

УДК 532.5.011.11

© 1996 г. О.М. КИСЕЛЕВ, О.В. ТРОЕПОЛЬСКАЯ

## О ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

Предложен метод решения задачи о поступательном движении цилиндра заданной формы под свободной поверхностью бесконечно глубокой весомой жидкости, позволяющий в отличие от существующих методов получать решения, переходящие в точные при стремлении числа Фруда к бесконечности. Подробно рассмотрено решение задачи о движении кругового цилиндра. Высказаны предположения о характерных особенностях точного решения общей задачи.

Задача об обтекании тела потоком весомой жидкости со свободной поверхностью имеет богатую историю, достаточно полно освещенную в обзорных работах [1–4]. Обзор численных методов, используемых для расчета течений со свободной поверхностью, можно найти в [5, 6].

Несмотря на значительный прогресс в развитии численных методов, задача об установившемся движении тела под свободной поверхностью весомой жидкости до сих пор не поддается решению в точной постановке. Попытка удовлетворения точных граничных условий на свободной поверхности при решении стационарной задачи приводит к расходимости итерационного процесса [7]. Исследовать стационарный режим обтекания с помощью решения начально-краевой задачи о разгоне тела из состояния покоя также не удается [6, 8].

Имеющиеся к настоящему времени приближенные решения задачи получены на основе сноса граничных условий со свободной поверхности на невозмущенный уровень жидкости при учете одного или двух (иногда трех) начальных членов в разложениях искомых функций в ряды Тейлора. Очевидно, такая процедура далеко не всегда оправдана. В предлагаемом ниже методе она отсутствует. В нем использована аппроксимация граничного условия, основанная на допущении о том, что модуль скорости на свободной поверхности близок к постоянному значению. Это позволяет получать решения, переходящие в точные при стремлении числа Фруда к бесконечности.

1. Пусть плоский стационарный потенциальный поток весомой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью  $\Omega$  обтекает гладкий замкнутый контур  $\Lambda$  в плоскости  $z = x + iy$  (фиг. 1, а). Ось  $y$  направлена вертикально вверх, ось  $x$  – вдоль невозмущенного уровня жидкости в направлении ее движения.

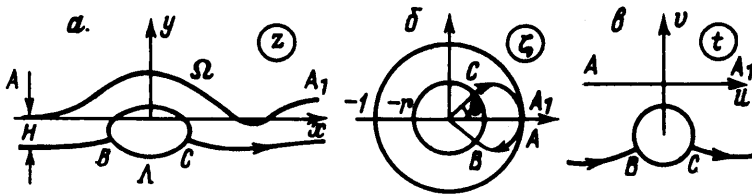
Уравнение Бернулли для свободной поверхности  $\Omega$  можно записать в виде

$$\ln V - \frac{1}{2} \ln(1 - 2vy) = \ln V_0, \quad z \in \Omega \quad (1.1)$$

где  $V$  – модуль скорости,  $V_0$  – значение  $V$  в невозмущенном потоке,  $v = g/V_0^2$ ,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Предположим, что на свободной поверхности  $V$  близко к  $V_0$  ( $|vy|$  мало), и заменим (1.1) на приближенное соотношение

$$\ln V + vy = \ln V_0, \quad z \in \Omega \quad (1.2)$$



Фиг. 1. Схема течения

Последнее можно рассматривать как уравнение Бернулли для свободной поверхности при движении жидкости в поле массовых сил, плотность которых имеет составляющие

$$F_x = 0, \quad F_y = -g \exp(-2vy) \quad (1.3)$$

(вместо  $F_x = 0, F_y = -g$  для обычного гравитационного поля).

Заметим, что аппроксимация (1.2) ранее использовалась авторами при исследовании движения под свободной поверхностью гидродинамических особенностей [9–11].

Пусть  $p$  – давление в жидкости,  $p_0$  – давление газа над свободной поверхностью,  $\rho$  – плотность жидкости,  $C_p = 2(p - p_0) / \rho V_0^2$  – коэффициент давления. С помощью уравнения Бернулли для обычного гравитационного поля легко убедиться, что при выполнении (1.2) справедливо соотношение

$$C_p = C_p(vy) = 1 - \exp(-2vy) - 2vy, \quad z \in \Omega \quad (1.4)$$

На фиг. 1, б и в показаны две вспомогательные области, используемые при решении задачи. В плоскости  $\zeta = |\zeta|e^{i\sigma}$  области  $G_z$ , занятой течением, поставим в соответствие кольцо  $r < |\zeta| < 1$ , при этом пусть свободной поверхности  $\Omega$  отвечает окружность  $|\zeta| = 1$ , бесконечно удаленным точкам  $A$  и  $A_1$  на  $\Omega$  – точка  $\zeta = 1$ , критическим точкам  $B$  и  $C$  на обтекаемом контуре  $\Lambda$  – точки  $\zeta = re^{-i\beta}$  и  $\zeta = re^{i\beta}$ . Пусть в плоскости  $t = u + iv$  области  $G_z$  соответствует область  $G_t$  – нижняя полуплоскость с удаленным из нее кругом  $|t - t_0| < 2r / (1 - r^2)$ ,  $t_0 = -i(1 + r^2) / (1 - r^2)$  (точка  $t = -i$  принадлежит этому кругу). Связь между  $t$  и  $\zeta$  устанавливают соотношения

$$\zeta = (t + i) / (t - i), \quad t = i(\zeta + 1) / (\zeta - 1) \quad (1.5)$$

Потребуем, чтобы функция  $z(t)$ , конформно отображающая  $G_t$  на  $G_z$ , удовлетворяла условиям

$$\text{Im } z(t) \rightarrow 0, \quad v = 0, \quad u \rightarrow -\infty \quad (1.6)$$

$$\frac{dz}{dt} = K, \quad u \rightarrow -\infty \quad \text{или} \quad v \rightarrow -\infty \quad (1.7)$$

$$\text{Re} \left( \ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) = \ln \left| \frac{dw}{dt} \right| - \ln V_0, \quad z \in \Omega \quad (1.8)$$

Здесь  $K$  – положительная постоянная, имеющая размерность длины,  $w$  – комплексный потенциал. Условия (1.6), (1.7) отражают характер затухания возмущений, условие (1.8) эквивалентно (1.2).

