МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1996

УДК 532.582.33

© 1996 г. М.В. НОРКИН

О НАЧАЛЕ ОТРЫВА ПРИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ УДАРЕ ПО ПЛАВАЮЩЕМУ ТЕЛУ

Рассматривается задача о вертикальном ударе по телу вращения, погруженному в идеальную несжимаемую жидкость, ограниченную снизу дном в форме поверхности вращения.

Для некоторого класса тел доказано, что отрыв жидкости начинается на пересечении смоченной поверхности тела с меридиональной плоскостью, в которой расположен ударный импульс. Как показывают примеры поверхностей вращения веретенообразной формы и эллипсоида вращения, отрыв может происходить в одной из двух точек границы смоченной поверхности тела – дальней или ближней от точки приложения импульса.

В работах [1–5] определялись условия безотрывности вертикального удара для различных тел вращения. Для определения этих условий важно правильно сделать вывод о начале отрыва жидкости от тела. Строгое доказательство удается провести только для некоторых, как правило, точно решаемых задач, например круглый диск и эллипсоид в случае бесконечной глубины [1, 2].

На основании численных расчетов в [4] был сделан вывод о том, что отрыв жидкости от тела может начинаться в одной из двух точек границы смоченной поверхности тела – дальней или ближней от точки приложения импульса, т.е. либо в точке A, либо в точке B на фиг. 1. В настоящей работе дается легко проверяемый достаточный признак начала отрыва, который состоит в проверке условия неположительности или неотрицательности функции, заданной на дуге вращения. В первом случае отрыв начинается на пересечении смоченной поверхности тела с меридиональной полуплоскостью $\varphi = 0$, во втором – с меридиональной полуплоскостью $\varphi = \pi$. Ударный импульс расположен в полуплоскости $\varphi = \pi$.

Примеры поверхностей вращения веретенообразной формы и эллипсоида вращения показывают, что отрыв может происходить как в дальней точке A, так и в ближней точке B. Рассмотрены также некоторые другие примеры: тор, кольцо, параболоид, шар. Показано, что центральный удар по шару, погруженному в жидкость бесконечной глубины больше, чем наполовину, приводит к отрыву.

1. Постановка задачи. Потенциал скоростей Φ, приобретенных частицами жидкости в момент, непосредственно следующий после удара, определяется решением смешанной задачи [6–8]

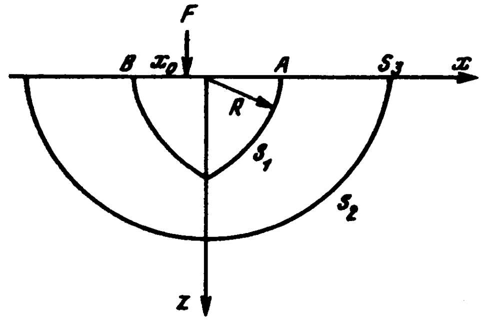
$$\Delta\Phi = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = (\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}, \mathbf{n}), \quad (xyz)\in S_1 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad (xyz)\in S_2, \quad \Phi = 0, \quad (xyz)\in S_3$$

$$\Phi = 0, (xyz)\to\infty$$

$$P_t = -\rho\Phi \tag{1.2}$$



Фиг. 1. Постановка задачи: F – импульс удара, x_0 – точка приложения импульса, A и B – дальняя и ближняя точки, R – радиус-вектор точек границы. S_1, S_2, S_3 – смоченная поверхность тела, дно и свободная поверхность жидкости

Здесь $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{\Omega}$ – векторы поступательной и вращательной скорости, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точек границы, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела, S_1, S_2 и S_3 – смоченная поверхность тела, дно, имеющее форму поверхности вращения и свободная поверхность жидкости, P_t – импульсивное давление, ρ – плотность жидкости. В общем случае предполагаем, что жидкость не ограничена. Считаем, что ось x проходит через точку $x_0 < 0$, в которой наносится удар (см. фиг. 1).

Потенциал Φ предполагается непрерывным вплоть до границы ∂D области D, занятой жидкостью. Условие безотрывности удара состоит в неотрицательности импульсивного давления P_t в области D, что в силу принципа максимума равносильно неотрицательности P_t на S_1 и S_2.

Представим D в виде

$$D = D^+ \cup D^-$$

$$D^+ = \{(r,z,\varphi) \in D\colon\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\},\quad D^- = \{(r,z,\varphi) \in D\colon\ \pi < \varphi < 2\pi\}$$

Здесь r, z, φ – цилиндрические координаты. Угол φ отсчитывается в положительном направлении от оси x в плоскости xy. Через S_i^+ (S_i^-) обозначим часть поверхности S_i, $i =$ $= 1, 2$, которая расположена в D^+ (D^-). Так как S_1 – поверхность вращения, то

$$(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}, \mathbf{n}) = \cos\varphi I,\quad I = ((\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}, \mathbf{n}))|_{\varphi=0} \tag{1.3}$$

Предполагаем, что функция I не обращается тождественно в ноль. Ниже будет показано, что случай $I \equiv 0$ соответствует шару, погруженному в жидкость наполовину.

