

УДК 532.546

© 1996 г. Р.Д. КАНЕВСКАЯ, Р.М. КАЦ

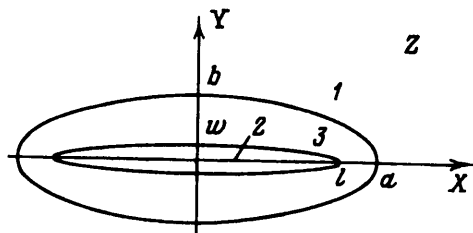
АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассматривается плоское стационарное течение однородной несжимаемой жидкости в пласте, содержащем вертикальную трещину гидроразрыва эллиптической формы. Фильтрация в пласте и в трещине подчиняется закону Дарси. Получены точные решения задачи о притоке к трещине конечной проводимости как в случае однородного пласта, так и при наличии в окрестности трещины области, отличающейся по проницаемости от остального пласта. На основе полученных решений оценивается влияние параметров загрязненной зоны вокруг скважины на ее продуктивность при наличии трещины конечной проводимости, анализируется эффективность гидроразрыва добывающих и нагнетательных скважин при регулярных системах разработки, предлагается метод учета трещин гидроразрыва произвольной ориентации и длины в конечно-разностных моделях фильтрации в системе скважин.

Гидравлический разрыв пласта является одним из наиболее эффективных методов повышения продуктивности скважин, вскрывающих низкопроницаемые, слабодреннруемые коллекторы [1]. Задача о притоке к трещине эллиптической формы конечной проводимости в неограниченном однородном пласте рассмотрена в [2, 3], показано существование предельной длины трещины, превышение которой не приводит к увеличению продуктивности скважин. В [4] исследована задача о притоке к вертикальной трещине большой протяженности при различных формах раскрытия. В [2] рассмотрена задача о притоке к идеальной трещине (трещине бесконечной проводимости), расположенной внутри загрязненной зоны, отличающейся от остального пласта пониженной проницаемостью. Влияние интерференции скважин на эффективность гидроразрыва изучалось в [5–7]. Однако анализ сложных течений в системе скважин с трещинами гидроразрыва возможен только на основе численного моделирования. Одновременное моделирование течения в пласте и в трещине конечно-разностными методами сопряжено со значительными вычислительными и методическими проблемами, связанными с необходимостью введения расчетных ячеек, размеры которых различаются на несколько порядков [8, 9]. Другой способ моделирования основан на представлении трещины в виде совокупности точечных источников или стоков и использовании специальных формул притока, при этом трещины рассматриваются как идеальные [10, 11]. В обоих случаях накладываются существенные ограничения на ориентацию и расположение трещин по отношению к разностной сетке.

В данной работе предлагается более универсальный подход к моделированию трещин, являющийся обобщением метода, развитого в [12–14] для вертикальных скважин, и позволяющий моделировать трещины конечной проводимости, произвольной длины и ориентации.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская стационарная фильтрация однородной жидкости в неограниченном пласте, обусловленная точечным источником (стоком) интенсивности Q , расположенным в центре конфокальных эллипсов с полуосями l ,



Три области фильтрации: 1 – пласт; 2 – трещина; 3 – загрязненная зона

w и a, b соответственно и фокусным расстоянием f : $a^2 - b^2 = l^2 - w^2 = f^2$. Эллипсы ограничивают включения, отличающиеся от основного пласта проводимостью (см. фигуру). Предполагается, что пласт имеет постоянную толщину h и проницаемость k_1 . Включение, моделирующее трещину гидроразрыва, характеризуется проницаемостью k_2 и полуосями l и w , соответствующими полудлине и полуширине трещины. Область, заключенная между эллипсами, имеет проницаемость k_3 . При $k_3 < k_1$ эта область моделирует загрязненную зону. Если движение жидкости в пласте и в трещине подчиняется линейному закону фильтрации, то распределение потенциала ω в каждой области определяется уравнением Лапласа

$$\Delta \omega_i = 0; \quad \omega_i = \frac{k_i h p_i}{\mu} \quad (1.1)$$

Здесь p_i – давление, μ – вязкость жидкости, индекс $i = 1$ соответствует внешней области, индекс $i = 2$ – трещине, индекс $i = 3$ – области, окружающей трещину. Перейдем к комплексной переменной $Z = re^{i\varphi}$ и комплексному потенциалу $\Phi = \omega + i\psi$, где r – расстояние от источника, φ – полярный угол, отсчитываемый от направления, определяемого большей осью трещины (см. фигуру), ψ – функция тока рассматриваемого течения. Тогда общее решение рассматриваемой задачи представляется в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{Q}{2\pi} \ln Z + k_1 \sum_{n=0}^{\infty} B_n Z^{-2n}; \quad \Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln Z + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} D_n Z^{2n} \\ \Phi_3 &= \frac{Q}{2\pi} \ln Z + k_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n Z^{2n} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь B_n, D_n, G_n – произвольные вещественные коэффициенты.