Функция  $dw/dt$  в плоскости  $\zeta$  строится по особенностям [12]

$$\frac{dw}{dt} = D \prod_{n=1}^{\infty} (\zeta - e^{i\beta} r^{2n-1})(\zeta - e^{-i\beta} r^{2n-1})(\zeta r^{2n-1} - e^{i\beta})(\zeta r^{2n-1} - e^{-i\beta})(\zeta - r^{2n})^{-2} (\zeta r^{2n} - 1)^{-2} \quad (1.9)$$

$$D = KV_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - r^{2n})^4 (1 - 2 \cos \beta r^{2n-1} + r^{4n-2})^{-2}$$

Подставив (1.9) в (1.8), получим

$$\operatorname{Re} \left( \ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) = \ln K + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\sigma, \quad \zeta = e^{i\sigma} \quad (1.10)$$

$$a_n = \frac{4r^{2n} - 4r^n \cos n\beta}{n(1 - r^{2n})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.11)$$

Нетрудно убедиться, что  $D = KV_0 e^{a_0}$ .

В соответствии с (1.6), (1.7), (1.10), (1.11)

$$\ln \frac{dz}{dt} + ivz = iat + ib + \ln K + F(\zeta), \quad a = vK = \frac{gK}{V_0^2} \quad (1.12)$$

где  $b$  – произвольная вещественная постоянная,  $F(\zeta)$  – голоморфная в кольце  $r < |\zeta| < 1$  функция, удовлетворяющая условиям

$$F(1) = 0, \quad \operatorname{Re} F(e^{i\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\sigma \quad (1.13)$$

Положив

$$\operatorname{Re} F(re^{i\sigma}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\sigma + d_n \sin n\sigma) \quad (1.14)$$

используем затем коэффициенты  $b_n, d_n$  для управления формой контура  $\Lambda$ .

Согласно (1.13), (1.14), функция  $F(\zeta)$  представима в виде

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^+ \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^- \zeta^{-n}, \quad A_n^+ = (a_n - b_n r^n + id_n r^n)(1 - r^{2n})^{-1}$$

$$A_n^- = (b_n r^n - a_n r^{2n} + id_n r^n)(1 - r^{2n})^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

$$A_0^+ = a_0 - 2i \sum_{n=1}^{\infty} d_n r^n (1 - r^{2n})^{-1}$$

Решая дифференциальное уравнение (1.12) относительно  $z(t)$ , с учетом (1.6) получим

$$vz = at + b - i \ln \left\{ 1 + iae^{-iat} \int_{-\infty}^t e^{iat} [e^{F(\zeta)} - 1] dt \right\} \quad (1.16)$$

Здесь интегрирование ведется от точки с координатами  $v = 0, u = -\infty$ .

2. Преобразуем выражение (1.16) к виду, более удобному для исследования. Для этого сначала представим  $\exp F(\zeta)$  в виде ряда Лорана

$$e^{F(\zeta)} = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n^+ \zeta^n \right) \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n^- \zeta^{-n} \right) \exp A_0^+$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^+ \zeta^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^+ \zeta^n, \quad \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^- \zeta^{-n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^- \zeta^{-n}$$

$$B_0^{\pm} = 1, \quad B_k^{\pm} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{\pm} A_{k-i}^{\pm}(k-i), \quad k=1, 2, \dots \quad (2.1)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^+ \zeta^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^- \zeta^{-n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^- \zeta^{-n}$$

$$C_n^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{\mp} B_{k+n}^{\pm}, \quad n=0, 1, \dots \quad (2.2)$$

$$e^{F(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^+ \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^- \zeta^{-n}, \quad D_n^{\pm} = C_n^{\pm} \exp A_0^{\pm}, \quad n=0, 1, \dots \quad (2.3)$$

В соответствии с (1.5) положим в (2.3)

$$\zeta^n = \left(1 + \frac{2i}{t-i}\right)^n, \quad \zeta^{-n} = \left(1 - \frac{2i}{t+i}\right)^n$$

При этом будем иметь

$$e^{F(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^- (t-i)^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^+ (t+i)^{-n}$$

$$E_0^- = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^- = 1 \quad (2.4)$$

$$E_n^{\mp} = (\pm 2i)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} D_k^{\pm}, \quad n=1, 2, \dots$$

С помощью последовательного интегрирования по частям получим

$$\int_{-\infty}^t \frac{e^{iat} dt}{(t \pm i)^n} = -e^{iat} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_{nk}}{(t \pm i)^k} + \omega_{nn} J^{\pm}(t), \quad n=2, 3, \dots$$

$$J^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{iat} dt}{t \pm i}, \quad \omega_{nn} = \frac{(ia)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (2.5)$$

$$\omega_{nk} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!} (ia)^{n-k-1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

С учетом (2.4), (2.5) выражение (1.16) принимает вид

$$vz = at + b - i \ln \Phi(t) \quad (2.6)$$

$$\Phi(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [G_n^-(t-i)^{-n} + G_n^+(t+i)^{-n}] + e^{-iat} [G_0^- J^-(t) + G_0^+ J^+(t)]$$

$$G_0^{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{\pm} \frac{(ia)^k}{(k-1)!}, \quad G_n^{\pm} = - \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k^{\pm} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} (ia)^{k-n}, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Формулы (1.11), (1.15), (2.1)–(2.4) и (2.7) в совокупности описывают алгоритм  $A$  для определения комплексных коэффициентов  $G_n^-, G_n^+$  в выражении (2.6) через вещественные коэффициенты  $b_n, d_n$  и параметры  $r, \beta, a$

$$(\{G_n^-\}, \{G_n^+\}) = A(\{b_n\}, \{d_n\}, r, \beta, a) \quad (2.8)$$

Функция  $J^-(t)$  однозначна в полуплоскости  $\text{Im } t \leq 0$ . Функция  $J^+(t)$  получает приращение, равное  $2\pi i e^{-a}$ , при положительном обходе любого замкнутого контура, содержащего точку  $\zeta = -i$ . Отсюда следует, что условие  $G_0^+ = 0$  является необходимым и достаточным условием замкнутости контура  $\Lambda$ .

