МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1996

УДК 532.516.013.4:536.24

©1996 г. Р.Р. МУГИНОВ, Б.Л. СМОРОДИН

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕМЕННОГО ТЕПЛОПОТОКА НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследовано возникновение конвекции Рэлея в полубесконечном массиве жидкости, нормально к поверхности которой гармонически изменяется теплопоток. Задача об эволюции возмущений скорости и температуры на фоне нестационарного равновесия решается численно, методом конечных разностей. Определены границы устойчивости и характеристики критических возмущений в зависимости от числа Прандтля. Изучено поведение критического числа Рэлея при конечных глубинах слоя.

Гармоническое изменение условий нагрева на поверхности жидкости (температуры либо теплопотока) приводит к появлению тепловой волны, распространяющейся в глубь жидкости. Механическое равновесие жидкости в этом случае может оказаться неустойчивым, происходит параметрическое возбуждение конвективных движений. Возникновение конвекции в поле силы тяжести, обусловленное рэлеевским мехнизмом, исследовано в [1–2] в случае гармонического изменения температуры на поверхности жидкости. Показано, что при любых значениях числа Прандтля в этом случае наиболее опасны полуцелые возмущения, период которых вдвое превосходит период внешних воздействий. Изменение теплопотока на свободной поверхности при отсутствии силы тяжести приводит к параметрическому возбуждению конвекции Марангони [3]. Причем для чисел Прандтля, превышающих некоторое пороговое значение, критическими являются целые возмущения, период которых совпадает с периодом изменения теплопотока на свободной границе [4–5].

В настоящей работе рассматривается задача о динамическом возбуждении конвекции Рэлея с помощью переменного теплопотока на свободной поверхности.

1. Постановка задачи. На горизонтальной свободной недеформируемой поверхности жидкости расположено начало координат. Ось Z направлена вертикально вниз, а оси X и Y – по горизонтали. Жидкость заполняет полубесконечное пространство $0 < Z < \infty$. Тепловой поток, заданный на поверхности жидкости, направлен нормально к границе и меняется по закону

$$\lambda \frac{\partial T_0}{\partial t} = Q_0 \cos \omega t$$

где Q_0 – амплитуда, а ω – частота изменения теплопотока, λ – коэффициент теплопроводности жидкости. За начало отсчета принимается постоянная температура на дне слоя: $z \to \infty$, $T_0 = 0$.

При таких условиях нагрева возможно нестационарное механическое равновесие с распределением температуры в жидкости $T_0(z, t)$, которое определяется решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}$$

где χ – коэффициент температуропроводности. Равновесный градиент температуры может быть записан в форме

$$\frac{\partial T_0}{\partial z}=\frac{Q_0}{\lambda}\cos(\omega t-\varkappa z)\exp(-\varkappa z);\quad \varkappa=\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$$

Распределение температуры в состоянии нестационарного механического равновесия имеет характер скин-слоя с характерной глубиной $\delta = 1/\varkappa$.

Рассмотрим малые возмущения нестационарного равновесия ($\mathbf{v}, T', p'$), где $\mathbf{v}$ – возмущение скорости, T' – температуры и p' – давления. Для таких возмущений уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска, теплопроводности и неразрывности запишутся в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p'+\nu\Delta\mathbf{v}-g\beta T\mathbf{e};\quad \mathbf{e}=(0,0,1)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+v_z\frac{\partial T_0}{\partial z}=\chi\Delta T',\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

Здесь ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, β – коэффициент теплового расширения жидкости, g – ускорение свободного падения.

Выбрав в качестве единиц длины, времени, скорости, давления, температуры, следующие величины: $1/\varkappa$, $1/\varkappa^2\chi = 2/\omega$, $\chi\varkappa$, $\rho\varkappa^2\chi\nu$, $\Theta = Q_0/\lambda\varkappa$, запишем безразмерные уравнения в виде

$$\frac{1}{\Pr}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p'+\Delta\mathbf{v}-\mathrm{Ra}\,T\mathbf{e};\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+fv_z=\Delta T';\quad f=\exp(-z)\cos(2t-z) \tag{1.1}$$

$$\mathrm{Ra}=g\beta\Theta\delta^3/\chi\nu=g\beta Q_0/\chi\varkappa^4\lambda\nu;\quad \Pr=\nu/\chi$$

Здесь f – безразмерный равновесный температурный градиент. Задача содержит следующие безразмерные параметры: Ra – число Рэлея, определенное через амплитуду колебаний теплопотока на поверхности Q_0 и толщину теплового скин-слоя $\delta = 1/\varkappa$, и число Прандтля Pr.