Границы трещины и окружающей ее области в комплексной форме имеют вид

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{f}{2} \left(\frac{e^{it}}{q} + \frac{q}{e^{it}} \right) = \frac{f}{2q} e^{it} (1 + q^2 e^{-2it}); \quad q = \sqrt{\frac{l-w}{l+w}}; \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ Z_1 &= \frac{f}{2} \left(\frac{e^{it}}{p} + \frac{p}{e^{it}} \right) = \frac{f}{2p} e^{it} (1 + p^2 e^{-2it}); \quad p = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

На линии раздела областей давление и функция тока должны быть непрерывными [15]. Таким образом, условия сопряжения решений (1.2) на границах (1.3) имеют вид

$$\frac{1}{k_3} \operatorname{Re} \Phi_3(Z_j) = \frac{1}{k_j} \operatorname{Re} \Phi_j(Z_j); \quad \operatorname{Im} \Phi_3(Z_j) = \operatorname{Im} \Phi_j(Z_j), \quad j = 1, 2 \quad (1.4)$$

2. Построение решения. Вдоль линий (1.3) справедливы представления

$$Z_2^{-2n} = \left(\frac{f}{2}\right)^{-2n} q^{2n} e^{-2nti} (1 + q^2 e^{-2ti})^{-2n} = \left(\frac{f}{2}\right)^{-2n} q^{2n} e^{-2nti} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{2k} e^{-2kti}\right)^{2n}$$

$$Z_1^{-2n} = \left(\frac{f}{2}\right)^{-2n} p^{2n} e^{-2nti} (1 + p^2 e^{-2ti})^{-2n} = \left(\frac{f}{2}\right)^{-2n} p^{2n} e^{-2nti} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p^{2k} e^{-2kti}\right)^{2n}$$

Эти ряды сходятся, так как являются суммами геометрических прогрессий, знаменатели которых по модулю меньше единицы. Следовательно, ряды по отрицательным степеням Z_2 и Z_1 в уравнениях (1.4) могут быть представлены в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n Z_1^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n p^{2n} e^{-2nti}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} G_{-n} Z_1^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n p^{2n} e^{-2nti}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_{-n} Z_2^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n q^{2n} e^{-2nti} \quad (2.1)$$

Здесь A_n и E_n – вещественные коэффициенты. Ряды по положительным степеням Z_2 и Z_1 с учетом (1.3) преобразуются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n Z_2^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{f}{2}\right)^{2n} q^{-2n} e^{2nti} \left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k q^{2(2n-k)} e^{-2ti(2n-k)}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{f}{2}\right)^{2n} C_{2n}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} D_k \left(\frac{f}{2}\right)^{2k} C_{2k}^{k-n} q^{-2n} [(1 + q^{4n}) \cos 2nt + i(1 - q^{4n}) \sin 2nt] \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n Z_2^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left(\frac{f}{2}\right)^{2n} q^{-2n} e^{2nti} \left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k q^{2(2n-k)} e^{-2ti(2n-k)}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left(\frac{f}{2}\right)^{2n} C_{2n}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} G_k \left(\frac{f}{2}\right)^{2k} C_{2k}^{k-n} q^{-2n} [(1 + q^{4n}) \cos 2nt + i(1 - q^{4n}) \sin 2nt] \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n Z_1^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left(\frac{f}{2}\right)^{2n} p^{-2n} e^{2nti} \left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k p^{2(2n-k)} e^{-2ti(2n-k)}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left(\frac{f}{2}\right)^{2n} C_{2n}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} G_k \left(\frac{f}{2}\right)^{2k} C_{2k}^{k-n} p^{-2n} [(1 + p^{4n}) \cos 2nt + i(1 - p^{4n}) \sin 2nt] \right\}$$

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}; \quad m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \quad (2.2)$$

Поскольку $|e^{-2ti} q^2| < 1$ и $|e^{-2ti} p^2| < 1$, вдоль кривых (1.3) справедливы разложения:

$$\ln Z_2 = \ln \frac{f}{2q} + it + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nti}$$

$$\ln Z_1 = \ln \frac{f}{2p} + it + \sum_{n=1}^{\infty} p^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nti} \quad (2.3)$$

Подставляя выражения (2.1)–(2.3) в уравнения (1.4) и приравнявая соответствующие коэффициенты при $\sin 2nt$, $\cos 2nt$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и свободные члены, получим

$$A_n = \frac{Q}{2\pi k_1} \frac{(-1)^n}{n} \left[1 - \frac{(1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{1 - q^{4n} \lambda_2 + p^{4n} \lambda_1 (1 - q^{4n} \lambda_2)} \right] \quad (2.4)$$

$$E_n = \frac{Q}{2\pi k_3} \frac{(-1)^n}{n} \left[1 - \frac{(1 + \lambda_1 p^{4n})(1 - \lambda_2)}{1 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1 - q^{-4n}\lambda_2)} \right] \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} G_k \left(\frac{f}{2} \right)^{2k} C_{2k}^{k-n} = \frac{Q}{2\pi k_3} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\lambda_1(1 - \lambda_2)p^{4n}}{1 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1 - q^{-4n}\lambda_2)} \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} D_k \left(\frac{f}{2} \right)^{2k} C_{2k}^{k-n} = \frac{Q}{2\pi k_2} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\lambda_1 p^{4n} - \lambda_2 q^{4n}}{1 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1 - q^{-4n}\lambda_2)} \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k \left(\frac{f}{2} \right)^{2k} C_{2k}^k = B_0 - G_0 - \frac{Q}{2\pi k_3} \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \left(\ln \frac{f}{2} - \ln p \right) \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \left(\frac{f}{2} \right)^{2k} C_{2k}^k = B_0 - D_0 + \frac{Q}{2\pi k_3} \left(\frac{2\lambda_2}{1 + \lambda_2} \left(\ln \frac{f}{2} - \ln q \right) - \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \left(\ln \frac{f}{2} - \ln p \right) \right) \quad (2.9)$$

$$\lambda_1 = \frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3}, \quad \lambda_2 = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}$$