Таким образом, заданным параметрам  $r, \beta, a$  и заданным достаточно быстро сходящимся последовательностям  $\{b_n\}, \{d_n\}$  формулы (1.9), (2.6), (2.8) при выполнении условия  $G_0^+ = 0$  ставят в соответствие некоторый замкнутый контур  $\Lambda$ , обтекаемый потоком жидкости, на поверхности которой выполняется условие (1.2). Положение контура  $\Lambda$  относительно оси  $y$  зависит от выбора постоянной  $b$ .

Нетрудно убедиться в справедливости формул

$$J^-(+\infty) = 2\pi i e^{-a}, \quad J^+(+\infty) = 0 \quad (2.9)$$

$$J^-(u + iv) = i\pi e^{-a} + e^{-a} Ei[a(1-v)] + e^{-av} \int_0^u \frac{e^{i\alpha\tau} d\tau}{\tau - i(1-v)} \quad (2.10)$$

$$Ei(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{nn!}, \quad x > 0$$

где  $Ei(x)$  – интегральная показательная функция,  $\gamma$  – постоянная Эйлера. Выражение (2.10) может быть использовано для вычисления  $J^-(t)$  в области  $G_r$ .

С помощью (2.9) из (2.6) при  $v = 0, u \rightarrow \infty$  получается асимптотическое выражение для формы свободной поверхности при  $x \rightarrow +\infty$

$$v(x + iy) = au + b - i \ln(1 + 2\pi e^{-a} G_0^- e^{-iau}) \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) описывает периодические волны. Пусть  $\lambda$  – длина волны,  $y_b$  и  $y_c$  – максимальное и минимальное значения  $y$  на  $\Omega$  при  $x \rightarrow +\infty, h$  и  $\alpha$  – высота и крутизна волны ( $h = y_b - y_c, \alpha = h/\lambda$ ). Из (2.11) следует, что при аппроксимации (1.2), как и в теории волн малой амплитуды,  $v\lambda = 2\pi$ . Поскольку, согласно (2.11) (в предположении, что  $q \leq 1$ )

$$vy_b = -\ln(1 - q), \quad vy_c = -\ln(1 + q), \quad q = 2\pi e^{-a} |G_0^-|$$

то справедливы соотношения

$$vy_c = -\ln(2 - e^{-vy_b}), \quad \alpha = (2\pi)^{-1} [vy_b + \ln(2 - e^{-vy_b})] \quad (2.12)$$

Таким образом, с ростом  $vy_b$  значение  $vy_c$  монотонно убывает, крутизна волны  $\alpha$  монотонно растет, причем (см. (1.4))

$$|y_c| < y_b, \quad |C_p(vy_c)| < |C_p(vy_b)|$$

3. Пусть  $\Delta\psi$  – приращение функции тока  $\psi$  при переходе от обтекаемого контура к свободной поверхности. Согласно (1.9), (1.5) и с учетом того, что  $D = KV_0 e^{a_0}$

$$\Delta\psi = 2KV_0 e^{a_0} J_0, \quad J_0 = J_0(r, \beta) = \int_r^1 (1 + \tau)^{-2} f_0(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

$$f_0(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau^2 + 2\tau \cos \beta r^{2n-1} + r^{4n-2})(1 + 2\tau \cos \beta r^{2n-1} + \tau^2 r^{4n-2})}{(\tau + r^{2n})^2 (1 + \tau r^{2n})^2}$$

Обозначим через  $H$  расстояние от разветвляющейся на контуре  $\Lambda$  линии тока до свободной поверхности при  $x = -\infty$ . Очевидно, что

$$H = \Delta\psi / V_0 = 2Ke^{a_0} J_0 \quad (3.2)$$

Используя  $H$  в качестве масштаба длины, положим  $Fr = V_0^2 / gH$  ( $Fr$  – число Фруда). Из (3.2) следует, что

$$Fr = (2ae^{a_0} J_0)^{-1} \quad (3.3)$$

Пусть  $\phi$  – потенциал скоростей,  $\Gamma$  – циркуляция скорости по контуру  $\Lambda$ . Согласно (1.9), (1.5)

$$\left. \frac{d\phi}{d\sigma} \right|_{\Lambda} = 4KV_0 r e^{a_0} (\cos \sigma - \cos \beta) e^{g(\sigma)} \quad (3.4)$$

$$g(\sigma) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos n\sigma, \quad g_n = \frac{2r^n - 2r^{2n} \cos n\beta}{n(1 - r^{2n})}$$

Разложим  $\exp g(\sigma)$  в ряд по  $\cos n\sigma$  [13]

$$\exp\left(2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos n\sigma\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos n\sigma \quad (3.5)$$

$$h_0 = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^2, \quad h_n = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e_k e_{k+n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$e_0 = 1, \quad e_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) e_k g_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставив (3.5) в (3.4) и проинтегрировав полученное выражение по  $\sigma$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , с учетом (3.2) получим

$$\gamma = \Gamma / HV_0 = 2\pi r (h_1 - 2h_0 \cos \beta) J_0^{-1} \quad (3.6)$$

Из (1.12), (2.4), (2.6) в предположении, что  $G_0^+ = 0$ , следует

$$\frac{dz}{dt} = K \frac{S}{N}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{NS'_t - SN'_t}{N^2}$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [E_n^-(t-i)^{-n} + E_n^+(t+i)^{-n}] \quad (3.7)$$

$$N = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [G_n^-(t-i)^{-n} + G_n^+(t+i)^{-n}] + G_0^- e^{-iat} J^-(t)$$

Подставив в соотношения

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\zeta}, \quad \frac{d^2 z}{d\zeta^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\zeta}\right)^2 + \frac{dz}{dt} \frac{d^2 t}{d\zeta^2}$$

выражения (3.7), выразив  $t$ ,  $dt/d\zeta$ ,  $d^2t/d\zeta^2$  через  $\zeta$  в соответствии с (1.5) и положив  $\zeta = re^{i\sigma}$ , найдем производные  $dz/d\zeta$ ,  $d^2z/d\zeta^2$  на контуре  $\Lambda$ .

