

УДК 532.51.013.4:532.135

© 1996 г. М.А. БРУТЯН, А.Г. КУЛИКОВСКИЙ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

В рамках дифференциальной 4-константной модели Олдройда рассмотрено однонаправленное стационарное и квазистационарное течение вязкоупругой жидкости. Дано новое объяснение, не основанное на предположении о проскальзывании, известному эффекту резкого увеличения расхода жидкости при скоростях сдвига, больших некоторого критического значения. Аналитически и численно установлено, что с этим эффектом тесно связано явление гистерезиса. Отмечается также связь задачи устойчивости рассматриваемого течения с вопросами единственности стационарного решения. Предложена модификация стандартной модели Олдройда и определены соответствующие интегральные условия, устраняющие особенности, связанные с несуществованием и неединственностью стационарного решения.

Вязкоупругая природа большинства полимерных жидкостей проявляется в многообразии сложных и подчас неожиданных эффектов, связанных с проблемой неустойчивости течений (см. обзор [1]).

Интересное явление наблюдается при течении полимерных жидкостей в тонких трубках [2]. При скорости сдвига или перепаде давления, меньшем некоторого критического значения, течение существенно ламинарное и поверхность жидкости гладкая. Зависимость расхода Q от перепада давления ΔP в этом случае близка к пуазейлевскому закону $Q \sim \Delta P$. При некоторой критической скорости сдвига поверхность полимерной жидкости начинает приобретать волнообразную форму с малой амплитудой и длиной волны. При дальнейшем увеличении скорости сдвига наблюдаются квазипериодические пульсации давления, а поверхность жидкости начинает приобретать вид последовательной череды гладких и волнистых участков. Секундный расход жидкости при этом резко возрастает. Общепринятое объяснение этого явления основано на предположении о том, что при больших скоростях сдвига полимерная жидкость начинает как бы скользить вдоль стенок, т.е. нарушается граничное условие прилипания жидкости к поверхности трубы [2]. Вопросу существования проскальзывания и различным попыткам построения соответствующих количественных и качественных теорий посвящены работы [3–5].

В настоящей работе эффект резкого увеличения расхода и другие связанные эффекты, например гистерезис и специфический, почти прямоугольный профиль скорости течения полимерной жидкости в трубе, получаются теоретически из традиционного рассмотрения без априорного предположения о проскальзывании. Установлено, что неустойчивость рассматриваемого вязкоупругого течения тесно связана с вопросами неединственности соответствующего стационарного течения. Предложена модификация модели Олдройда, устраняющая дефекты стандартной модели. Авторы недавней работы [5] на основании тщательного анализа экспериментальных данных пришли к выводу о том, что до сих пор не получено неопровержимых данных о наличии проскальзывания на стенках.

1. Неоднозначность стационарного решения и коротковолновая неустойчивость пуазейлевского течения вязкоупругой жидкости. Рассмотрим стационарное однонаправленное течение со скоростью $\mathbf{V} = (0, 0, w(x, y))$ вязкоупругой жидкости, вызванное,

например, градиентом давления dp/dz . В рамках 4-константной модели Олдройда [8] уравнения, определяющие движение жидкости, имеют вид

$$\operatorname{div} \sigma = \nabla p \quad (1.1)$$

$$\sigma + \lambda F_c(\sigma) = 2\eta[D + \lambda_1 F(D)] \quad (1.2)$$

$$F_c(\sigma) = \frac{d\sigma}{dt} - \Omega\sigma + \sigma\Omega - (D\sigma + \sigma D) + c(\operatorname{Tr} \sigma)D \quad (1.3)$$

$$F(D) = \frac{dD}{dt} - \Omega D + D\Omega - 2D^2 \quad (1.4)$$

$$D = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T], \quad \Omega = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{V} - (\nabla \mathbf{V})^T]$$

Здесь λ – время релаксации, λ_1 – время ретардации, c – безразмерный параметр модели, η – коэффициент вязкости жидкости, σ – тензор напряжений, D и Ω – симметричная и антисимметричная части тензора градиента скорости $\nabla \mathbf{V}$. Все параметры модели приняты постоянными.