Рассмотрим нормальные возмущения равновесия, периодически зависящие от горизонтальных координат по закону

$$\begin{pmatrix} v\\ T'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v(z,t)\\ \theta(z,t)\end{pmatrix}\exp(ikx)$$

где k – волновой вектор в плоскости верхней границы. (Векторы $\mathbf{e}$ и ∇T_0 перпендикулярны поверхности жидкости, поэтому задача изотропна в плоскости слоя и ось X можно направить вдоль волнового вектора.) Тогда, исключая из системы (1.1) давление p' и горизонтальные компоненты скорости, получим для амплитуд возмущений вертикальной компоненты скорости w и температуры θ

$$\frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial t}(w''-k^2w)=(w^{\mathrm{IV}}-2k^2w''+k^4w)+\mathrm{Ra}\,k^2T$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+fw=\theta''-k^2\theta \tag{1.2}$$

В этой системе штрихи обозначают производные по вертикальной координате.

Считаем, что сверху жидкость граничит с газом, теплопроводность которого много меньше теплопроводности жидкости. Следовательно, возмущения теплопотока на верхней границе обращаются в ноль [6]. Рассмотрим параметрическое возбуждение конвекции, связанное только с наличием силы тяжести. Зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры пренебрежем. Поэтому на свободной поверхности жидкости нормальная компонента скорости и касательные компоненты тензора вязких напряжений обращаются в нуль. На достаточно большом расстоянии от поверхности (глубина жидкости много больше глубины теплового скин-слоя) все возмущения должны затухать. Таким образом

$$z = 0: \quad w = 0; \quad w'' = 0; \quad \theta' = 0$$

$$z \to \infty: \quad w = 0; \quad w' = 0; \quad \theta = 0 \tag{1.3}$$

Границы устойчивости определяются из условий, при которых существует периодическое по времени решение задачи (1.2)–(1.3).

2. Метод решения. Для численного решения задачи применялся метод конечных разностей. Решение находилось на ограниченном интервале по Z: $0 < Z < H$. Величина H выбиралась заведомо больше ожидаемых размеров области затухания возмущений δ, так что $H/\delta \gg 1$. Вычисления показали, что при переходе от слоев с глубиной $H/\delta = 10$ к $H/\delta = 15$ критическое число Рэлея практически не изменялось. В исследуемой области применялась равномерная сетка с постоянным шагом $h_z = 0{,}1$ (проверочные вычисления проводились с шагом $h_z = 0{,}05$). Использовалась вспомогательная переменная $\varphi = \Delta w$. Задача решалась в переменных w, φ, θ. На свободной поверхности $\varphi = 0$, на твердой поверхности для φ имеем условие, аналогичное условию Тома. Применялась неявная разностная схема. При составлении конечно-разностного аналога уравнений конвекции производные по координате аппроксимировались центральными разностями, производные по времени – разностями вперед. Уравнения решались методом прогонки. Шаг по времени оставался постоянным и выбирался из соображений устойчивости счета и точности нахождения критического числа Релея Ra.

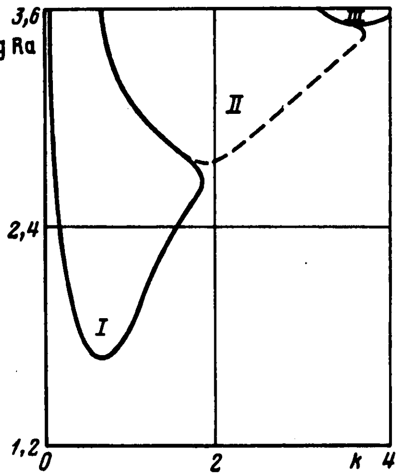
Процедура определения критического числа Рэлея Ra была такова. При фиксированных параметрах Pr, k задавалось начальное локальное возмущение φ в некоторой точке координатной сетки (обычно при $z = 1$). При произвольном Ra решение со временем либо нарастает, либо затухает. Об этом можно судить по значению мультипликатора (логарифм отношения значений возмущений скорости в моменты времени, различающиеся на период). Перебором числа Ra определялось значение, соответствующее нейтральному решению. Изменяя волновое число k, можно определить положение нейтральной кривой критических возмущений Ra(k). Минимизация функции Ra(k) при фиксированном Pr дает пороговое значение Ra_m для параметрического возбуждения конвекции Рэлея.