Пусть  $s$  – дуговая абсцисса контура  $\Lambda$ , возрастающая при движении по контуру против часовой стрелки,  $\omega$  – угол между касательной к  $\Lambda$  и осью  $x$ ,  $\kappa = Hd\omega/ds$  – безразмерная кривизна контура,

$$q_1 = i(\zeta dz / d\zeta)|_{\Lambda}, \quad q_2 = -(\zeta dz / d\zeta + \zeta^2 d^2z / d\zeta^2)|_{\Lambda}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{ds}{d\sigma} = |q_1|, \quad \omega = \arg q_1, \quad \frac{d\omega}{d\sigma} = |q_1|^{-2} (\operatorname{Re} q_1 \operatorname{Im} q_2 - \operatorname{Im} q_1 \operatorname{Re} q_2) \quad (3.8)$$

Пусть  $P, Q, T, U$  – вещественные функции  $\sigma$  в соотношениях

$$\zeta \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\Lambda} = K(P + iQ), \quad \zeta^2 \frac{d^2z}{d\zeta^2} \Big|_{\Lambda} = K(T + iU)$$

Используя введенные обозначения, из (3.8) и (3.2) получим

$$\omega(\sigma) = -\operatorname{arctg} \frac{P}{Q}, \quad \kappa(\sigma) = \frac{2e^{a_0} J_0}{(P^2 + Q^2)^{3/2}} (P^2 + Q^2 + PT + QU) \quad (3.9)$$

Пусть  $R_x, R_y$  – составляющие главного вектора сил давления жидкости на контур  $\Lambda$  (без учета архимедовой силы),  $L_0$  – главный момент названных сил относительно некоторой точки  $z_0$ . Для коэффициентов сопротивления, подъемной силы и момента в соответствии с формулами Чаплыгина – Блазиуса будем иметь

$$C_x - iC_y = \frac{i}{V_0^2 H} \oint \left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta$$

$$C_L = -\frac{1}{V_0^2 H^2} \operatorname{Re} \oint \left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} (z - z_0) d\zeta \quad (3.10)$$

$$C_x = 2R_x / (\rho V_0^2 H), \quad C_y = 2R_y / (\rho V_0^2 H), \quad C_L = 2L_0 / (\rho V_0^2 H^2)$$

Здесь интегрирование ведется по контуру  $\zeta = re^{i\sigma}$ ,  $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ . Учитывая, что

$$\left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \Big|_{\Lambda} = -\frac{e^{-2i\sigma}}{r^2} \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \Big|_{\Lambda}, \quad \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{\Lambda} = re^{i\sigma} [K(P + iQ)]^{-1}$$

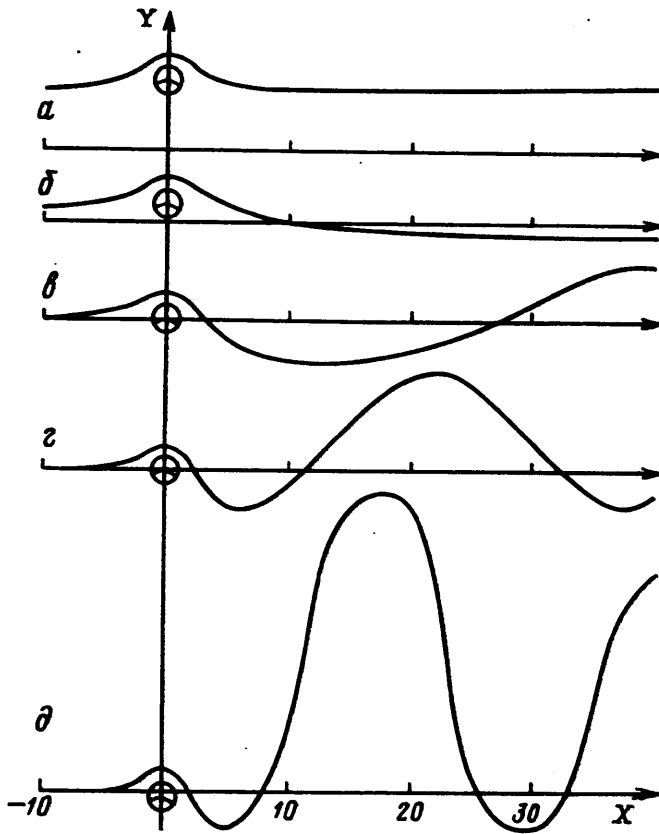
с помощью (3.4), (3.2) из (3.10) найдем

$$C_x - iC_y = \frac{8r^2 e^{a_0}}{J_0} \int_0^{2\pi} (\cos \sigma - \cos \beta)^2 e^{2g(\sigma)} (P + iQ)^{-1} d\sigma$$

$$C_L = \frac{4r^2}{J_0^2} \int_0^{2\pi} (\cos \sigma - \cos \beta)^2 e^{2g(\sigma)} \frac{QI - PJ}{P^2 + Q^2} d\sigma$$

где  $I, J$  – вещественные функции  $\sigma$  в соотношении  $(z - z_0)|_{\Lambda} = K(I + iJ)$ .

Приведенные выше формулы при заданных параметрах  $r, \beta, a$  и заданных последовательностях  $\{b_n\}, \{d_n\}$  позволяют находить зависимости  $\omega(\sigma), \kappa(\sigma)$ , характеризующие форму обтекаемого контура, а также величины  $C_x, C_y, C_L$ , характеризующие ди-



Фиг. 2. Форма свободной поверхности и положение контура при  $R/H = 1, \gamma = -3$ , варианты  $a-d$  соответствуют  $Fr = 10^5; 100; 10; 5; 3,96$

намическое воздействие потока на контур. В соответствии с (3.1), (3.3), (3.6) безразмерная циркуляция  $\gamma$  выражается только через  $r$  и  $\beta$ , а число Фруда  $Fr$  – через  $r, \beta, a$ .