Согласно [6, 7], эти уравнения редуцируются к уравнению для плоских потенциальных течений сжимаемого фиктивного газа

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} \quad (1.5)$$

$$\rho = \frac{1 + c\lambda\lambda_1 q^2}{1 + c\lambda^2 q^2}, \quad \mathbf{q} = \nabla w \quad (1.6)$$

где ρ , \mathbf{q} – плотность и скорость фиктивного газа, а w_x и w_y обозначают частные производные x и y соответственно. Как следует из (1.6), скорость $w(x, y)$ вязкоупругого течения соответствует потенциалу скорости \mathbf{q} течения фиктивного газа.

Решение задачи Пуазейля в частном случае $\lambda_1 = 0$ (модель Максвелла) существует лишь в ограниченном диапазоне изменения радиуса трубы [6]

$$R \leq R_c, \quad R_c = \left(-\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} \sqrt{c\lambda^2} \right)^{-1}$$

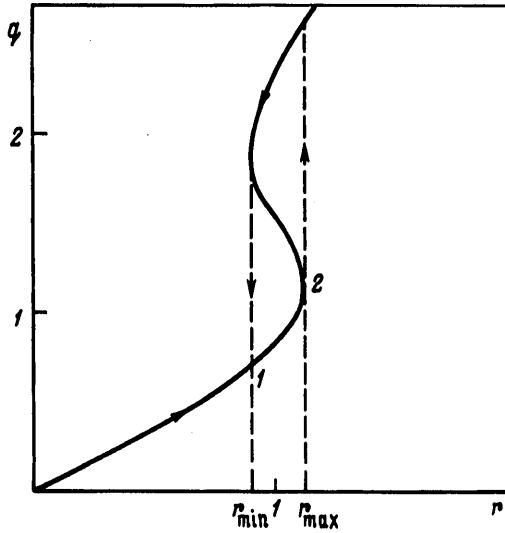
Рассмотрим теперь задачу Пуазейля в рамках полной 4-константной модели Олдройда (η , λ , λ_1 и c отличны от нуля). В цилиндрической системе координат (r, θ, z) уравнения (1.5) и (1.6) приобретают вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{q(1 + \varepsilon c\lambda^2 q^2)}{1 + c\lambda^2 q^2} \right] = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

Интегрируя в безразмерных переменных $r' = r/R_c$ и $q' = -q \sqrt{c\lambda^2}$, получаем $2rq' = r$.

Здесь и далее для удобства и простоты принято $c\lambda^2 = 1$ и опущены штрихи у безразмерных переменных. При $0 < \varepsilon < 1/9$ зависимость безразмерной скорости сдвига от безразмерного радиуса, так же как и зависимость касательного напряжения от скорости сдвига (кривая течения), имеют S-образный вид (фиг. 1) с локальными экстремумами при

$$q_{\max, \min} = \left(\frac{1 - 3\varepsilon \pm \sqrt{(1 - \varepsilon)(1 - 9\varepsilon)}}{2\varepsilon} \right)^{1/2}$$



Фиг. 1. Зависимость скорости сдвига от радиуса

В интервале $q_{\min} < q < q_{\max}$ определяющие уравнения (1.5) и (1.6) имеют гиперболический вид, а в остальном диапазоне – эллиптический [7]. В отличие от чисто релаксационного случая $\lambda_1 = 0$ решение при наличии ретардации ($\lambda_1 \neq 0$) существует при любых значениях радиуса трубы, однако в области $r_{\min} < r < r_{\max}$ решение не единственно (фиг. 1).

Для того чтобы выяснить поведение решения при $r > r_{\min}$, рассмотрим задачу устойчивости однонаправленного течения вязкоупругой жидкости в рамках полной 4-константной модели Олдройда. В переменных x и t нестационарные уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = P \quad (1.7)$$

$$-\eta \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + k\sigma - (\xi - cs) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + ks - \sigma \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \epsilon \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (1.9)$$

$$\xi = \frac{\eta}{\lambda}, \quad k = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma = \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad s = \frac{\sigma_{zz}}{2}, \quad P = -\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$$