Любое значение $Z \neq 0$ может быть выражено следующим образом:

$$Z = \frac{f}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right), \quad v = \frac{Z}{f} - \sqrt{\frac{Z^2}{f^2} - 1} \quad (2.10)$$

Так как $C_{2k}^{k-n} = C_{2k}^{k+n}$, при $n \leq k$ имеем

$$Z^{2k} = \sum_{n=0}^{2k} C_{2k}^n \left(\frac{f}{2} \right)^{2k} v^{2(k-n)} = \sum_{n=0}^k C_{2k}^{k-n} \left(\frac{f}{2} \right)^{2k} (v^{2n} + v^{-2n}) + C_{2k}^k \left(\frac{f}{2} \right)^{2k} \quad (2.11)$$

С учетом (2.6)–(2.11) могут быть вычислены суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k Z^{2k} = \frac{Q}{2\pi k_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [v^{2n} + v^{-2n}]}{n} \frac{\lambda_1(1 - \lambda_2)p^{4n}}{1 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1 - q^{-4n}\lambda_2)} + \quad (2.12)$$

$$+ B_0 - G_0 - \frac{Q}{2\pi k_3} \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \ln \frac{f}{2p}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k Z^{2k} = \frac{Q}{2\pi k_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [v^{2n} + v^{-2n}]}{n} \frac{\lambda_1 p^{4n} - \lambda_2 q^{4n}}{1 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1 - q^{-4n}\lambda_2)} + \quad (2.13)$$

$$+ B_0 - D_0 + \frac{Q}{2\pi k_3} \left[\frac{2\lambda_2}{1 + \lambda_2} \ln \frac{f}{2p} - \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \ln \frac{f}{2p} \right]$$

Сопоставляя выражения (1.3), (2.1) и (2.10) и учитывая равенства (2.4), (2.5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{-k} Z^{-2k} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n v^{2n} = \frac{Q}{2\pi k_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n}}{n} \left[1 - \frac{(1 - \lambda_2)(1 + \lambda_1 p^{4n})}{1 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1 - q^{-4n}\lambda_2)} \right] \quad (2.14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k Z^{-2k} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v^{2n} = \frac{Q}{2\pi k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n}}{n} \left[1 - \frac{(1 - \lambda_2)(1 + \lambda_1)}{1 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1 - q^{-4n}\lambda_2)} \right] \quad (2.15)$$

Подстановка соотношений (2.12)–(2.15) в уравнения (1.2) дает распределение комплексного потенциала точечного источника, расположенного на неограниченной

плоскости в центре включений, границы которых являются конфокальными эллипсами

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \frac{Q}{2\pi} \ln Z + k_1 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n}}{n} \left[1 - \frac{(1-\lambda_2)(1+\lambda_1)}{1-q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1-q^{-4n}\lambda_2)} \right] = \\
 &= k_1 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{f}{2} - \ln v - (1-\lambda_2)(1+\lambda_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n}}{n(1-q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1[1-q^{-4n}\lambda_2])} \right) \\
 \Phi_2 &= k_2 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [v^{2n} + v^{-2n}]}{n} \frac{\lambda_1 p^{4n} - \lambda_2 q^{4n}}{1-q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1(1-q^{-4n}\lambda_2)} + \\
 &+ \frac{Q}{2\pi} \ln Z + \frac{Q(1+\lambda_2)}{2\pi(1-\lambda_2)} \left[\frac{2\lambda_2}{1+\lambda_2} \ln \frac{f}{2q} - \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1} \ln \frac{f}{2p} \right] \\
 \Phi_3 &= \frac{Q}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [v^{2n}(\lambda_2 - q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1[1-q^{-4n}\lambda_2]) + v^{-2n}\lambda_1(1-\lambda_2)p^{4n}]}{n(1-q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1[1-q^{-4n}\lambda_2])} + \\
 &+ k_3 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \ln Z - \frac{Q}{2\pi} \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1} \ln \frac{f}{2p} = \\
 &= k_3 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left[(1-\lambda_2) \ln Z - \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1} \ln \frac{f}{2p} + \lambda_2 \ln \frac{f}{2} - \lambda_2 \ln v \right] + \\
 &+ \frac{Q}{2\pi} (1-\lambda_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [v^{-2n}\lambda_1 p^{4n} + v^{2n}(-q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1[1-q^{-4n}\lambda_2])]}{n(1-q^{4n}\lambda_2 + p^{4n}\lambda_1[1-q^{-4n}\lambda_2])}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

При любых соотношениях проницаемостей k_1, k_2 и k_3 $|\lambda_{1,2}| < 1$.

Если пласт однородный, то $k_1 = k_2 = k_3$, поэтому $\lambda_{1,2} = 0$, $\Phi = (Q/2\pi) \ln Z + \text{const}$.

