

УДК 532.546:536.423

© 1996 г. А.А. БАРМИН, Г.Г. ЦЫПКИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЖЕКЦИИ ВОДЫ В ГЕОТЕРМАЛЬНЫЙ ПЛАСТ, НАСЫЩЕННЫЙ ПАРОМ

Предложена математическая модель процесса закачки воды в высокотемпературный геотермальный резервуар, насыщенный паром. Области пара и воды разделены подвижной границей – фронтом фазового перехода, положение которого определяется в процессе решения задачи. Показано, что для низких проницаемостей решение содержит термодинамическое противоречие, выражающиеся в переохлаждении пара перед поверхностью раздела. Построены критические кривые, ограничивающие области существования фронтального решения.

Геотермальные ресурсы принято подразделять на гидротермальные (термальные воды), заключенные в естественных подземных коллекторах, и петрогеотермальные, аккумулярованные в блоках, нагретых до высоких температур, но практически безводных (зачастую присутствует пар). Технология извлечения петрогеотермальных ресурсов базируется на создании искусственных циркуляционных систем, в основе которых лежит закачка воды в нагретые проницаемые породы. В последние годы интерес к таким системам значительно вырос, но развитие соответствующих технологий сдерживается отсутствием надежных схем расчетов физических процессов, связанных с движением и фазовыми превращениями теплоносителя в резервуаре.

В ряде работ [1–4] изучалась технология повторной закачки геотермальных растворов в высокотемпературный резервуар и делались попытки построить математическую модель процесса закачки воды. При этом вводились подвижные фронты фазовых переходов (здесь – фронты кипения), но изучение ограничивалось рассмотрением только уравнения переноса массы. Параметры полагались зависящими от температуры. В [2] при сильных упрощающих предположениях предложено условие баланса тепла на подвижном фронте кипения, возникающем при закачке воды в резервуар, наполненный паром.

1. Предположим, что гидротермальный резервуар представляет собой неподвижную и несжимаемую пористую среду, насыщенную паром. В резервуар закачивается вода, область насыщения которой отделяется от области пара подвижной границей фазовых переходов вода – пар. Для описания процессов тепломассопереноса с равновесными фазовыми переходами воспользуемся системой законов сохранения масс, энергии, законом Дарси [5], уравнениями состояния для воды и пара, уравнением кривой равновесия пар–вода [6], а также термодинамическими соотношениями. Тогда в областях пара ($i = 1, j = v$) и воды ($i = 2, j = w$), расположенных перед и за поверхностью фазового перехода соответственно, система основных уравнений имеет вид

$$m \frac{\partial}{\partial t} \rho_j + \operatorname{div}(\rho_j \mathbf{v}_j) = 0$$

$$\mathbf{v}_j = -\frac{k}{\mu_j} \operatorname{grad} P, \quad j = w, v \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e)_i + \operatorname{div}(\rho_j h_j \mathbf{v}_j) = \operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} T), \quad i = 1, 2$$

$$\rho_w = \rho_{w0}(1 + \alpha(P - P_0) - \beta(T - T_0)), \quad P = \rho_v RT, \quad e_j = h_j - \frac{P}{\rho_j}$$

$$dh_w = C_w dt + \frac{1 - \beta T}{\rho_w} dP, \quad dh_v = C_p dT, \quad de_s = C_s dT$$

$$\lambda_i = m\lambda_j + (1 - m)\lambda_s, \quad (\rho e)_i = m\rho_j e_j + (1 + m)\rho_s e_s$$

$$(\rho C)_i = m\rho_j C_j + (1 - m)\rho_s C_s$$

Здесь T – температура, P – давление, v – скорость фильтрации, k – проницаемость, μ – вязкость, α – коэффициент сжимаемости воды, β – коэффициент теплового расширения воды, ρ – плотность, e – плотность внутренней энергии, h – плотность энтальпии, λ – коэффициент теплопроводности, m – пористость, C – теплоемкость, индексы: w – вода, v – пар, s – скелет пористой среды.