2. Достаточные условия начала отрыва. Относительно границы ∂D предположим, что она является во всех точках достаточно гладкой. Исключение могут составить только те точки ∂D, которые лежат на пересечении смоченной поверхности твердого тела S_1 и дна S_2 со свободной поверхностью жидкости, а также на оси вращения z.

Это позволяет включить в рассмотрение, например, поверхности вращения веретенообразной формы, которые получаются вращением дуги окружности вокруг прямой, проходящей через ее крайние точки [4].

Пусть выполнено одно из двух неравенств:

$$I \leqslant 0,\ I \geqslant 0 \tag{2.1}$$

Тогда для точек S_1 и S_2, которые лежат на свободной поверхности жидкости и в меридиональной плоскости $\varphi = 0, \pi$, в которой расположен ударный импульс, производная $(\partial P_t/\partial\varphi) = 0$. Для остальных точек поверхностей S_1 и S_2 имеют место строгие неравенства

$$I \leqslant 0:\ \ \frac{\partial P_t}{\partial\varphi} > 0,\ \ S_1^+ \text{ и } S_2^+;\ \ \frac{\partial P_t}{\partial\varphi} < 0,\ \ S_1^- \text{ и } S_2^- \tag{2.2}$$

$$I \geqslant 0:\ \ \frac{\partial P_t}{\partial\varphi} < 0,\ \ S_1^+ \text{ и } S_2^+;\ \ \frac{\partial P_t}{\partial\varphi} > 0,\ \ S_1^- \text{ и } S_2^- \tag{2.3}$$

Если выполнено $I \leqslant 0$ ($I \geqslant 0$), то отрыв жидкости от тела начинается на пересечении смоченной поверхности тела S_1 с меридиональной полуплоскостью $\varphi = 0$ ($\varphi = \pi$).

Действительно, докажем первое неравенство (2.2). Обозначим через W^+ сужение функции $W = (\partial P_t/\partial\varphi)$ на D^+. Для функции W^+ имеем краевую задачу в области D^+

$$\Delta W^+ = 0$$

$$\left.\frac{\partial W^+}{\partial n}\right|_{S_1^+} = \rho\sin\varphi I,\ \ \left.\frac{\partial W^+}{\partial n}\right|_{S_2^+} = 0 \tag{2.4}$$

$$W^+|_{S_3^+} = 0,\ \ W^+|_{\varphi=0,\pi} = 0,\ \ W^+|_\infty = 0$$

Предположим противное: существует точка s, принадлежащая S_1^+ или S_2^+, в которой функция W^+ достигает на S_1^+ и S_2^+ неположительного минимума. Причем точка s не лежит на свободной поверхности жидкости и в меридиональной плоскости $\varphi = 0, \pi$. В силу принципа максимума

$$W^+(s) = \inf_{D^+} W^+$$

Тогда, используя лемму о граничной точке, делаем вывод, что производная функции W^+ в точке s по направлению внутренней нормали к границе ∂D положительна [9, 10]

$$\left.\frac{\partial W^+}{\partial n}\right|_s > 0$$

Но из $I \leqslant 0$ и (2.4) следует, что $(\partial W^+/\partial n)|_s \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает первое неравенство (2.2). Справедливость второго неравенства (2.2) следует из нечетности функции W по угловой координате φ. Для доказательства неравенств (2.3) заметим, что в случае $I \geqslant 0$ функция $-P_t$ удовлетворяет неравенствам (2.2).

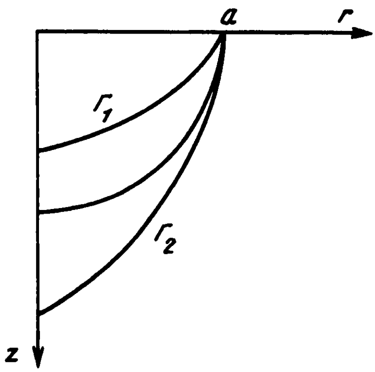
Покажем, что если P_t неотрицательно на смоченной поверхности тела, то оно неотрицательно и на дне. Предположим противное: $P_t \geqslant 0$ на S_1 и на S_2 найдется точка s, в которой P_t достигает отрицательного минимума. Следовательно, $(\partial P_t/\partial n)|_s > 0$ [9, 10]. Но на неподвижных стенках $(\partial P_t/\partial n) = 0$. Последние рассуждения справедливы в предположении гладкости дна на крайней точке, лежащей на оси z.