Здесь σ_{xz} , σ_{zx} , σ_{zz} – компоненты тензора напряжений. Исследуем сначала устойчивость стационарного решения $u_0 = (w_0, \sigma_0, s_0)$ относительно коротковолновых возмущений. Для малого возмущения $u' = u - u_0$ после подстановки в (1.7) – (1.9) получается система уравнений с переменными коэффициентами относительно w' , σ' и s' . Если длина волны возмущения достаточно мала, то u_0 можно считать примерно постоянным по всей длине волны [9]. С учетом сказанного в малой окрестности произвольной точки можно записать следующее представление решения:

$$u = u_0 + \text{const } e^{i(\tau + \mu x)} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в уравнения (1.7)–(1.9), находим условие разрешимости

$$\Delta = \begin{vmatrix} i\tau & -i\mu & 0 \\ ia\mu & i\tau + k & cw_{0x}/2 \\ -2i\sigma_0\mu + 4i\eta\epsilon w_{0x} & -2w_{0x} & i\tau + k \end{vmatrix} = 0 \quad (1.11)$$

$$a = -\eta k \rho_0, \quad \sigma_0 = \eta w_{0x} \rho_0, \quad \rho_0 = \frac{(1 + \epsilon q_0^2)}{(1 + q_0^2)}$$

Вычисляя детерминант (1.11) в коротковолновом приближении ($\mu \rightarrow \infty$), приходим к кубическому уравнению относительно τ

$$\Delta = i\epsilon\tau^2 + k(\rho_0 + 2\epsilon)\tau^2 - ik^2[\rho_0(2 - q_0^2) + \epsilon(2q_0^2 + 1)]\tau - k^3[\rho_0(1 - q_0^2) + 2\epsilon q_0^2] = 0 \quad (1.12)$$

Легко убедиться, что уравнение (1.12) имеет корни

$$\tau_0 = ik, \quad \tau_{1,2} = \frac{ik}{2\epsilon} \left(\rho_0 + \epsilon \pm \sqrt{(\rho_0 + \epsilon)^2 - 4\epsilon(\rho_0 - \rho_0 q_0^2 + 2\epsilon q_0^2)} \right)$$

Откуда заключаем, что решение становится неустойчивым при $\rho_0 - \rho_0 q_0^2 + 2\epsilon q_0^2 < 0$. С учетом связи ρ_0 и q_0 получаем окончательное условие коротковолновой неустойчивости однонаправленного течения 4-константной жидкости Олдройда

$$\epsilon q_0^4 + (3\epsilon - 1)q_0^2 + 1 < 1 \quad (1.13)$$

Условие гиперболичности определяющих уравнений тоже имеет вид (1.13). Таким образом найдено, что в диапазоне (q_{\min}, q_{\max}), т.е. в области гиперболичности, однонаправленное течение вязкоупругой жидкости Олдройда неустойчиво относительно коротковолновых возмущений, сохраняющих направление скорости.

2. О природе неустойчивости прямолинейных течений. Возникает вопрос, каким же окажется реальное течение при $r > r_{\min}$? Если течение стационарно, то из уравнений (1.8) и (1.9) получаем следующую нечетную зависимость для кривой течения $\sigma = \sigma(q)$:

$$\sigma = \eta q \rho = q \left[\eta \epsilon + \frac{\eta(1 - \epsilon)}{1 + q^2} \right], \quad q = \frac{dw}{dx} \quad (2.1)$$

Здесь рассматриваем простейший случай однонаправленного течения, когда w зависит только от одной переменной. Легко видеть, что зависимость $\sigma(q)$ имеет S-образный вид, аналогичный зависимости $r(q)$, изображенной на фиг. 1. При $\epsilon = 0$ величина σ при $q > 0$ сначала растет с ростом q от нуля, достигает наибольшего значения $\sigma = \sigma_{\max}$, а затем убывает, причем $\sigma \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$. При $0 < \epsilon < 1$ производная $\sigma' = d\sigma/dq$ положительна при всех положительных q , за исключением, может быть, отрезка $[q_{\min}, q_{\max}]$ на оси q , существующего при $\epsilon < 1/9$, где производная σ' отрицательна.