Система основных уравнений (1.1) после тождественных преобразований приводится к системам уравнений относительно температуры и давления в области воды и пара соответственно

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \kappa_2 \beta \text{grad } T \text{ grad } P = \kappa_2 \Delta P \quad (1.2)$$

$$(\rho C)_2 \frac{\partial T}{\partial t} - m\beta T \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k}{\mu_w} \rho_w C_w \text{grad } P \text{ grad } T + \frac{k}{\mu_w} \beta T (\text{grad } P)^2 = \lambda_2 \Delta T$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{k}{m\mu_v} \frac{P}{T} \text{grad } P \text{ grad } T - \frac{k}{m\mu_w} (\text{grad } P)^2 = \frac{k}{m\mu_v} P \Delta P \quad (1.3)$$

$$(\rho C)_1 \frac{\partial T}{\partial t} - m \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k C_p P}{\mu_v RT} \text{grad } P \text{ grad } T = \lambda_1 \Delta T$$

$$\kappa_2 = k / (m\alpha\mu_w)$$

Области, насыщенные водой и паром, разделены зоной фазового перехода, которую будем рассматривать как поверхность разрыва. Так как изменение скорости в зоне фазового перехода можно считать малым, то из закона сохранения импульса будет следовать непрерывность давления на фронте. Будем полагать процесс фазового перехода вода–пар равновесным, т. е. считать температуру кипения (конденсации) связанной с давлением насыщенных паров соотношением

$$\ln P_*/P_a = A + B/T_* \quad (1.4)$$

$$A = 12,512, \quad B = -4611,73 \text{ K}, \quad P_a = 10^5 \text{ Па}$$

Тогда в силу непрерывности давления температура на фронте также является непрерывной функцией

$$T_- = T_+ = T_*, \quad P_- = P_+ = P_* \quad (1.5)$$

Законы сохранения массы и энергии с учетом соотношения (1.5) представимы в виде

$$m \left\{ 1 - \frac{\rho_{v*}}{\rho_w} \right\} V_n = \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_{v*}}{\rho_w} (\text{grad } P)_{n+} - \frac{k}{\mu_w} (\text{grad } P)_{n-} \quad (1.6)$$

$$m\rho_w q V_n = \lambda_- (\text{grad } T)_{n-} - \lambda_+ (\text{grad } T)_{n+} - \rho_w q \frac{k}{\mu_w} (\text{grad } P)_{n-} \quad (1.7)$$

Здесь V – скорость скачка, индексы: n – нормаль к фронту, плюс и минус соответствуют величинам перед фронтом (пар) и за фронтом (вода), звездочка – значениям величин на фронте. Удельная теплота фазового перехода вода–пар $q = h_v - h_w$.

Таким образом, на подвижной границе раздела имеется пять независимых граничных условий. Для определения эволюционности этой границы линеаризуем систему (1.2), (1.3) около однородного состояния (P^0, T^0) и (P_0, T_0) соответственно в областях за и перед фронтом

$$\frac{T}{T_0} = 1 + T', \quad \frac{P}{P_0} = 1 + P' \quad \text{и} \quad \frac{T}{T^0} = 1 + T', \quad \frac{P}{P^0} = 1 + P'$$

Тогда в этих областях системы основных уравнений (1.2) и (1.3) в линейном приближении приводятся к виду

$$\frac{\partial P'}{\partial t} - \delta_j \frac{\partial T'}{\partial t} = \kappa_j \Delta P' \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \omega_j \frac{\partial P'}{\partial t} = a_j \Delta T'$$

$$\delta_1 = 1, \quad \omega_1 = \frac{mP_0}{(\rho C)_1 T_0}, \quad a_1 = \frac{\lambda_1}{(\rho C)_1}, \quad \kappa_1 = \frac{kP_0}{m\mu_v}$$

$$\delta_2 = \frac{\beta T_0}{\alpha P_0}, \quad \omega_2 = -\frac{m\beta P^0}{(\rho C)_2}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{(\rho C)_2}, \quad \kappa_2 = \frac{k}{m\alpha\mu_w}$$

Здесь индексы $j = 1, 2$ соответственно в области пара и воды.

Если рассматривать решение этой системы в одномерном случае в виде $\exp i(kx - \omega t)$, то дисперсионное соотношение, связывающее ω и k , имеет вид

$$z_{\pm} k^2 = i\omega$$

$$(1 - \delta_j \omega_j) z^2 - (\kappa_j + a_j) z + a_j \kappa_j = 0$$

Легко показать, что при $\delta_j \omega_j < 1$ система устойчива по Петровскому ($\text{Im } \omega < M$ для любых действительных k), а при $\delta_j \omega_j > 1$ – нет, так как в этом случае $z_{\pm} < 0$. В первом случае в каждой области два малых возмущения, описываемые системой, распространяются вправо, а два – влево. Таким образом, от границы отходят четыре возмущения и пяти граничных условий достаточно для его эволюционности.

Оценки показывают, что во всем диапазоне параметров условие устойчивости по Петровскому системы (1.8) выполняется.

2. Рассмотрим геотермальный резервуар, насыщенный в начальный момент времени паром с давлением P_0 и температурой T_0 . На неподвижной границе $x = 0$, моделирующей нагнетающую скважину, подается вода под давлением $P^0 > P_0$ с температурой T_0 .