Пусть выполнено условие $I \leqslant 0$, тогда для точек S_1 и S_2, которые лежат на свободной поверхности жидкости и в меридиональной плоскости $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$, потенциал вращательного движения $\Phi_2 = 0$. Для остальных точек поверхностей S_1 и S_2 имеют место строгие неравенства

$$\Phi_2 > 0,\ \ 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2},\ \ \frac{3\pi}{2} < \varphi \leqslant 2\pi;\ \ \Phi_2 < 0,\ \ \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

Если выполнено условие $I \geqslant 0$, то имеют место обратные неравенства.

Отметим геометрические следствия условий (2.1) в предположении, что $n_z \geqslant 0$ на S_1. Обозначим через Г кривую, на которой задана функция I. Эта кривая образована



Фиг. 2. Расположение кривых, на которых задана функция I: Γ_1 – в случае $I \leqslant 0$. Γ_2 – в случае $I \geqslant 0$

пересечением поверхности S_1 с меридиональной полуплоскостью $\varphi = 0$. Пусть крайняя точка кривой Г, лежащая на свободной поверхности жидкости, имеет координаты $r = a$, $z = 0$.

Покажем, что если выполнено условие $I \leqslant 0$ ($I \geqslant 0$), то кривая Г лежит внутри(вне) четверти круга радиуса a, включая границу (фиг. 2).

Пусть выполнено условие $I \leqslant 0$. Так как кривая Г гладкая, то в окрестности каждой своей точки она может быть задана одним из двух уравнений: $z = z(r)$ или $r = r(z)$. Крайние точки кривой, лежащие на свободной поверхности жидкости и на оси z, не рассматриваются. Возьмем произвольную точку (r_0, z_0) кривой Г и предположим, что в некоторой ее окрестности Г задана уравнением $z = z(r)$. Тогда, переходя во второй формуле (1.3) к цилиндрическим координатам, с учетом $I \leqslant 0$ получим неравенство $zn_r - rn_z \leqslant 0$, или эквивалентное ему дифференциальное неравенство $-zz' - r \leqslant 0$. Интегрируя последнее неравенство по переменной r в пределах от r_0 до r ($r > r_0$), получим неравенство $z^2 + r^2 \geqslant z_0^2 + r_0^2$. Если в окрестности рассматриваемой точки кривая задается уравнением $r = r(z)$, то ответ получается такой же (здесь нужно рассмотреть два случая: либо $n_r \geqslant 0$, либо $n_r \leqslant 0$ в некоторой окрестности точки (r_0, z_0)). В силу произвольности точки (r_0, z_0) на кривой окончательно получим, что для любой точки (r, z) кривой Г выполняется неравенство $r^2 + z^2 \leqslant a^2$. В случае $I \geqslant 0$ аналогичным образом придем к неравенству $r^2 + z^2 \geqslant a^2$. Если $I \equiv 0$, то, очевидно, $r^2 + z^2 = a^2$ и, следовательно, кривая Г является дугой окружности, а поверхность, полученная вращением этой дуги вокруг оси z, есть смоченная поверхность шара, погруженного в жидкость наполовину. Нетрудно убедиться в том, что последний результат справедлив в классе гладких кривых и ограничение $n_z \geqslant 0$ на S_1 здесь несущественно.

3. Условия безотрывности удара для конкретных тел. Приведем выражения для функции I для ряда конкретных тел и тем самым получим в силу разд. 2 условия безотрывности удара.

Твердое тело веретенообразной формы, полупогруженное в жидкость

$$I = -\omega(b/a)z$$

где ω – угловая скорость, a – радиус дуги, b – координата центра дуги. При $b > 0$ выполнено условие $I \leqslant 0$, при $b < 0$ – условие $I \geqslant 0$. В первом случае отрыв жидкости от тела начинается в самой дальней от точки приложения импульса точке границы смоченной поверхности тела, во втором – в самой ближней [4]. В частности, для вырожденного тора ($b = a$) отрыв начинается в дальней точке [5].

Полупогруженный эллипсоид вращения с горизонтальной и вертикальной полуосями a и b

$$I = \frac{\omega z r}{\sqrt{(r^2/a^4) + (z^2/b^4)}} \frac{(b^2 - a^2)}{a^2 b^2}$$

При $b < a$ отрыв начинается в дальней точке, а при $b > a$ – в ближней. Условие безотрывности удара для эллипсоида найдено в [1].

Круглый диск и кольцо

$$I = -\omega r \leqslant 0$$

Условие безотрывности удара для диска в случае конечной глубины найдено в работах [2, 3].

Тор, погруженный в жидкость наполовину

$$I = -\omega(b/a)z \leqslant 0$$

Здесь a – радиус круга поперечного сечения, b – расстояние от оси вращения z до центра указанного круга.