Неустойчивость возникает в тех случаях, когда зависимость $\sigma(q)$, полученная для стационарного течения, такова, что $\sigma' < 0$. Можно предположить, что природа неустойчивости та же, что и в случае, когда процессы релаксации происходят мгновенно, и для нестационарных процессов зависимость $\sigma = \sigma(q)$ сохраняет свой S-образный вид. При подстановке зависимости (2.1) в уравнение (1.7) после дифференцирования по x получается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\sigma}{dq} \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Если «коэффициент теплопроводности» σ' отрицателен, то уравнение (2.2) некорректно, а процесс, описываемый этим уравнением, происходит так же, как при одновременном изменении знака коэффициента теплопроводности и времени. Если $\sigma'(q) < 0$ при сколь угодно больших q , как это имеет место при $\varepsilon = 0$, то можно ожидать с ростом t появления у зависимости $q(x)$ особенностей типа δ -функций, что соответствует разрыву w , т.е. образованию «слоя скольжения». «Внутри» слоя скольжения $|q| = \infty$, следовательно, имеет место соотношение $\sigma = 0$, которое выполняется по непрерывности и с обеих сторон от слоя скольжения. Если область значений q , для которых $\sigma'(q)$ отрицательно, ограничена, как это имеет место при $\varepsilon \neq 0$, то с течением времени можно ожидать появления разрывов q , причем течение при достаточно больших t будет состоять из областей, где $\sigma'(q) > 0$, разделенных разрывами q . Величина w на таких разрывах должна быть непрерывна, так как в процессе их образования область значений q должна оставаться ограниченной областью, где $\sigma'(q) < 0$.

3. О структуре медленно движущихся разрывов. Если зависимость $\sigma(q)$ не монотонна, то функция $q(\sigma)$ не однозначна и для некоторого интервала значений σ имеются три ветви этой функции: $q_1(\sigma)$, $q_2(\sigma)$ и $q_3(\sigma)$, которые будем считать пронумерованными в порядке возрастания их величины. Ветви $q_1(\sigma)$ и $q_3(\sigma)$ соответствуют эллиптической области и устойчивым решениям, а ветвь $q_2(\sigma)$ – гиперболической области и неустойчивому решению. Стационарное устойчивое решение может содержать разрывы величины $q(x)$ от значения q_1 к q_3 или обратно, причем, как это следует из уравнения (1.7), на этих разрывах величина σ непрерывна. Положение и число таких разрывов не определено в стационарных решениях.

Одним из способов, который можно использовать для того, чтобы избавиться от этой неопределенности, является рассмотрение медленных квазистационарных процессов. В этом случае уравнения (1.8) и (1.9) останутся дифференциальными, что позволит исследовать непрерывные решения, переходящие в стационарном случае в скачок q .

Рассмотрим для простоты случай, когда $dp/dz = 0$, и будем изучать возмущения типа бегущих волн, т.е. возмущения, зависящие от одной переменной $\zeta = -x + Ut$, распространяющиеся по однородному фону $\sigma = \sigma_0$, $q = q_0$. Скорость волны U будет считаться малой, т.е. $U \ll 1$. При этом, как будет показано ниже, резкое изменение q происходит в узком слое и результаты, полученные для $dp/dz = 0$, остаются справедливыми и при $dp/dz \neq 0$, если U мало.

Для рассматриваемого случая уравнения (1.7) – (1.9) примут вид

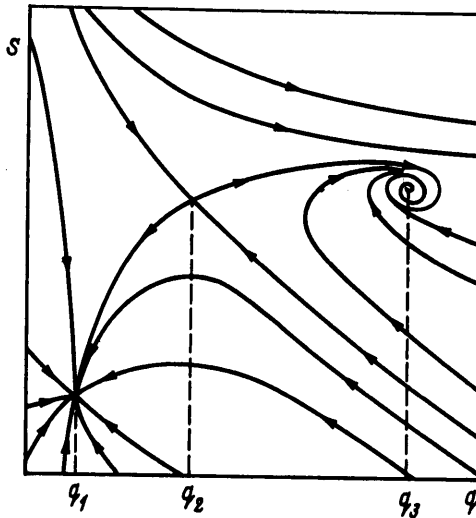
$$\sigma' = U(q - q_0) \quad (3.1)$$

$$\eta \varepsilon U q' = U^2(q - q_0) - (\xi - cs)q + \sigma / \lambda \quad (3.2)$$

$$Us' = -s / \lambda + \sigma q - \eta \varepsilon q^2 \quad (3.3)$$

Здесь производная по ζ обозначена штрихом и, как и прежде, $q = \partial w / \partial x$. Из этих уравнений видно, что, в то время как q' и s' имеют порядок $1/U$, порядок величины σ' равен U . Поэтому при достаточно малых U можно пренебречь изменением σ в тех областях, где q и s претерпевают существенные изменения. Этому же соответствует и возможность пренебрежения в уравнении (3.2) членом $U^2(q - q_0)$, который произошел из $\partial \sigma / \partial t$ в (1.8).