Случай $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$ соответствует трещине конечной проводимости в однородном пласте [2, 3]. При этом выражения (2.16) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= k_1 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{f}{2} - \ln v - (1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n}}{n(1-q^{4n}\lambda)} \right) = \\
 &= k_1 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{f}{2} + (1-\lambda) \ln \frac{2Z}{f} - \lambda \ln v + (1-\lambda) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \ln [1 + q^{4m} v^2] \right) \\
 \Phi_2 &= k_2 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} [v^{2n} + v^{-2n}]}{n f^{2n}} \frac{\lambda q^{4n}}{1-q^{4n}\lambda} + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln Z + \frac{2\lambda}{1-\lambda} \ln \frac{f}{2q} \right) = \\
 &= k_2 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln Z + \frac{2\lambda}{1-\lambda} \ln \frac{f}{2q} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \ln \left[1 + q^{8m} + q^{4m} \left(\frac{4Z^2}{f^2} - 2 \right) \right] \right) \\
 \lambda &= \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Если включение бесконечно проводящее, что соответствует идеальной трещине, то имеем $k_2 \rightarrow \infty$, $\lambda_2 = 1$. При этом давление в трещине постоянно и решение (2.16) совпадает с полученным в [2] для описания притока к идеальной трещине, окруженной загрязненной зоной эллиптической формы.

Если $k_3 \gg k_2$, $\lambda_2 = -1$, то постоянно давление вне включения, контур которого является эквипотенциалю. Потенциал точечного источника, расположенного в центре

пласта с эллиптическим контуром питания, согласно (2.16) имеет вид

$$\Phi_2 = k_2 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln \frac{2Zq}{f} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \ln \left[1 + q^{8m} + q^{4m} \left(\frac{4Z^2}{f^2} - 2 \right) \right] \right\}$$

Отсюда после преобразований может быть получена формула притока к скважине, расположенной в центре эллиптического пласта [15]

$$p_c - p_w = \frac{Q}{2\pi k_2 h} \left(\ln \frac{f}{r_w} - \ln \frac{2K}{\pi} - \ln \sqrt{k^*} \right), \quad q^4 = \exp \left(-\pi \frac{K'}{K} \right)$$

Здесь K – полный эллиптический интеграл с модулем k^* , p_c и p_w – значения давления на контуре питания и на скважине соответственно.

При $\lambda_1 = -1$, $k_3 \rightarrow \infty$ решение (2.16) для внешней области описывает распределение потенциала идеальной трещины в бесконечном пласте [15].

При $\lambda_1 = 1$, $k_1 \rightarrow \infty$ давление во внешней области постоянно, контур большего эллипса является эквипотенциалью. В этом случае решение (2.16) описывает распределение потенциала трещины конечной проводимости, расположенной в центре пласта с эллиптическим контуром питания, конфокальным границе трещины. В частности, при $p \rightarrow 0$ контур является удаленным и решение задачи с точностью до константы совпадает с (2.17).

3. Приток к одиночной трещине конечной проводимости, расположенной в центре кругового пласта с удаленным контуром питания. Пусть $r_w \ll f$ – радиус скважины, $R_c \gg f$ – радиус удаленного контура питания, на котором задано постоянное давление p_c .

При $Z_w = r_w e^{i\varphi}$, где $|Z_w| = r_w \ll cd$, распределение (2.16) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_3 &\approx k_3 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left[(1 - \lambda_2) i \varphi + \lambda_2 i \frac{\pi}{2} + \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} \ln r_e \right] \\ \ln r_e &= \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1} \left[(1 - \lambda_2) \ln r_w - \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \ln \frac{f}{2p} + \lambda_2 \ln \frac{f}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda_1 p^{4n} - q^{4n} \lambda_2 + p^{4n} \lambda_1 [1 - q^{-4n} \lambda_2]]}{n(1 - q^{4n} \lambda_2 + p^{4n} \lambda_1 [1 - q^{-4n} \lambda_2])} \right] \end{aligned}$$

Таким образом, в достаточно малой окрестности источника давление практически не зависит от полярного угла φ

$$p_w \approx \frac{\mu B_0}{h} + \frac{Q\mu}{2\pi k_1 h} \ln r_e \quad (3.1)$$

Значения потенциала и давления на удаленном контуре $Z_c = R_c e^{i\varphi}$ определяются выражениями

$$\Phi_1 \approx k_1 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \ln Z_c; \quad p_c \approx \frac{\mu B_0}{h} + \frac{Q\mu}{2\pi k_1 h} \ln R_c \quad (3.2)$$

Вычитая давление (3.1) из (3.2), получим формулу притока к одиночной трещине конечной проводимости от удаленного контура

$$Q = Q_0 \frac{\ln R_c / r_w}{\ln R_c / r_e}, \quad Q_0 = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \frac{p_c - p_w}{\ln R_c / r_w} \quad (3.3)$$

Здесь Q_0 – приток к скважине без трещины.