4. Форму контура  $\Lambda$  зададим с помощью уравнения, связывающего безразмерную кривизну  $\kappa$  с углом наклона касательной  $\omega$ , и потребуем выполнения условий

$$\kappa = G(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (4.1)$$

$$\gamma = \Gamma / HV_0 = \gamma_0, \quad Fr = V_0^2 / gH = f_0 \quad (4.2)$$

где  $\gamma_0, f_0$  – заданные константы,  $G(\omega)$  – заданная функция. Задачу (1.1), (4.1), (4.2) назовем задачей  $A$ , задачу (1.2), (4.1), (4.2) – задачей  $A'$ .

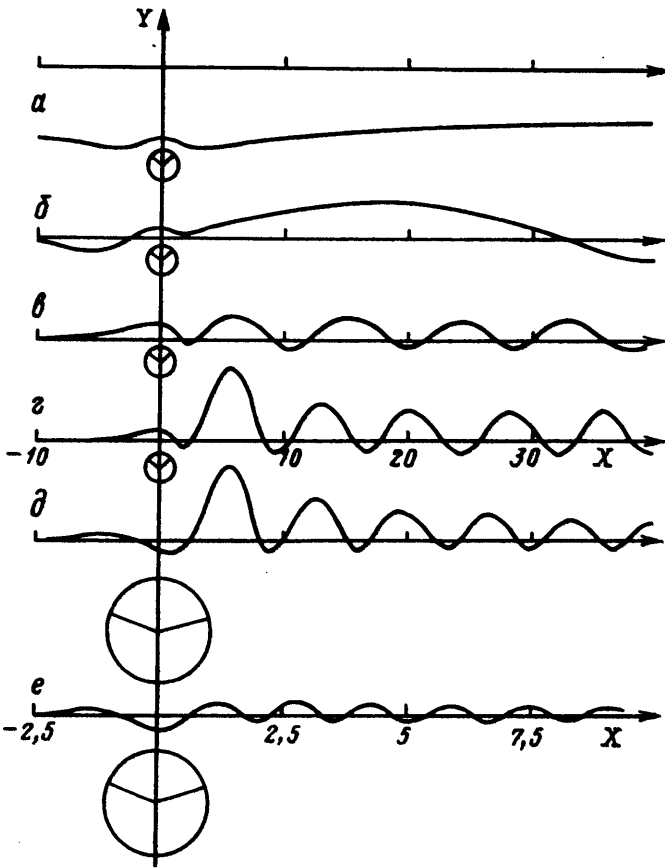
Решение задачи  $A'$  (значения параметров  $a, r, b_n, d_n$ ) можно искать, минимизируя функционал

$$W = \sum_{k=1}^L [\kappa(\sigma_k) - G(\omega(\sigma_k))]^2 + C|G_0^+|, \quad \sigma_k = 2\pi k / L$$

при ограничениях (4.2) ( $L$  – достаточно большое целое число,  $C$  – положительная константа, зависимости  $\omega(\sigma), \kappa(\sigma)$  заданы формулами (3.9)). Опыт авторов по исследованию обтекания кругового контура и эллиптического контура с отношением полуосей, равным  $1/2$ , свидетельствует об эффективности такого подхода.

Задачи  $A$  и  $A'$  для кругового контура ( $G(\omega) = \kappa_0 = \text{const}$ ) назовем задачами  $A_1$  и  $A'_1$  соответственно. Некоторые результаты решения задачи  $A'_1$  приведены на фиг. 2–5 и





Фиг. 3. Форма свободной поверхности и положение контура при  $R/H = 1, \gamma = 2$  варианты а-е соответствуют  $Fr = 10^3, 10; 1.4; 1.2; 0.28; 0.25$

в таблице. В расчетах полагалось  $L = 200, C = 50, b_n = 0$  при  $n > 9, d_n = 0$  при  $n \geq 1$ . При этом для всех рассмотренных вариантов оказались выполненными соотношения

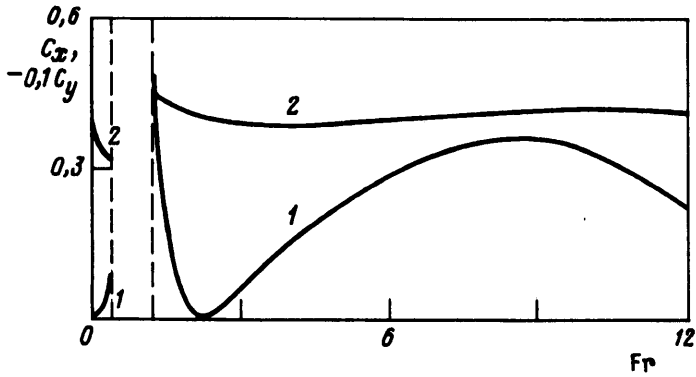
$$|G_0^+| < 10^{-3} \max(|G_0^-|, |G_1^-|, |G_1^+|)$$

$$|\kappa_0^{-1} \kappa(\sigma) - 1| < 10^{-2}, \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

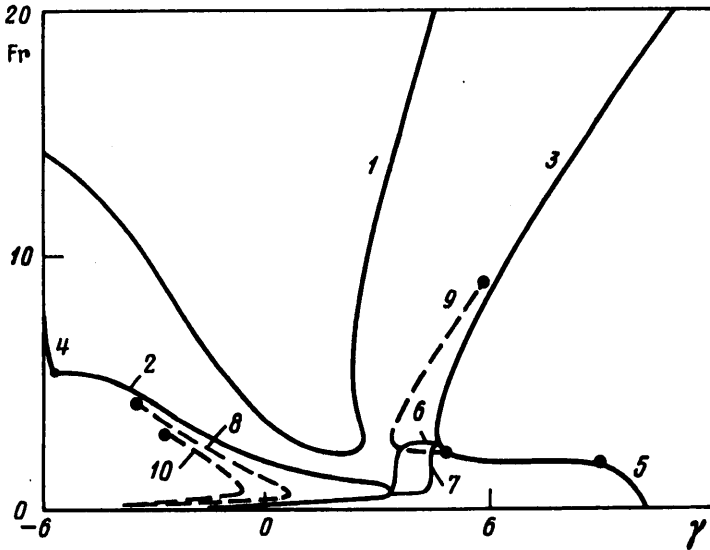
На фиг. 2 и 3 показаны форма свободной поверхности и положение контура  $\Lambda$  при  $R/H = 1, \gamma = -3$  (фиг. 2) и  $R/H = 1, \gamma = 2$  (фиг. 3) для ряда значений  $Fr$ ; отмечены радиусы круга, проходящие через точки разветвления и схода потока ( $R$  – радиус кругового контура, ось  $y$  проведена через центр круга,  $X = x/H, Y = y/H$ ).