Построим решение задачи в линейном приближении, когда изменения давления и температуры в каждой из областей невелики. Изменения искоемых функций на неизвестной подвижной границе фазового перехода могут быть конечными величинами, поэтому условия на границе фазового перехода остаются нелинейными.

Полученная система уравнения (1.8) может быть упрощена, если значения давлений и температур много меньше критических. Рассмотрим относительные значения производных во времени, стоящие в левых частях уравнений. В области пара для уравнения энергии отношение второго слагаемого к первому равно

$$\frac{m\delta P}{\delta T(\rho C)_1} \sim \frac{10^{-1} \delta P}{400 \cdot 10^6} \sim \frac{\delta P}{4 \cdot 10^9} \ll 1$$

Здесь δP и δT – характерные вариации давления и температуры.

В области воды для уравнения движения отношение второго и первого слагаемых равно

$$\frac{\beta \delta T}{\alpha \delta P} \sim \frac{10^{-3} \cdot 400}{10^{-9} \delta P} \sim \frac{4 \cdot 10^8}{\delta P} \gg 1$$

а для уравнения энергии аналогичное отношение имеет вид

$$\frac{m \beta \delta P T^0}{\delta T (\rho C)_2} \sim \frac{10^{-1} \cdot 10^{-3} \delta P}{10^6} \sim 10^{-10} \delta P \ll 1$$

Сделанные оценки показывают, что можно пренебречь сжимаемостью воды по сравнению с тепловым расширением, а также работой сил давления воды и пара по сравнению с теплопроводностью. Тогда системы уравнений сводятся к следующему виду в областях воды и пара соответственно:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = a_2 \Delta T', \quad -\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\kappa_2}{\delta_2} \Delta P'$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = a_1 \Delta T', \quad \frac{\partial P'}{\partial t} - \frac{\partial T'}{\partial t} = \kappa_1 \Delta P'$$

Рассмотрим одномерный случай. Предположим, что $x = X(t)$ – закон движения поверхности фазовых переходов, разделяющий области существования воды ($0 < x < X(t)$) и пара ($x > X(t)$). Если T_0, T^0, P_0, P^0 – постоянные величины, то в каждой из областей имеет место автомодельное решение вида

$$T = T(\zeta), \quad P = P(\zeta), \quad X(t) = 2\gamma(a_2 t)^{1/2}, \quad \zeta = 1/2x(a_2 t)^{-1/2}$$

Используя условия непрерывности температуры и давления на подвижной границе, получаем

$$\theta = 1 + \{\theta_* - 1\} \frac{\operatorname{erfc}(\zeta)}{\operatorname{erfc}(\gamma)}$$

$$\Pi = 1 - \frac{1}{\sigma_1^2 - 1} \{\theta_* - 1\} \frac{\operatorname{erfc}(\zeta)}{\operatorname{erfc}(\gamma)} + \left[\{\Pi_* - 1\} + \frac{1}{\sigma_1^2 - 1} \{\theta_* - 1\} \frac{\operatorname{erfc}(\zeta \sigma_1^{-1})}{\operatorname{erfc}(\gamma \sigma_1^{-1})} \right] \quad (2.1)$$

$$\theta = \theta_0 + \{\theta_* - \theta_0\} \frac{\operatorname{erf}(\zeta \varphi)}{\operatorname{erf}(\gamma \varphi)} \quad (2.2)$$

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\delta_2 \Pi_0}{\sigma_2^2 \theta_0} \{\theta_* - \theta_0\} \frac{\operatorname{erf}(\zeta \varphi)}{\operatorname{erf}(\gamma \varphi)} + \left[\{\Pi_* - \Pi_0\} + \frac{\delta_2 \Pi_0}{\sigma_2^2 \theta_0} \{\theta_* - \theta_0\} \right] \frac{\zeta}{\gamma}$$

$$\sigma_i = (\kappa_i/a_i)^{1/2}, \quad \varphi = (a_1/a_2)^{1/2}$$

$$\theta = T/T_0, \quad \Pi = P/P_0, \quad \theta_0 = T^0/T_0, \quad \Pi_0 = P^0/P_0$$