В случае, когда $\lambda_1 = 0$, т.е. загрязненная зона вокруг трещины отсутствует, имеем

$$Q = Q_0 \ln \frac{R_c}{r_w} \left[(1 - \lambda_2) \ln \frac{R_c}{r_w} + \lambda_2 \ln 2 \frac{R_c}{f} - (1 - \lambda_2) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_2^n \ln(1 - q^{4n}) \right]^{-1} \quad (3.4)$$

Если трещина имеет бесконечную проводимость, т.е. $\lambda_2 = 1$, формула (3.3) принимает вид

$$Q = Q_0 \ln \frac{R_c}{r_w} \left[\ln 2 \frac{R_c}{f} - \frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_1} \ln p \right]^{-1}$$

Если вокруг скважины без трещины имеется загрязненная зона радиуса b , то приток определяется выражением

$$Q_{0d} = Q_0 \ln \frac{R_c}{r_w} \left[\ln \frac{R_c}{r_w} + \frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_1} \ln \frac{b}{r_w} \right]^{-1} \quad (3.5)$$

В табл. 1 приведены значения безразмерного дебита Q/Q_0 в зависимости от полу-длины трещины l , отношения проницаемостей пласта и трещины k_2/k_1 и параметров загрязненной зоны: величины b , определяющей размеры загрязнения, и отношения k_3/k_1 , определяющего его проводимость. В расчетах принято, что радиус контура $R_c = 500$ м, половина раскрытия трещины $w = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Представленные результаты показывают, что увеличение длины трещины не приводит к неограниченному росту дебита скважины, что подтверждается существованием предельной длины трещины [3]. Влияние параметров загрязненной зоны на величину дебита наиболее существенно в случае коротких трещин, а также в высокопроницаемых пластах. Во многих реальных ситуациях наличие вокруг эллиптической трещины конфокальной загрязненной зоны лишь незначительно влияет на величину дебита. Таким образом, если скважина окружена естественной или искусственно созданной областью пониженной проницаемости, создание трещины гидроразрыва позволяет практически исключить влияние этой области на приток флюида в скважину.

4. Использование аналитических решений для анализа интерференции скважин с гидроразрывами при регулярных системах расстановки скважин. Интерференция скважин, имеющих трещины гидроразрыва, может быть проанализирована путем использования формулы (2.16) для потенциала и принципа суперпозиции. Для простоты рассматривается случай, когда половина длины трещины l существенно меньше расстояния между скважинами. Тогда, согласно (2.16), потенциал поля, создаваемого трещиной, в точке расположения любой другой скважины или трещины определяется по формуле (3.2) и совпадает с потенциалом точечного источника, находящегося в центре трещины. В соответствии с принципом суперпозиции результирующее распределение потенциала группы скважин вычисляется как сумма потенциалов отдельных источников. Таким образом, давление на контуре скважины, имеющей трещину гидроразрыва и находящейся в начале координат, может быть определено в результате суммирования выражения вида (3.1) и слагаемых $Q_i \mu \ln R_i / 2\pi k_i h$, где Q_i – дебит или расход скважины, находящейся на расстоянии R_i от начала координат.

В качестве примера рассмотрим пятиточечную систему расстановки скважин [17]. Пусть добывающие скважины расположены в точках с координатами (mR, nR) , нагнетательные скважины – в точках $((m + 0,5)R, (n + 0,5)R)$, где m, n – целые числа, R – расстояние между скважинами в ряду. Дебит добывающих скважин Q , расход на нагнетательной скважине $-Q$. Обозначим через Q_0 дебит скважины в пятиточечной системе до гидроразрывов, Q_1 – дебит в случае, когда гидроразрывы проведены только в добывающих или только в нагнетательных скважинах, и Q_2 – дебит в случае, когда гидроразрывы проведены во всех скважинах.

Таблица 1

k_2/k_1	$l, \text{ м}$	$k_3/k_1 = 1$ $b = 0 \text{ м}$	$k_3/k_1 = 0,1$ $b = 0,1 \text{ м}$	$k_3/k_1 = 0,1$ $b = 0,5 \text{ м}$	$k_3/k_1 = 0,1$ $b = 1 \text{ м}$	$k_3/k_1 = 0,2$ $b = 1 \text{ м}$
10^6	0	1,00	0,60	0,31	0,25	0,43
	20	2,35	2,33	2,22	2,11	2,24
	50	3,05	3,04	2,97	2,89	2,97
	100	3,94	3,92	3,85	3,79	3,87
	200	5,45	5,45	5,42	5,32	5,39
$0,5 \cdot 10^6$	0	1,00	0,60	0,31	0,25	0,43
	20	2,34	2,32	2,22	2,10	2,23
	50	3,03	3,01	2,94	2,86	2,95
	100	3,87	3,85	3,79	3,71	3,81
	200	5,23	5,20	5,15	5,06	5,17
10^4	0	1,00	0,60	0,31	0,25	0,43
	20	2,03	2,01	1,91	1,82	1,92
	50	2,22	2,19	2,12	2,04	2,12
	100	2,31	2,29	2,20	2,13	2,21
	200	2,37	2,34	2,26	2,18	2,26
$0,5 \cdot 10^4$	0	1,00	0,60	0,31	0,25	0,43
	20	1,88	1,84	1,73	1,64	1,75
	50	1,97	1,93	1,83	1,74	1,84
	100	2,01	1,97	1,87	1,78	1,88
	200	2,03	1,99	1,89	1,80	1,90
10^2	0	1,00	0,60	0,31	0,25	0,43
	20	1,10	0,89	0,67	0,57	0,71
	50	1,10	0,89	0,67	0,57	0,71
	100	1,10	0,89	0,67	0,57	0,71
	200	1,10	0,89	0,67	0,57	0,71
$0,5 \cdot 10^2$	0	1,00	0,60	0,31	0,25	0,43
	20	1,02	0,76	0,55	0,46	0,60
	50	1,02	0,76	0,55	0,46	0,60
	100	1,02	0,76	0,55	0,46	0,60
	200	1,02	0,76	0,55	0,46	0,60

Если во всех добывающих и нагнетательных скважинах проведен гидроразрыв и параметры трещин одинаковые, то перепад давления между нагнетательной p_i и добывающей p_p скважинами определяется выражением

$$p_i - p_p = \frac{Q_2 \mu}{\pi k_1 h} \left(\ln \frac{R}{\sqrt{2} r_e} - S \right) \quad (4.1)$$

Здесь r_e — эквивалентный радиус скважины, вычисляемый по формуле (3.2). Постоянная $S \approx 0,619$ вычисляется в результате суммирования числовых рядов.