Считая $\sigma = \text{const}$, уравнения (3.2) и (3.3) можно рассматривать как замкнутую систему. Качественная картина интегральных кривых на плоскости (q, s) изображена на фиг. 2 для случая, когда σ таково, что ему соответствуют три равновесных значения q , обозначенных q_1, q_2, q_3 . С ростом ζ интегральные кривые входят в первую и



Фиг. 2. Качественная картина интегральных кривых

третью особые точки, а вторая является седлом. Если в уравнениях (1.8) и (1.9) считать $\sigma = \text{const}$, то получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\lambda}q + \frac{c}{\varepsilon\eta}sq + \frac{\sigma}{\lambda\eta\varepsilon} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{s}{\lambda} + \sigma q - \eta\varepsilon q^2 \quad (3.5)$$

Из этой системы видно, что в каждой точке x процессы релаксации величин q и s к их равновесным значениям происходят независимо и что устойчивость или неустойчивость особых точек на фиг. 2 определяется именно этим процессом релаксации. Из фиг. 2 и из характера особых точек следует, что не может существовать интегральной кривой, соединяющей первую и третью особые точки, и в то же время вторая особая точка соединяется интегральными кривыми с первой и третьей. Эти свойства поля интегральных кривых являются грубыми, т.е. не могут измениться за счет малых неучтенных членов, связанных, например, с медленным изменением σ . Это означает, что при малых $U \neq 0$ при тех σ , когда $q_1 \neq q_2 \neq q_3$, решения, связывающие устойчивые состояния q_1 и q_3 , невозможны. Такие решения возможны и существуют в случаях слияния особых точек, когда $q_1 = q_2$ или $q_2 = q_3$.

Рассмотрим теперь, к чему приведет учет переменности σ и включения в систему уравнения (3.1). Оказывается, что особая точка в этом случае всегда одна и она, как это следует из (3.1), соответствует $q = q_0$. Остальные переменные в этой точке обозначим $s = s_0$ и $\sigma = \sigma_0$. Так как это состояние стационарно и, будем предполагать, устойчиво, то оно принадлежит либо к ветви q_1 (σ), либо к ветви q_3 (σ). При малых U , как и следует из общих соображений, два собственных значения и два собственных вектора в особой точке оказываются близкими к тем, которые соответствуют $\sigma = \text{const}$ и обсуждались выше. Третье собственное значение мало (порядка U), а соответствующий собственный вектор с точностью до U направлен по равновесной кривой $q = q(\sigma)$, $s = s(\sigma)$, получаемой приравнением нулю правых частей уравнений (3.2) и (3.3). Знак этого собственного значения совпадает со знаком U . При положительном U две интегральные кривые выходят из особой точки. Далее с ростом ξ

точка, представляющая решение, медленно движется вдоль устойчивой ветви равновесной кривой $q = q(\sigma)$, $s = s(\sigma)$. При отрицательных U направление движения меняется на обратное.

При малых U , как следует из (3.1) – (3.3), общая картина интегральных кривых представляет собой быстрые, со скоростью порядка $1/U$ движения в плоскости (q, s) , качественно представленные на фиг. 2, и медленные, со скоростью порядка U изменения σ .

Интегральные кривые, вышедшие из особой точки, не могут отойти от устойчивой части равновесной кривой, поскольку быстрое движение в плоскости (q, s) прижимает интегральную кривую к равновесной кривой. Однако когда точка $q(\sigma)$, $s(\sigma)$ доходит до значений σ_{\max} или σ_{\min} , то при дальнейшем изменении σ равновесная ветвь, по которой двигалась точка, кончается, слившись с неустойчивой ветвью, а в плоскости (q, s) при $\sigma = \text{const}$ единственной и притом притягивающей особой точкой является точка пересечения плоскости (q, s) с другой устойчивой ветвью кривой $q(\sigma)$, $s(\sigma)$. Происходит быстрый переход, почти перескок, изображающей точки на другую ветвь. Этот перескок при увеличении σ происходит при $\sigma = \sigma_{\max}$, а при уменьшении σ – при $\sigma = \sigma_{\min}$, вызывая появление гистерезиса. Ширина петли зависит от параметра ϵ . Если под вязкоупругой средой понимать разбавленный раствор полимера, то величина ϵ зависит от молекулярного веса M и вязкости растворителя η_s , $\epsilon \sim \eta_s^{-1} M^{-3/2}$ [8]. Возможность гистерезисной петли в рамках простой и весьма приближенной модели вязкоупругой жидкости была предсказана в [10].