Отслеживалось поведение двух типов возмущений. Период одного вдвое превышает период изменения внешнего теплопотока (полуцелая мода). Период другого был равен периоду внешнего воздействия (целая мода). При некоторых значениях параметров (в окрестности нейтральных кривых) проводился фурье-анализ возмущений скорости и температуры, который позволял отнести возмущения в целому, либо к полуцелому типу.

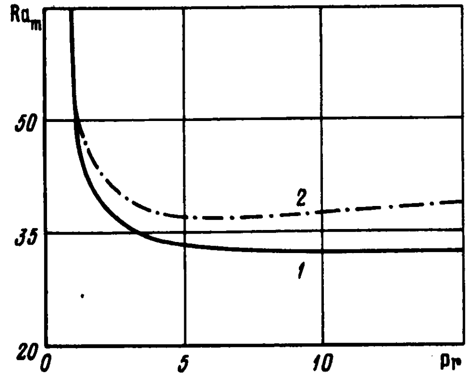
В случае больших чисел Прандтля инерционное слагаемое в уравнении для скорости из системы (1.2) стремится к нулю. Таким образом, в пределе $\mathrm{Pr} \to \infty$ критическое число Рэлея Ra_m не зависит от Pr

$$\mathrm{Pr} \gg 1, \quad \mathrm{Ra}_m \sim \mathrm{const} \tag{2.1}$$

3. Результаты расчетов. На фиг. 1 изображены нейтральные кривые на плоскости (k, Ra) для Pr = 1. Области затухающих и нарастающих возмущений разделены нейтральными кривыми. Сплошные линии соответствуют границе устойчивости для полуцелых возмущений, штриховые линии – границе для целых возмущений. В областях I и III нарастают полуцелые возмущения, в области II – целые. Как и в случае модуляции температуры на границе [2], имеется типичная картина параметрического резонанса с чередованием областей целого и полуцелого типов. Наименьшее критическое значение числа Рэлея $\mathrm{Ra}_m = 48{,}7$ имеет волновое число $k_m = 0{,}63$ и принадлежит первой полуцелой области.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Нейтральная кривая и области параметрической неустойчивости в случае переменного теплопотока на свободной поверхности

Фиг. 2. Минимальное критическое число Рэлея в зависимости от числа Прандтля. Кривая *1* соответствует переменному теплопотоку на свободной границе, кривая *2* – переменной температуре

Пороговые значения Ra_m в зависимости от числа Pr представлены на фиг. 2. В отличие от случая динамического возбуждения конвекции Марангони [4] для любых значений числа Прандтля наиболее опасны полуцелые возмущения. Результаты, относящиеся к случаю гармонически изменяющейся температуры на поверхности жидкости [2], изображены штрихпунктирными линиями. Возникновение конвекции при статическом нагреве в слое с теплоизолированными границами происходит при меньшем значении числа Рэлея, чем в слое с теплопроводными границами [6]. В случае параметрического возбуждения термогравитационной конвекции, как видно из фиг. 2, это свойство сохраняется.

Предельный случай $\mathrm{Pr} \gg 1$ согласуется с асимптотикой (2.1). Значение критического числа Рэлея для $\mathrm{Pr} \gg 1$ равно 32,2.

Для слоя конечной глубины необходимо переформулировать граничное условие на нижней границе слоя: $T_0 = 0$ при $z = H$.