Пусть  $\xi = vx, \eta = vy, \eta = f(\xi)$  – уравнение свободной поверхности  $\Omega$ ;  $\{D_k\}$  – множество точек  $D_k = D_k(\xi_k, \eta_k)$  на  $\Omega$ , в которых  $f(\xi)$  принимает экстремальные значения  $\eta_k = f(\xi_k)$ ;  $D_0$  – точка из  $\{D_k\}$ , наиболее близкая к оси  $y$ , проведенной через центр круга; остальные точки  $D_k$  пронумерованы в порядке возрастания их абсциссы;  $\eta_b = vy_b, \eta_c = vy_c, M = \sup f(\xi), m = \inf f(\xi), C_m = \sup |C_p(f(\xi))|$  при  $-\infty < \xi < \infty$  (см. (1.4)).

В таблице приведены значения  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_b, C_m$  при  $R/H = 1, \gamma = -3$  и 2 для ряда значений  $Fr$  (множитель  $l$  введен для удобства представления результатов).



Фиг. 4. Зависимость коэффициентов сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$  от числа Фруда  $Fr$  при  $R/H = 1, \gamma = 2$ . Кривая 1 -  $C_x$ , 2 -  $-0,1C_y$



Фиг. 5. Карта решений на плоскости параметров  $\gamma, Fr$  для задачи  $A_1'$ . Сплошные кривые -  $R/H = 1, 1 - M = 1/2, 2, 3 - M = \infty, 4, 5 - \gamma = \gamma_0^-; \gamma_0^+$ . 6, 7 - границы «переходной области». Штриховые кривые 8, 9 -  $M = \infty, R/H = 1/2, 10 - M = \infty, R/H = 1/4$ . Точки -  $M = \infty, \gamma = \gamma_0^\pm$

Звездочками отмечены значения  $\eta$ , для которых  $|C_p(\eta)| = C_m$ . Напомним, что  $\eta_c$  выражается через  $\eta_b$  согласно (2.12).

Для вариантов  $R/H = 1, \gamma = -3$  и  $R/H = 1, \gamma = 2$  характерны следующие общие особенности. При уменьшении  $Fr$  в интервале  $f_1 \leq Fr < \infty$  и увеличении  $Fr$  в интервале  $0 \leq Fr \leq f_2$  ( $f_1 \approx 3,96, f_2 \approx 0,14$  для  $\gamma = -3$  и  $f_1 \approx 1,20, f_2 \approx 0,28$  для  $\gamma = 2$ ) величины  $M$  и  $C_m$  монотонно растут до бесконечности. При  $Fr = f_1$  и  $Fr = f_2$  на оси  $\text{Im } t = 0$  имеется точка, в которой функция  $\Phi(t)$ , стоящая под знаком логарифма в формуле (2.6), обращается в нуль. При этом свободная поверхность образует всплеск бесконечной высоты с двумя вертикальными асимптотами, расстояние между которыми  $h$  удовлетворяет равенству  $\nu h = \pi$ . При  $f_2 < Fr < f_1$  в области  $G_1$  имеется по крайней мере

$\gamma$	Fr	$l$	$\eta_0$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_b$	$iC_m$
-3	$10^5$	$10^5$	7,537*	-3,427	3,560	-3,529	3,539	0,001
-3	$10^4$	$10^4$	6,241*	-3,427	3,560	-3,528	3,540	0,008
-3	$10^3$	$10^3$	4,957*	-3,430	3,573	-3,532	3,554	0,049
-3	$10^2$	$10^2$	3,701*	-3,418	3,675	-3,515	3,656	0,267
-3	50	$10^2$	6,663	-6,789	7,578*	-6,987	7,531	1,093
-3	20	10	1,407	-1,655	2,069*	-1,700	2,056	0,749
-3	10	10	2,371	-3,129	4,795*	-3,206	4,761	3,423
-3	5	1	0,362	-0,562	1,514*	-0,573	1,496	2,076
-3	3,96	1	0,406	-0,675	5,989*	-0,688	4,813	10,98
2	$10^5$	$10^5$	-5,921	-6,372*	4,193	-4,355	4,331	0,001
2	$10^4$	$10^4$	-4,323	-4,775*	4,188	-4,347	4,325	0,005
2	$10^3$	$10^3$	-2,721	-3,169	4,181	-4,328*	4,321	0,038
2	$10^2$	$10^2$	-1,031	-1,444	4,086	-4,077	4,225*	0,347
2	10	10	0,701	0,534	2,875	-2,302	2,976*	1,467
2	5	10	2,085	1,875	3,558	-2,642	3,591*	2,058
2	2	10	5,333*	-0,280	1,197	-0,927	1,074	4,107
2	1,4	1	0,601	-0,372	1,171*	-0,496	1,067	1,438
2	1,2	1	0,603	-0,512	4,864*	-0,650	2,760	8,729
2	0,28	1	-0,733	5,554*	-0,403	3,060	1,415	10,11
2	0,25	1	-0,629	1,131	-0,208	1,209*	0,672	1,507
2	0,2	1	-0,540*	0,370	0,025	0,602	0,238	0,865

одна точка  $t = t_0$ , в которой  $\Phi(t_0) = 0$ . При этом функция  $z(t)$  (2.6) многозначна и отображение  $G_t$  на  $G_z$  не имеет смысла – физически реализуемого решения задачи  $A'_1$  не существует. При  $f_1 \leq Fr < \infty$  в точке  $D_0$  (вблизи контура  $\Lambda$ ) функция  $f(\xi)$  имеет локальный максимум, при  $0 \leq Fr \leq f_2$  – локальный минимум.