Таким образом, решение сформулированной задачи приводится к решению системы трансцендентных уравнений относительно неизвестных γ, T_*, P_* , полученных при подстановке в граничные условия (1.4), (1.6), (1.7) выражений (2.1), (2.2). Система трансцендентных уравнений решалась численно при следующих характерных значениях параметров:

$$\rho_w = 800 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_s = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda_w = 0,58 \text{ Вт/(м·К)}$$

$$\lambda_s = 2 \text{ Вт/(м·К)}, \quad \lambda_v = 0,02 \text{ Вт/(м·К)}, \quad C_w = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}$$

$$C_s = 0,9 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}, \quad \alpha = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}, \quad \beta = 10^{-3} \text{ К}^{-1}$$

$$R = 461 \text{ Дж/(кг·К)}, q = 1,85 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}, \mu_w = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ Па·с},$$

$$\mu_v = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па·с}.$$

3. Были проделаны численные эксперименты, в которых варьировались начальные и граничные условия, а также значения пористости и проницаемости. Полученные результаты свидетельствуют о существенной зависимости решения от коэффициента проницаемости. Ниже представлены примеры расчетов при $T_0 = 400 \text{ К}$, $T^0 = 300 \text{ К}$, $P_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $P^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $m = 0,2$, для высокопроницаемого ($k = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$) и низкопроницаемого пластов ($k = 10^{-17} \text{ м}^2$). В первом случае искомые значения равны: $\gamma = 2,1$; $T_* = 390,38$; $P_* = 2,01 \cdot 10^5$. На фиг. 1 представлены распределения безразмерных функций давления Π (кривая 1), температуры θ (кривая 2) и температуры фазового перехода $\theta_f = T_f/T_0$ (кривая 3), где T_f определяется из соотношения (1.7). Во втором случае имеем $\gamma = 0,163$; $T_* = 317,3$; $P_* = 1,32 \cdot 10^4$, а соответствующие безразмерные функции представлены на фиг. 2. Последнее решение соответствует тому, что охлаждение резервуара за счет воды приводит к конденсации пара (давление на фронте ниже начального и граничного). Отметим, что вычисленные в процессе решения распределения давления и температуры должны быть согласованы с условием (1.4), определяющим термодинамические условия существования пара и воды. Так, в водонасыщенной области локальная температура фазового перехода, вычисленная по найденному давлению из соотношения (1.4), должна быть не ниже локальной температуры воды. В противном случае вода в области за фронтом должна существовать в перегретом состоянии. В области пара температура фазового перехода, вычисленная аналогичным образом, должна быть не выше температуры пара, иначе пар будет находиться в переохлажденном состоянии. Если условия равновесного существования воды и пара не выполняются, то решение становится термодинамически противоречивым, т. е. физическое явление не может быть описано с помощью предложенной модели.

Условие переохлаждения пара имеет вид

$$\left[\frac{dT_f}{d\zeta} \right]_1 > \left[\frac{dT}{d\zeta} \right]_1$$

где производная температуры T_f фазового перехода вода–пар определяется через производную функции давления по условиям фазового равновесия. Используя полученное автомодельное решение, окончательно получаем условие переохлаждения пара

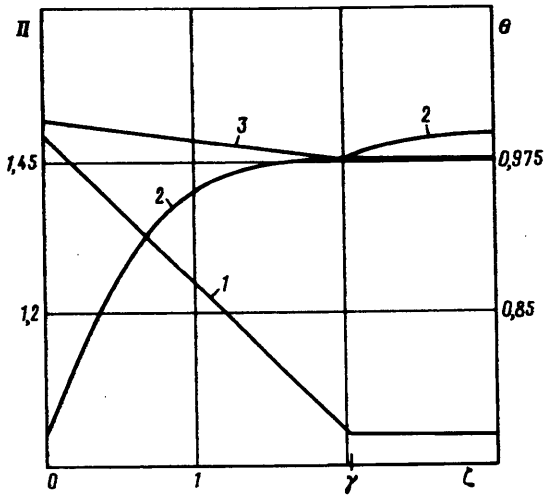
$$b \frac{\theta_*^2}{\Pi_*} \left[\frac{1}{\sigma_1^2 - 1} - \left\{ \frac{\Pi_* - 1}{\theta_* - 1} + \frac{1}{\sigma_1^2 - 1} \right\} F_1(\gamma) \right] - 1 > 0$$

$$F_1(\gamma) = \exp(-\gamma^2(\sigma_1^{-2} - 1)) \frac{\operatorname{erfc}(\gamma)}{\sigma_1 \operatorname{erfc}(\gamma\sigma_1^{-1})}, \quad b = \frac{T_0}{B}$$