4. Об общем характере медленных процессов. Рассмотрим явления, когда $T \gg \lambda_*$, где T – характерное время, а λ_* – наибольшее из времен, характеризующих внутренние процессы в среде. В этом случае характерная скорость движения разрывов $U = L/T$ обеспечивает малую ширину исследованных выше переходных зон: $l = U\lambda_* = L\lambda_*/T \ll L$. Как уже говорилось, в этом случае рассматриваемые зоны можно моделировать разрывами, а непрерывное течение описывать уравнением нелинейной теплопроводности (2.2). Если граничные условия определяют не q или $\sigma(q)$, а само w , то удобно пользоваться исходным уравнением (1.7), в которое приведено равновесное значение $\sigma = \sigma(q)$, представленное равенством (2.1)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) = P \quad (4.1)$$

Заметим, что ширину l изучаемых здесь переходных зон можно найти с помощью уравнений (3.2) и (3.3) как $l = U\lambda_*$, $\lambda_* = \max \{ \lambda, \lambda_1 \}$. Только при $U = 0$ эти волны обращаются в разрывы, однако их удобно рассматривать как разрывы и при $l \neq 0$, если $l \ll L$, где L – характерный размер задачи. Уравнение (4.1) представляет собой нелинейное уравнение теплопроводности. Решения этого уравнения, как было показано ранее, могут содержать разрывы производной $\partial w / \partial x$. На таких разрывах всегда должны быть выполнены соотношения, выражающие непрерывность w и σ

$$[w] = 0, [\sigma] = 0 \quad (4.2)$$

где квадратные скобки означают разность между значением функции за разрывом и перед ним $[w] = w_+ - w_-$. Если разрыв движется, т.е. $U \neq 0$, то, как следует из третьего раздела

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_- = q_{\max} \left(\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] > 0 \right); \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_+ = q_{\min} \left(\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] < 0 \right) \quad (4.3)$$

Эти соотношения написаны при условии, что $\sigma > 0$. Аналогично пишутся условия, соответствующие $\sigma < 0$. Если разрыв неподвижен, то $U = 0$.

Итак, во всех случаях имеется три соотношения: два соотношения (4.2) и одно из трех соотношений: (4.3) и $U = 0$. Именно наличие трех соотношений на разрыве уравнения теплопроводности необходимо для корректности граничных условий. Таким образом, в рассматриваемом случае кроме движущихся разрывов могут существовать и неподвижные, которые, несмотря на нестационарность процесса по обе стороны от разрыва, не движутся до тех пор, пока изменение решения не приведет к выполнению одного из соотношений (4.3), после чего разрыв начинает двигаться. Этот результат есть следствие исходных уравнений (1.7)–(1.9), которые при $U = 0$ допускают произвольные перескоки с одной устойчивой ветви равновесной зависимости $q(\sigma)$, $s(\sigma)$ на другую. Иная возможность будет рассмотрена в следующем разделе, когда исходные уравнения изменены так, что при всех U существует непрерывное решение, соответствующее структуре скачка.

Пользуясь результатами предыдущего анализа, рассмотрим в качестве примера периодическое по времени квазистационарное изменение градиента давления $P(t)$ в трубе радиуса R . При этом в квазистационарном случае $\sigma(r, t) = rP(t)/2$. Поскольку q является функцией σ , зависимость $r = r_0(q)$, изображенная на фиг. 1 для стационарного случая $P = P_0 = \text{const}$, в квазистационарном случае будет иметь вид $r(q, t) = r_0(q)/P(t)$. При этом график на фиг. 1 будет испытывать зависящие от времени однородные растяжения с коэффициентом $P_0/P(t)$ по горизонтальной оси.

Рассмотрим для определенности случай, когда радиус трубы $R > r_{\max}$ при всех t , однако будем считать, что $\max(r_{\min}) > \min(r_{\max})$. Пусть в какой-то момент времени $t = t_0$ имеется один разрыв, расположенный при $r = r_0$ между текущими значениями $r_{\min}(t_0)$ и $r_{\max}(t_0)$, а решение $q(r, t_0)$ следует устойчивым ветвям графика, на которых $\partial q/\partial r > 0$. При увеличении $P(t)$ масштаб графика по горизонтальной оси будет уменьшаться. При этом пока r_0 остается меньше $r_{\max}(t)$, разрыв q не будет двигаться (при этом изменения q будут происходить в том числе в точках перед и за разрывом). Движение разрыва начнется, когда r_{\max} станет равным r_0 , и в дальнейшем разрыв будет двигаться вместе с $r_{\max}(t)$.