Если трещины гидроразрыва имеются только в добывающих или только в нагнетательных скважинах, то разность давлений принимает вид

$$p_i - p_p = \frac{Q_1 \mu}{\pi k_1 h} \left(\frac{1}{2} \left[\ln \frac{R}{\sqrt{2} r_e} + \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1} \ln \frac{R}{\sqrt{2} r_w} - \frac{2 \lambda_1}{1 - \lambda_1} \ln \frac{R}{\sqrt{2} b} \right] - 0,619 \right) \quad (4.2)$$

Если гидроразрыв вообще не проводился, имеем

$$p_i - p_p = \frac{Q_0 \mu}{\pi k_1 h} \left(\frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1} \ln \frac{R}{\sqrt{2} r_w} - \frac{2 \lambda_1}{1 - \lambda_1} \ln \frac{R}{\sqrt{2} b} - 0,619 \right) \quad (4.3)$$

При фиксированном перепаде давления прирост дебита в результате гидроразрыва во всех скважинах составляет

$$\frac{Q_2}{Q_0} = \left[\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} \ln \frac{R}{\sqrt{2}r_w} - \frac{2\lambda_1}{1-\lambda_1} \ln \frac{R}{\sqrt{2}b} - 0,619 \right] \left(\ln \frac{R}{\sqrt{2}r_e} - 0,619 \right)^{-1} \quad (4.4)$$

Сопоставление выражения (4.4) с формулами (3.3), (3.5) показывает, что прирост дебита за счет гидроразрыва при пятиточечном размещении скважин выше, чем для одиночной скважины в круговом пласте с радиусом контура $R_c = R/\sqrt{2}$.

Из формул (4.1)–(4.3) имеем

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_0} \right)$$

Отсюда следует, что при пятиточечном размещении скважин проведение гидроразрывов только в добывающих или только в нагнетательных скважинах дает прирост дебита Q_1/Q_0 не более чем в 2 раза. Этот результат хорошо согласуется с полученным в [7] численно.

Аналогично могут быть рассмотрены другие системы расстановки скважин.

5. Разностно-аналитический подход к моделированию процессов разработки нефтяных месторождений с гидроразрывами в отдельных скважинах. Использование конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений двух- и трехмерной фильтрации при численном моделировании нефтяных пластов с трещинами гидроразрыва сопряжено с большими вычислительными и методическими проблемами, связанными с необходимостью введения расчетных ячеек, размеры которых различаются на несколько порядков [8, 9]. Поэтому подход с одновременным моделированием течения в пласте и в трещине при помощи конечно-разностных алгоритмов недостаточно эффективен для решения практических задач. В [9] предлагается частичное разделение моделей пласта и трещины. При этом разностные сетки для пласта и для трещины независимы, а дополнительный модуль – специальный интерфейс – осуществляет "стыковку" моделей, пересчитывая модифицированные параметры скважин и расчетных блоков, внутри которых расположена трещина. Другой подход основан на моделировании трещины гидроразрыва как совокупности точечных источников (стоков), находящихся в расчетных ячейках, через которые проходит трещина [10, 11]. Интенсивности этих источников определяются при помощи специальных формул притока, что в конечном итоге сводится к подбору или аналитическим оценкам коэффициентов продуктивности, которые впоследствии вводятся в традиционные численные модели фильтрации. В [10] получены такие формулы притока в предположении, что трещина идеальная. Во всех описанных методах накладываются существенные ограничения на ориентацию и расположение трещин по отношению к разностной сетке.

При моделировании вертикальных скважин обычно предполагается, что в окрестности скважины течение близко к радиальному и приток Q_0 описывается формулой (3.3), где p_c – давление в блоке, в котором расположена скважина, а величина R_c определяется размерами разностной сетки [12–14]. На основе полученных выше аналитических решений могут быть выведены аналогичные зависимости для моделирования трещин конечной проводимости, произвольной длины и ориентации. Рассматриваются два подхода: 1) трещина моделируется как совокупность стоков (источников), расположенных по одному в каждом расчетном блоке, через который она проходит; при этом дебит скважины определяется суммированием дебитов отдельных стоков; 2) течение в трещине моделируется численно и предполагается одно- или двумерным соответственно при двух- и трехмерном моделировании пласта; при этом считается, что в окрестности скважины структура течения достаточно хорошо описывается аналитическим решением (2.16) или (2.17), на основе которого выводится формула притока.