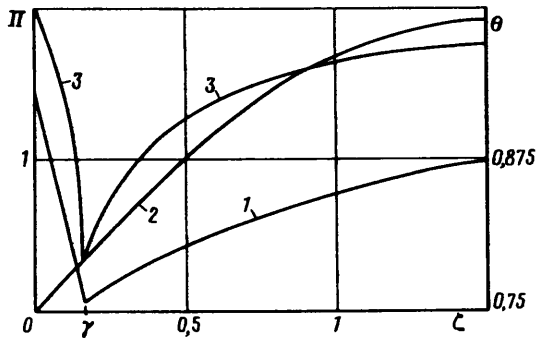
Условие равенства нулю левой части этого соотношения определяет критические поверхности в пространстве параметров. С одной стороны от критической поверхности существует непротиворечивое фронтное решение, а с другой – имеет место переохлаждение пара. На фиг. 3 приведены критические кривые на плоскости (k_d, P_d) , где $k_d = k \cdot 10^{17}$, $P_d = P^0/P_0$, при значениях пористости $m = 0,1$ и $0,2$ (соответственно кривые 1 и 2). Правее критической кривой (т. е. при больших проницаемостях) переохлаждение пара отсутствует.

Аналогичным образом определяется условие перегрева воды

$$\left[\frac{dT_f}{d\zeta} \right]_2 > \left[\frac{dT}{d\zeta} \right]_2 \quad (3.1)$$



Фиг. 1. Распределения безразмерных функций давления (кривая 1), температуры (кривая 2) и температуры фазового перехода (кривая 3) для высокопроницаемого пласта



Фиг. 2. Распределения безразмерных функций давления, температуры и температуры фазового перехода для низкопроницаемого пласта (обозначения, как на фиг. 1)

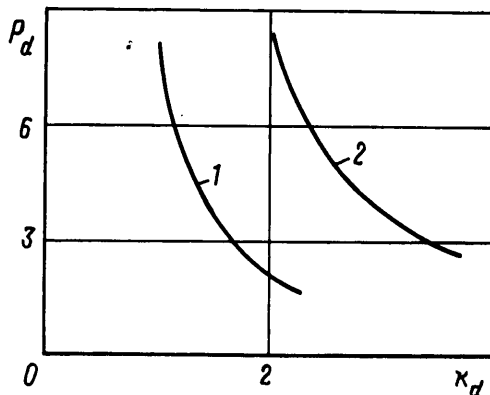
Используя автомодельное решение (2.1), (2.2), получаем

$$\left[1 - \frac{1}{\theta_*} F_2(\gamma) \right] \frac{\delta_2}{\sigma_2^2} \frac{\Pi_0}{\theta_0} + \frac{1}{b} \frac{\Pi_*}{\theta_*^2} F_2(\gamma) + \frac{\Pi_* - \Pi_0}{\theta_* - \theta_0} < 0$$

$$F_2(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha \gamma \exp(-\gamma^2 \alpha^2)}{\operatorname{erf}(\gamma \alpha)}$$

Проведенные численные эксперименты показали, что при всех допустимых значениях параметров условие перегрева воды (3.1) не выполняется. Это означает непротиворечивость решения в области за фронтом.

Заключение. Сформулированная математическая модель закачки воды в высокотемпературный пласт выявила существенную зависимость решения от коэффициента проницаемости. В автомодельной постановке показано, что при инъекции воды в высокопроницаемый геотермальный резервуар реализуется фронт испарения. В этом случае давление монотонно. При уменьшении проницаемости и возрастании роли



Фиг. 3. Критические кривые существования фронтного решения

тепловых процессов фронт испарения превращается во фронт конденсации пара. При низких проницаемостях существует диапазон параметров, в котором решение имеет термодинамическое противоречие, выражающееся в переохлаждении пара перед фронтом фазового перехода. По-видимому, в этом случае реализуется режим с образованием промежуточной области двухфазного состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01082).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bodvarsson G.S., Pruess K., O'Sullivan M.J. Injection and energy recovery in fractured geothermal reservoirs // Soc. Petr. Eng. Journal. 1985. V. 25. № 2. P. 303–312.
2. Pruess K., Calore C., Celati R., Wu Y.S. An analytical solution for heat transfer at a boiling front moving through a porous medium // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1987. V. 30. № 12. P. 2595–2602.
3. Garg S.K., Pritchett J.W. Cold water injection into single-and two-phase geothermal reservoirs // Water Resour. Res. 1990. V. 26. № 2. P. 331–338.
4. Pruess K. Grid orientation and capillary pressure effects in the simulation of water injection into depleted vapor zones / Geothermics. 1991. V. 20. № 5/6. P. 257–277.
5. O'Sullivan M.J. Geothermal reservoir simulation // Intern. J. Energy Res. 1985. V. 9. № 3. P. 319–332.
6. Вукалович М.П. Термодинамические свойства воды и водяного пара. М.: Машгиз, 1955. 92 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1996