Когда увеличение $P(t)$ сменится уменьшением, разрыв остановится и будет неподвижен до тех пор, пока к нему не подойдет $r_{\min}(t)$, после чего он будет двигаться вместе с $r_{\min}(t)$. Таким образом, при периодическом изменении $P(t)$ фазы движения разрыва будут чередоваться с остановками. Для каждого момента времени по графику $q(r, t)$ можно найти $w(r, t)$. Очевидно, расход жидкости не будет определяться только мгновенным значением $P(t)$ и на стадии уменьшения $P(t)$ будет больше, чем при тех же значениях P на стадии увеличения $P(t)$, поскольку в первом случае разрыв будет расположен ближе к центру трубы.

5. Супербарнеттовское приближение 4-константной модели Олдройда вязкоупругой жидкости. Вблизи разрывов оправдано использование барнеттовских членов в уравнении состояния. Для классической ньютоновской жидкости в супербарнеттовском приближении связь тензоров напряжений и скоростей деформации имеет вид [11]

$$\sigma = 2\eta(D + \nu\Delta D) \quad (5.1)$$

где $\nu \ll 1$. По аналогии с (5.1) запишем уравнение состояния (1.2) в следующем виде:

$$\sigma + \lambda F_c(\sigma) = 2\eta[D + \nu\Delta D + \lambda_1 F(D)] \quad (5.2)$$

Будем называть его супербарнеттовским приближением 4-константной модели Олдройда. Рассмотрим теперь вязкоупругую среду в приближении (5.2), т.е. при наличии диссипативного члена $\eta\nu\Delta D$ более высокого порядка. В уравнение (1.8) тогда добавится производная $\partial^3 w/\partial x^3$. В этом случае система уравнений имеет решение, зависящее только от x , которое при $\nu \rightarrow 0$ переходит в решение, содержащее разрыв. Это решение, которое при малых ν будем называть решением задачи о структуре разрыва

или просто структурой разрыва, позволяет и в предельном случае $v \rightarrow 0$ выписать недостающее условие на разрыве, что приводит к однозначному определению его положения.

В стационарном случае уравнения (1.8) и (1.9) имеют вид

$$\eta v \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = (\xi - cs)q - \frac{\sigma}{\lambda}, \quad s = \lambda \sigma q - \lambda \eta \epsilon q^2$$

или

$$\eta v \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = (\xi - c\lambda \sigma q + c\lambda \eta \epsilon q^2)q - \frac{\sigma}{\lambda} \equiv F(q) \quad (5.3)$$

При малых значениях ηv в области быстрого изменения параметров, имеющей ширину порядка $1/\eta v$, величину σ можно считать постоянной. Тогда уравнение (5.3) можно рассматривать независимо от уравнения (1.7). Имеются три уже обсуждавшиеся значения $q_1 \leq q_2 \leq q_3$, обращающие в нуль правую часть этого уравнения, причем при $q_1 \leq q \leq q_2$ она положительна, а при $q_2 \leq q \leq q_3$ отрицательна. Из (5.3) нетрудно видеть, что для существования решения, соответствующего переходу из q_1 в q_3 или из q_3 в q_1 , необходимо при $\eta v \rightarrow 0$ выполнение условия

$$\int_{q_1}^{q_3} F(q) dq = 0 \quad (5.4)$$

Это условие напоминает условие принимаемое в теории газа Ван-дер-Ваальса, хотя в рассматриваемом случае оно имеет другую, не термодинамическую, а кинетическую природу. Условие (5.4) замыкает систему соотношений на разрыве и делает в стационарных задачах положение разрыва определенным. Если условия изменяются очень медленно (квазистационарный случай), то можно в уравнениях пренебрегать членами с произвольными по времени и пользоваться на разрыве соотношением (5.4). Однако чем меньше v , тем жестче ограничения на скорость изменения величин. При $v = 0$, как было показано в предыдущих разделах, дополнительное условие на движущемся разрыве при любой скорости $U \neq 0$ не совпадает с (5.4). Это означает, что нет единого предельного условия, определяющего положение разрыва при $v \rightarrow 0$, $U \rightarrow 0$, и что оно зависит от способа перехода к пределу.