Пусть p – давление в точке Z , тогда, согласно (2.17), имеем

$$Q = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \frac{p - p_w}{P(Z)}, P(Z) = \rho(Z) - \rho(ir_w) \quad (5.1)$$

$$\rho(Z) = \operatorname{Re} \left[(1-\lambda) \ln \frac{2Z}{f} + \lambda \ln \left[\frac{Z}{f} + \sqrt{\frac{Z^2}{f^2} - 1} \right] + (1-\lambda) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \ln \left[1 + q^m \left(\frac{Z}{f} - \sqrt{\frac{Z^2}{f^2} - 1} \right)^2 \right] \right]$$

В общем случае трещина проходит через несколько расчетных ячеек и произвольно ориентирована по отношению к разностной сетке. Пусть $r_{1,2}$ – расстояния границ ячейки от центра трещины, отсчитываемые вдоль оси трещины. Тогда линии $Z_1 = r_1 e^{i\varphi}$ и $Z_2 = r_2 e^{i\varphi}$ ограничивают часть трещины, заключенную внутри ячейки. Поток q из пласта в трещину через участки границы, заключенные внутри ячейки, определяется выражением

$$q = 2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} v_n ds = -2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = 2(\Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2)) \quad (5.2)$$

Здесь v_n – нормальная к границе составляющая скорости потока, s – направление касательной.

Из формулы (2.17) следует

$$\Psi(r_i) = \operatorname{Im}(\Phi_1(Z_i)) = \frac{Q}{2\pi} \Psi(r_i) \quad (5.3)$$

$$\Psi(r_i) = (1-\lambda) \frac{w}{r_i} + \lambda \arctan \frac{\sqrt{f^2 - r_i^2}}{r_i} - (1-\lambda) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \arctan \frac{q^{4m} r_i \sqrt{f^2 - r_i^2}}{(1 - q^{4m}) f^2 / 2 + q^{4m} r_i}$$

$$\Psi(r_w) = \Psi(w) = \pi / 2, \quad \Psi(l) = 0$$

При выводе формулы (5.3) предполагается, что $r_i \gg w$, при этом $\varphi \approx \sin \varphi = w / r_i$. Подставляя выражение (5.3) в (5.2), получим

$$q = Q(\Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2)) / \pi \quad (5.4)$$

Рассмотрим сначала метод моделирования трещины как совокупности стоков. В этом случае конечно-разностная аппроксимация уравнения материального баланса для ячейки, через которую проходит трещина, имеет вид

$$\frac{k_1 h}{\mu} \sum_{i=1}^4 a_i (p_i - p_0) - q = 0; \quad a_{1,3} = \frac{\Delta y}{\Delta x_{1,3}}, \quad a_{2,4} = \frac{\Delta x}{\Delta y_{2,4}} \quad (5.5)$$

Здесь, как и в [12–14], используется пятиточечный шаблон, $\Delta x, \Delta y$ – размеры ячейки, $\Delta x_i, \Delta y_i$ – расстояния от узла, находящегося в данной ячейке до соседних узлов, $i = 1, \dots, 4$, p_i – давления в соответствующих узлах сетки, p_0 – давление в рассматриваемой ячейке. Из уравнений (5.1), (5.4), (5.5) получим выражение потока q_0 для ячейки, в которой расположен центр трещины (сток), и потока q для любой другой ячейки, содержащей трещину

$$q_0 = \frac{k_1 h}{\mu} \left[2(\pi - \Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2)) \sum_{i=1}^4 a_i (p_0 - p_w) \right] \left[\sum_{i=1}^4 a_i P(Z_i) - 2(\pi - \Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2)) \right]^{-1} \quad (5.6)$$

$$q = \frac{k_1 h}{\mu} \left[2(\Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2)) \sum_{i=1}^4 a_i (p_0 - p_w) \right] \left[\sum_{i=1}^4 a_i P(Z_i) - 2(\Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2)) \right]^{-1}$$

Здесь Z_i – комплексная координата i -го узла в системе координат, связанной с трещиной; r_1, r_2 – расстояния точек пересечения трещины с границами ячейки от центра трещины. Если трещина заканчивается внутри ячейки, то $r_2 = l$.

R, м	L, м	n	Q/Q ₁		R, м	L, м	n	Q/Q ₁	
			1	2				1	2
700	100	27	1,001	1,002	700	80	3	0,990	0,990
700	100	13	1,000	1,001	400	100	27	1,000	1,002
700	100	7	1,000	0,997	400	100	11	1,000	1,000
700	100	3	0,988	–	400	100	3	0,993	0,989

Заметим, что если трещина отсутствует, то $P(Z_i) = \ln Z_i / r_w$, $\Psi(r_{1,2}) = 0$ и формула (5.6) совпадает с формулой, предложенной в [13] для вертикальных скважин.

Рассмотрим теперь второй подход к моделированию трещин, при котором течение вдоль трещины и обмен потоками с пластом рассчитываются конечно-разностными методами. Предполагается, что большая ось трещины направлена вдоль оси x разностной сетки, центр трещины находится в узле разностной сетки. Формула притока вводится только для ячейки, содержащей центр трещины. Аналогично (5.6) получим

$$Q = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \sum_{i=1}^4 c_i (p_0 - p_w) \left[\sum_{i=1}^4 c_i P(Z_i) - 2\pi \right]^{-1} \quad (5.7)$$

$$c_{1,3} = a_{1,3} \left(1 + \frac{2wk_2}{\Delta y k_1} \right), \quad c_{2,4} = a_{2,4}$$

Здесь k_2 – проницаемость трещины, $2w$ – ширина трещины, которая в пределах ячейки предполагается неизменной, Q – суммарный дебит скважины. Если вся трещина содержится внутри одной ячейки, то формулы (5.6) и (5.7) совпадают.