При  $Fr = 0$ , когда свободная поверхность горизонтальна, функция  $f(\xi)$  принимает конечные значения, которые могут быть определены через  $V$  из условия (1.1) для задачи  $A_1$  и из условия (1.2) для задачи  $A'_1(f(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ).

Фигура 4 дает представление о зависимости  $C_x$  и  $C_y$  от  $Fr$  при  $R/H = 1$ ,  $\gamma = 2$ . При  $Fr \approx 2,2$  волны на свободной поверхности отсутствуют и  $C_x = 0$ . Кроме того,  $C_x \rightarrow 0$  при  $Fr \rightarrow 0$  и  $Fr \rightarrow \infty$ . При  $Fr \rightarrow \infty$   $C_y \rightarrow C_y^0 \approx -4,33$ .

Принятая схема обтекания (критические точки лежат на контуре  $\Lambda$ ) обуславливает наличие предельных значений  $\gamma$ :  $\gamma_0^- \leq \gamma \leq \gamma_0^+$ , причем  $\gamma = \gamma_0^-$  отвечает значению  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \gamma_0^+$  – значению  $\beta = \pi$ . Для задач  $A_1$  и  $A'_1$   $\gamma_0^\pm = \gamma_0^\pm(R/H, Fr)$ . В частности, для варианта  $R/H = 1$  обеих задач  $\gamma_0^- = -199,77$ ,  $\gamma_0^+ = 10,18$  при  $Fr = 0$  и  $\gamma_0^- \rightarrow -7,32$ ,  $\gamma_0^+ \rightarrow 17,50$  при  $Fr \rightarrow \infty$ .

На фиг. 5 сплошными линиями показаны некоторые характерные кривые в плоскости параметров  $\gamma, Fr$  для варианта  $R/H = 1$  задачи  $A'_1$ . На кривой 1  $M = 1/2$ , на кривых 2 и 3  $M = \infty$ , на кривых 4 и 5  $\gamma = \gamma_0^-$  и  $\gamma = \gamma_0^+$ , кривые 6 и 7 – верхняя и нижняя границы «переходной области» (см. ниже). Штриховыми линиями на фиг. 5 показаны кривые  $M = \infty$  для варианта  $R/H = 1/2$  (кривые 8 и 9) и для варианта  $R/H = 1/4$  (кривая 10;  $M < \infty$  при  $R/H = 1/4$  и  $0 \leq \gamma \leq \gamma_0^+$ ). Точки соответствуют значениям  $M = \infty$ ,  $\gamma = \gamma_0^\pm$ .

Пусть  $E$  – пространство параметров  $R/H, \gamma, Fr: 0 < R/H < \infty, -\infty < \gamma < \infty, 0 \leq Fr < \infty$ . Поверхности в пространстве  $E$ , на которых  $M = \infty$  или  $\gamma = \gamma_0^\pm$ , будем называть

предельными поверхностями соответственно первого и второго рода для задачи  $A'_1$ .

Анализ численных результатов для вариантов  $R/H = 1, 1/2, 1/4$  позволяет выделить в пространстве  $E$  следующие характерные области. В области  $G_1$ , содержащей часть плоскости  $\gamma = 0$  при  $Fr \rightarrow \infty$  (назовем  $G_1$  областью больших чисел Фруда), с уменьшением  $Fr$  при фиксированных значениях  $R/H$  и  $\gamma$  значение  $\eta_m = \max(M, |m|)$  монотонно растет. В области  $G_2$ , примыкающей к плоскости  $Fr = 0$  (назовем  $G_2$  областью малых чисел Фруда), с увеличением  $Fr$   $\eta_m$  монотонно растет. В переходной области  $G_3$ , расположенной между  $G_1$  и  $G_2$ ,  $\eta_m$  является немонотонной функцией  $Fr$ : с возрастанием  $Fr$   $\eta_m$  сначала убывает, затем возрастает. Границами областей  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  служат предельные поверхности первого и второго рода, часть плоскости  $Fr = 0$ , поверхности, отделяющие  $G_3$  от  $G_1$  и  $G_2$ , и поверхность, отделяющая  $G_1$  от  $G_2$ . Вне областей  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  и их границ физически реализуемого решения задачи  $A'_1$  не существует (формально решение может быть найдено в области, ограниченной плоскостью  $Fr = 0$  и предельными поверхностями второго рода).

Для всех рассмотренных вариантов задачи  $A'$   $C_m$ ,  $\eta_m \rightarrow 0$  при  $Fr \rightarrow 0$ , причем, согласно (1.4),  $C_m \sim 2\eta_m^2$ . Свободная поверхность вместе с контуром  $\Lambda$  неограниченно поднимается над невозмущенным уровнем жидкости при  $\gamma < 0$ ,  $Fr \rightarrow \infty$  и неограниченно опускается под ним при  $\gamma > 0$ ,  $Fr \rightarrow \infty$  (аналогичная ситуация имеет место при обтекании вихря [9]).

Величина  $\eta_m$  является важной характеристикой решения задачи  $A'$ , поскольку переход от точного граничного условия (1.1) к приближенному условию (1.2) совершен в предположении, что  $\eta_m$  мало. При  $Fr \rightarrow \infty$  решения задачи  $A'$  стремятся к решениям задачи  $A$  (к точным решениям исходной задачи), поскольку при этом  $\eta_m \rightarrow 0$ . Когда  $\eta_m$  не мало, нельзя гарантировать близость решений задач  $A'$  и  $A$ . Некоторое представление о различиях между ними можно получить, рассматривая задачу о периодических волнах.