Распределение темпертуры в квазиравновесии определяется суперпозицией прямой и отраженной от нижней границы волн

$$T_0 = e^z[A\cos(2t+z) + B\sin(2t+z)] + e^{-z}[A_1\cos(2t-z) + B_1\sin(2t-z)]$$

$$B = {}^1/_2 + B_1; \quad A = {}^1/_2 + A_1$$

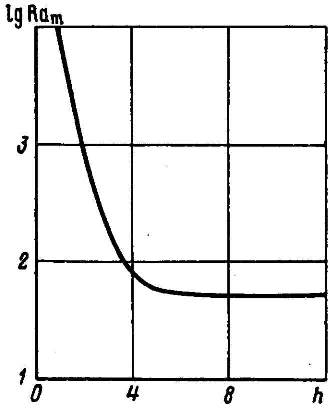
$$A_1(e^{2h}+1) + B_1(e^{2h}-1)\,\mathrm{tg}\,h = -{}^1/_2 e^{2h}(1+\mathrm{tg}\,h)$$

$$-A_1(e^{2h}-1)\,\mathrm{tg}\,h + B_1(e^{2h}-1) = {}^1/_2 e^{2h}(\mathrm{tg}\,h - 1)$$

Здесь $h = H/\delta$ – новый безразмерный параметр – отношение толщин слоя и скин-слоя. На нижней твердой изотермической границе имеем условие прилипания для возмущений скорости и отсутствие возмущений температуры

$$z = h: \quad w = 0; \quad w' = 0; \quad \theta = 0$$

Исследовано взаимодействие возмущений с результирующей тепловой волной $T_0(t, z)$. При безразмерных глубинах слоя $h \geqslant 5$ коэффициенты $A \approx 0, B \approx 0$; $A_1 \approx -{}^1/_2$; $B_1 \approx -{}^1/_2$, т.е. влияние тепловой волны, отраженной от дна, на нестационарное равновесное распределение температуры не существенно. В тонких слоях $h \to 0$ отраженная волна вносит заметный вклад в равновесное распределение температуры.



Фиг. 3. Зависимость порога параметрического возбуждения Ra_m от глубины слоя h для $\mathrm{Pr} = 1$

Наличие дна на конечном расстоянии от свободной поверхности приводит к стабилизации (пороговое значение числа Рэлея возрастает с уменьшением толщины слоя жидкости). Результаты расчетов для числа Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$ приведены на фиг. 3. Для $h > 5$ граница устойчивости практически совпадает со случаем полубесконечного массива жидкости.

При $h \approx 1$ имеет место сильная стабилизация. Это можно объяснить следующим образом. В предельном случае ($H \ll \delta$) граница устойчивости определяется числом Рэлея, вычисленным по толщине слоя; $\mathrm{Ra}_H = g\beta Q_0 H^4/\chi\lambda\nu$, которое не зависит от глубины проникновения тепловой волны. Следовательно, определенное по толщине скин-слоя число Ra зависит от толщины слоя следующим образом:

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_H \left(\frac{\delta}{H}\right)^4 = \frac{\mathrm{Ra}_H}{h^4} \qquad (3.1)$$

Асимптотика (3.1) свидетельствует о быстром росте числа Рэлея с уменьшением h.

Заключение. В случае параметрического возбуждения конвекции Рэлея гармоническим изменением теплопотока на свободной границе при любых значениях параметров задачи наиболее опасны возмущения, период которых вдвое превышает период изменения внешнего воздействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* О конвективной неустойчивости теплового скин-слоя // ПМТФ. 1965. № 6. С. 53–67.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Юрков Ю.С.* О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости вблизи поверхности жидкости // Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции. Минск; Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1974. С. 19–25.
3. *Gershuni G.Z., Nepomnyashchy .A.A., Velarde M.G.* On dynamic excitation of Marangoni instability // Phys. Fluids. A. 1992. V. 4. № 11. P. 2394–2398.
4. *Gershuni G.Z., Nepomnyashchy A.A., Smorodin B.L., Velarde M.G.* On parametric excitation of thermocapillary and thermogravitational convective instability // Microgravity Quart. 1994. V. 4. № 4. P. 215–220.
5. *Гершуни Г.З., Непомнящий А.А., Смородин Б.Л., Веларде М.Г.* Динамическое возбуждение конвекции Марангони при наличии переменного теплопотока на свободной поверхности // Вестн. Перм. ун-та, Вып. 4. Физика. 1995. С. 17–28.
6. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию
29.IX.1995