иными словами, в фиксированной точке (r, λ) ударного слоя начиная с момента времени

$$t = t^* = \varepsilon \frac{r}{v_0} \frac{M_0^2}{M_0^2 - 1} \left(\cos \lambda + \sqrt{\frac{1}{M_0^2} - \sin^2 \lambda} \right) \quad (3.30)$$

«погранслойная» поправка ПИ имеет по крайней мере второй порядок малости по ε и параметры течения с точностью до членов порядка ε определяются решением задач (ε^0) и (ε^1) . При $0 \leq t < t^*$ начальные условия оказывают существенное влияние на характер течения газа в ударном слое. Таким образом, с указанной точностью величину t^* можно считать временем установления квазистационарного режима течения в фиксированной точке (r, λ) ударного слоя.

Если при $t = 0$ ускорение тела равно нулю, то $\Pi_1 U \equiv 0$ и, следовательно, влияние начальных условий оказывается лишь в членах более высокого порядка малости.

Заключение. Изложенный метод без существенных изменений может быть использован для расчета течения газа и в том случае, когда происходит смена одного неравномерного режима движения тела другим с разрывом ускорения. В этом случае начальное условие будет иметь вид

$$U(x, y, 0) = U^0(x, y) + \varepsilon U_1^0(x, y), \quad U_0^0 = \text{const}$$

Решения задач (ε^0) и (ε^1) останутся прежними, а в задаче $(\Pi \varepsilon^1)$ изменится лишь начальное условие

$$\Pi_1 U(x, y, 0) = U_1^0(x, y) - U_1(x, y, 0)$$

Время установления квазистационарного режима обтекания в фиксированной точке ударного слоя определится формулой (3.30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Булах Б.М. О движении клина с переменной сверхзвуковой скоростью в покоящемся газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 113–117.
- Васильева А.В., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
- Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. О некоторых результатах теории сингулярных возмущений за последние пять лет // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1981. № 3. С. 25–35.