Для сравнения предложенных методов моделирования скважин с трещинами гидроразрыва проведены расчеты. Рассматривался элемент пятиточечной системы расстановки скважин, представляющий собой квадрат, в вершинах которого расположены нагнетательные скважины, а в центре – добывающая, имеющая трещину гидроразрыва. Предполагалось, что ось трещины параллельна стороне квадрата. Расстояние между соседними нагнетательными скважинами 700; 400 м, полудлина трещины $l = 100, 80$ м, полуширина трещины $2 \cdot 10^{-3}$ м, проницаемость трещины $40 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, проницаемость пласта $4 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$, толщина пласта 5 м, вязкость жидкости 0,5 сПз, разность давлений на нагнетательной и добывающей скважинах 10 МПа. Определялся установившийся дебит добывающей скважины. Расчеты проводились конечно-разностным методом¹ с использованием двух описанных выше подходов к моделированию трещины. Расчетный элемент покрывался равномерной разностной сеткой с распределенными узлами, n – число узлов разностной сетки между соседними нагнетательными скважинами. Скважины располагались в узлах сетки, трещина либо проходила через несколько расчетных блоков, либо целиком находилась внутри одной ячейки. Результаты расчетов и их сопоставление с аналитическим решением показаны в табл. 2. В двух последних столбцах таблицы приведен расчетный дебит Q , полученный с использованием соответственно первого и второго подходов к моделированию трещин и отнесенный к аналитическому результату Q_1 , определяемому формулой (4.2).

Использование предложенных подходов к моделированию трещин гидроразрыва дает удовлетворительное совпадение с точным решением и может применяться в численных моделях нефтяных и газовых месторождений. Увеличение расстояния между узлами разностной сетки лишь незначительно снижает точность результата. Расчеты, проведенные при полудлине трещины 80 м, показали возможность использования крупных расчетных ячеек, одна из которых целиком содержит трещину.

¹ Программная реализация метода выполнена А.Р. Андриасовым (ИНПЕТРО).

Заключение. Получено аналитическое решение задачи о притоке жидкости к вертикальной эллиптической трещине гидроразрыва конечной проводимости, окруженной конфокальной областью, отличающейся по проницаемости от остального пласта. Показано, что влияние размеров и проводимости загрязненной зоны, окружающей трещину, наиболее существенно в случае коротких трещин и в высоко проницаемых пластах. Подбирая определенным образом длину и проводимость трещины гидроразрыва, можно практически полностью исключить влияние загрязненной зоны на величину дебита скважины.

Исследование эффективности гидроразрыва при пятиточечной системе расстановки скважин показало, что проведение гидроразрыва только в добывающих или только в нагнетательных скважинах дает прирост дебита жидкости не более чем в 2 раза.

На основе полученного аналитического решения предложен метод учета трещин гидроразрыва в численных моделях фильтрации в системе скважин. Этот метод дает удовлетворительные результаты даже при использовании разностной сетки с крупными ячейками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir stimulation. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1989. 300 p.
2. Prats M. Effect of vertical fractures on reservoir behavior – incompressible fluid case // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1961. V. 1. № 2. P. 105–118.
3. Кадет В.В., Селяков В.И. Фильтрация флюида в среде, содержащей эллиптическую трещину гидроразрыва // Изв. вузов. Нефть и газ. 1988. № 5. С. 54–60.
4. Зазовский А.Ф., Тодуа Г.Т. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 107–116.
5. Mousli N.A., Raghavan R., Cinco-Ley H., Samaniego V.F. The influence of vertical fractures intercepting active and observation wells on interference tests // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1982. V. 22. № 6. P. 933–944.
6. Ентов В.М., Мурзенко В.В. Стационарная фильтрация однородной жидкости в элементе разработки нефтяного пласта с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 1. С. 104–112.
7. Мурзенко В.В. Аналитические решения задач стационарного течения жидкости в пластах с трещинами гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 2. С. 74–82.
8. Settari A. A new general model of fluid loss in hydraulic fracturing // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1985. V. 25. № 4. P. 491–501.
9. Settari A., Puchyr P.J., Bachman R.C. Partially decoupled modeling of hydraulic fracturing processes // SPE Prod. Eng. 1990. V. 5. № 1. P. 37–44.
10. Nghiem L.X. Modeling infinite-conductivity vertical fractures with source and sink terms // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1983. V. 23. № 4. P. 633–644.
11. Nghiem L.X., Forsyth P.A., jr., Behie A. A fully implicit hydraulic fracture model // J. Petrol. Technol. 1984. V. 36. № 6. P. 1191–1198.
12. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1978. V. 18. № 3. P. 183–194.
13. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1983. V. 23. № 3. P. 531–543.
14. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir Simulation. Pt 3. Off-center and multiple wells within a wellblock // SPE Res. Eng. 1990. V. 5. № 2. P. 227–232.
15. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
17. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media. N.Y.: McGraw-Hill. 1937. 763 p. (Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Гостоптехиздат, 1949. 628 с.).

Москва

Поступила в редакцию
31.X.1995