Параметры периодических гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости могут быть рассчитаны с помощью второго метода Стокса с использованием результатов Вилтона (см. [14, гл. 5, § 2]). Положив в формулах Вилтона параметр  $b$  равным 0,2, получим  $\eta_b = 0,2287$

$$\eta_c = -0,182, \quad \alpha = 0,0684, \quad \frac{v\lambda}{2\pi} = 0,955, \quad \frac{V_b}{V_0} = 0,737, \quad \frac{V_c}{V_0} = 1,168 \quad (4.3)$$

Здесь  $V_b$  и  $V_c$  – скорости на гребне волны и в нижней точке впадины. В то же время, согласно (2.12), аппроксимация (1.2) при  $\eta_b = 0,2287$  приводит к соотношениям

$$\eta_c = -0,186, \quad \alpha = 0,0660, \quad \frac{v\lambda}{2\pi} = 1, \quad \frac{V_b}{V_0} = 0,796, \quad \frac{V_c}{V_0} = 1,204 \quad (4.4)$$

Соответствующие величины в (4.3) и (4.4) отличаются не более чем на 8%. Это дает основание полагать, что решение задачи  $A'$ , удовлетворяющее условию  $\eta_m \leq 0,23$ , достаточно близко к точному решению.

Согласно (1.1), предельным значением  $M = \sup f(\xi)$  для задачи  $A$  является  $1/2$ . Когда  $v\gamma = 1/2$  в некоторой точке  $\Omega$ , скорость в этой точке равна нулю, а свободная поверхность образует угол, равный  $2\pi/3$ . Периодические гравитационные волны предельной высоты на поверхности бесконечно глубокой жидкости характеризуются соотношениями [1]  $\eta_c = -0,243$ ,  $\alpha = 0,142$ ,  $v\lambda = 2\pi \cdot 0,833$ ,  $V_b/V_0 = 0$ ,  $V_c/V_0 = 1,219$ . В то же время аппроксимация (1.2) при  $\eta_b = 1/2$  дает  $\eta_c = -0,332$ ,  $\alpha = 0,132$ ,  $v\lambda = 2\pi$ ,  $V_b/V_0 = 0,607$ ,  $V_c/V_0 = 1,393$ .

Поле массовых сил (1.3) качественно мало отличается от обычного гравитационного поля. Это позволяет предположить, что решения задач  $A$  и  $A'$  обладают многими общими свойствами.

Выскажем следующую гипотезу. В пространстве  $E$  для задачи  $A$  существуют области  $G_1, G_2$  и  $G_3$  с теми же свойствами, что и для задачи  $A'$ ; вне этих областей и их границ физически реализуемое решение задачи  $A$  не существует. (Под  $R$  здесь следует понимать некоторый характерный размер фигуры, ограниченной контуром  $L$ . На предельной поверхности первого рода для задачи  $A$   $M = 1/2$ ).

**Заключение.** В теории волн малой амплитуды, которую обычно применяют для исследования равномерного движения цилиндра под свободной поверхностью жидкости, предполагается, что на свободной поверхности модуль скорости  $V$  близок к своему значению в невозмущенном потоке  $V_0$ , а угол наклона скорости к оси  $x$  мал. Предполагается также, что допустим перенос граничных условий со свободной поверхности на невозмущенный уровень жидкости. Таким образом, малость величины  $\eta_m$  является лишь одним из ряда условий применимости теории волн малой амплитуды, а область применимости этой теории составляет лишь часть области применимости аппроксимации (1.2).

В общей области применимости обе теории должны давать близкие результаты. Это подтверждается сравнением результатов решения задачи  $A'$  при  $\gamma = 0, R/H = 1/4$  с результатами решения задачи об обтекании кругового цилиндра, полученными на основе теории волн малой амплитуды первого и второго порядков [15].

Постановка задачи, используемая в настоящей работе, отличается от общепринятой. Обычно фиксируют положение обтекаемого контура в полуплоскости  $\text{Im } z < 0$ . В частности, в задаче об обтекании кругового цилиндра обычно задают радиус круга  $R$  и отстояние его центра от невозмущенного уровня жидкости  $H_1$ . При  $\gamma = 0$  и достаточно малых значениях  $R/H$  величины  $H$  и  $H_1$  близки и различие в постановках задач несущественно. Однако во многих случаях только подход, принятый в настоящей работе, отвечает существу исследуемого явления (см. фиг. 2, 3).

Авторы признательны Г.Ю. Степанову и Д.В. Маклакову за полезные обсуждения работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00111).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // Handbuch der Physik, Berlin: Springer Verlag, 1960. В. 9. Р. 446–778.
2. Wehausen J.V. The wave resistance of ships // Advances in Applied Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1973. V. 13. P. 93–245.
3. Степаняц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
4. Стурова И.В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн: Препринт № 5. Красноярск: СО ВЦ АН СССР, 1990. 48 с.
5. Yeung R.W. Numerical methods in free-surface flows // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, Calif.: Annu. Revs. Inc. 1982. V. 14. P. 395–442.
6. Афанасьев К.Е. Моделирование свободных границ в гидродинамике идеальной жидкости // Гидродинамика ограниченных потоков. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1988. С. 9–18.
7. Maruo H., Ogiwara S. A method of computation for steady ship waves with non-linear free surface conditions // Prepr. Papers. 4th Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics, Washington, 1985. P. 218–233.
8. Haussling H.J., Coleman R.M. Finite-difference computations using boundary-fitted coordinates for free – surface potential flows generated by submerged bodies // Proc. 2nd Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics. Berkeley: Univ. California, 1977. P. 221–233.
9. Киселев О.М. Вихрь под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 45–52.

10. *Киселев О.М.* Источник под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 3. С. 87–91.
11. *Тропольская О.В.* Обтекание круглого цилиндра потоком тяжелой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1969. № 11. С. 94–102.
12. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
13. *Lenau Ch. W., Street R.L.* A non-linear theory for symmetric, supercavitating flow in a gravity field // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. Pt. 2. P. 257–280.
14. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
15. *Tuck E.O.* The effect of non-linearity at the free surface on flow past a submerged cylinder // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt. 2. P. 401–414.

Казань

Поступила в редакцию  
18.X.1995