Параболоид вращения

$$I = \frac{\omega r(2cz-1)}{\sqrt{4c^2r^2+1}}, \quad c = \frac{b}{a^2}$$

Если $0 < b \leqslant a/\sqrt{2}$, где b – глубина погружения, $r = a$ – координата точки пересечения дуги вращения со свободной поверхностью жидкости, то отрыв начинается в дальней точке. При $b > a/\sqrt{2}$ функция I меняет знак.

Шар, частично погруженный в жидкость

$$I = \omega(b/a)r$$

Здесь a – радиус шара, $z = b$ – координата центра шара. При $b < 0$ центр шара расположен над свободной поверхностью. Покажем в случае жидкости бесконечной глубины, что при $b > 0$, т.е. когда шар погружен в жидкость больше, чем наполовину, центральный удар, а следовательно, и произвольный вертикальный удар приводят к отрыву.

После продолжения потенциала нечетным образом через свободную поверхность приходим к задаче о поступательном движении сферической луночки в идеальной жидкости. Функция тока ψ находится методом разделения переменных в тороидальных координатах α, β, φ [11] и имеет вид

$$\psi(\alpha,\beta) = \frac{2v_0 a^2 \sin^2\beta_0 \operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\beta_0-\pi)\tau \operatorname{ch}\beta\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau \operatorname{ch}\beta_0\tau} P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)d\tau$$

$$\cos\beta_0 = b/a$$

Здесь v_0 – поступательная скорость тела, $P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ – присоединенная функция Лежандра с комплексным значком. Функция тока в задаче обтекания найдена в [12]. С учетом условия на свободной поверхности потенциал Φ находится однозначно

$$\Phi(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\infty \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)d\alpha$$

Потенциал Φ на смоченной поверхности луночки можно выразить через интегралы от элементарных функций

$$\Phi(\alpha,\beta_0) = v_0 a \sin\beta_0 \left\{ \frac{\sin\beta_0}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_0} - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_0}\left[\frac{1}{\beta_0}\int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi d\xi}{\operatorname{ch}(\xi\pi/2\beta_0)(\operatorname{ch}\xi - \cos\beta_0)\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}\alpha}} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi}{\beta_0^2}\int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sh}(\xi\pi/2\beta_0)d\xi}{\operatorname{ch}^2(\xi\pi/2\beta_0)\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}\alpha}}\right]\right\}$$

Исходя из последней формулы легко строится асимптотика потенциала в угловой точке $z = 0$, $r = a\sin\beta_0$ ($\alpha = \infty$). В случае, когда шар погружен в жидкость больше, чем наполовину ($0 < \beta_0 < \pi/2$), асимптотика имеет вид

$$\Phi(\alpha,\beta_0) \sim 2v_0 a \sin^2\beta_0 e^{-\alpha}, \quad \alpha \to \infty$$

Следовательно, импульсивное давление (1.2) в окрестности указанной точки принимает отрицательные значения. Для шара, погруженного в жидкость меньше, чем наполовину ($\pi/2 < \beta_0 < \pi$), асимптотика потенциала в угловой точке имеет вид

$$\Phi(\alpha,\beta_0) \sim -v_0 a C(\beta_0) e^{-\alpha\pi/2\beta_0}, \quad \alpha \to \infty$$

$$C(\beta_0) = 2\sin\beta_0 \frac{\pi+\beta_0}{\beta_0^2} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{\pi/\beta_0} dx$$

Заключение. Сформулированы достаточные признаки начала отрыва жидкости от тела и отмечены их геометрические следствия; найдены условия безотрывности удара для конкретных тел; показано, что центральный удар по шару, погруженному в жидкость бесконечной глубины больше, чем наполовину, приводит к отрыву.

Автор выражает благодарность В.И. Юдовичу за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юдович В.И.* Вертикальный удар по твердому эллипсоиду, полупогруженному в жидкое полупространство. Ростов н/Д., 1993. 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.11.1993. 2870-В93.
2. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 525–532.
3. *Чебаков М.И.* Удар круглого диска о жидкость малой глубины // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 675–681.
4. *Норкин М.В.* Удар по твердому телу веретенообразной формы, погруженному в жидкость бесконечной глубины // ПМТФ. 1996. Т. 37. Вып. 1. С. 36–41.
5. *Норкин М.В.* Удар вырожденного тора о жидкость бесконечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 161–165.
6. *Ламб Г.* Гидродинамика, М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. *Седов Л.И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 187. С. 1–27.
8. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М. 1963. 583 с.
9. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989, 463 с.
10. *Олейник О.А.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 3. С. 695–702.
11. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
12. *Коковин Е.Т., Либин Э.Е.* К вопросу о потенциальном обтекании сферической линзы // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 9. С. 126–130.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
6.XII.1995