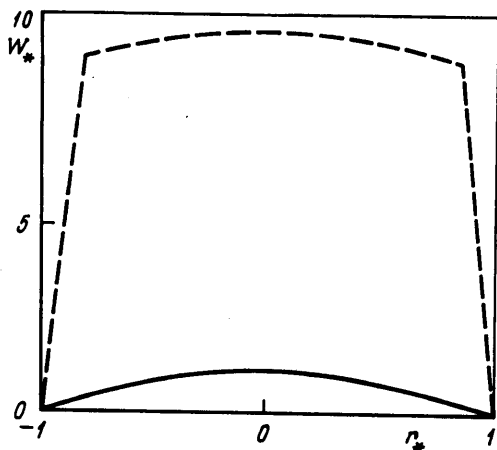
Если фиксировать значение v и ограничиться столь малыми U , что влияние членов с производными по времени можно рассматривать как малое возмущение, то нетрудно получить модификацию соотношения (5.4), учитывающую влияние скорости. Обозначим через $q_0(x)$ решение уравнения (5.3), соответствующее переходу из q_1 при $x = +\infty$ в q_2 при $x = -\infty$, а через $S_0(x)$ – выражение $\lambda \sigma q_0(x) - \lambda \eta \epsilon q_0^2(x)$. Будем считать, что решение представляет собой бегущую волну, причем величины q и s зависят от $\zeta = -x + Ut$, а $\sigma = \text{const}$. Будем считать U столь малым, что зависимости $q(x)$ и $s(x)$ при $t = \text{const}$ пренебрежимо мало отличаются от $q_0(x)$ и $s_0(x)$, найденных выше для стационарного случая. Тогда

$$\partial q / \partial t = -U \partial q_0 / \partial x, \quad \partial s / \partial t = -U \partial s_0 / \partial x.$$

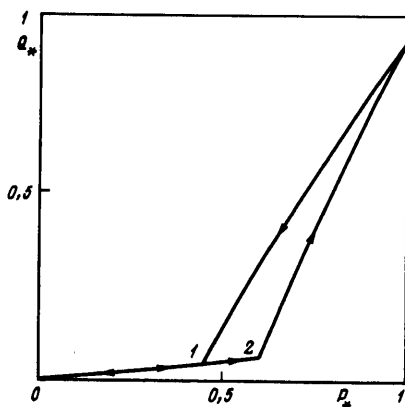
Поскольку $\partial q_0 / \partial x$ легко может быть найдена с помощью уравнения (5.3) как функция q , то $\partial q / \partial t$ и $\partial s / \partial t$ в рассматриваемом приближении являются известными функциями q . С учетом этого путем преобразований исходных уравнений вместо (5.3) получим

$$\eta v \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = (\xi - c\lambda \sigma q + c\lambda \eta \epsilon q^2)q - \frac{\sigma}{\lambda} + c\lambda q \frac{\partial s}{\partial t} + \eta \epsilon \frac{\partial q}{\partial t} \quad (5.5)$$

В правой части уравнения (5.5) опущен член $\partial \sigma / \partial t$, поскольку при малых v и U в области резкого изменения параметров q и s величина σ меняется мало и здесь



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Докритический профиль скорости (сплошная линия); закритический профиль скорости (штриховая линия)

Фиг. 4. Величина секундного расхода жидкости при последовательном возрастании и убывании продольного градиента давления на закритическом режиме

принимается, что $\sigma = \text{const}$. Если два последних члена выразить, согласно предыдущему, через q , то условие, аналогичное (5.4), примет вид

$$\int_{q_1}^{q_2} F(q) dq = U \int_{q_1}^{q_2} \left(c\lambda q \frac{\partial s}{\partial x} + \eta \varepsilon \frac{\partial q}{\partial x} \right) dq$$

6. Некоторые результаты численных расчетов. В безразмерных переменных уравнение, связывающее скорость сдвига q с продольным градиентом давления $P = -dp/dz$, имеет вид

$$2q_* \frac{(1 + \varepsilon q_*^2)}{(1 + q_*^2)} = -r_* P_* \quad (6.1)$$

$$r_* = \frac{r}{R}, \quad q_* = q(c\lambda^2)^{1/2}, \quad P_* = PR \frac{(c\lambda^2)^{1/2}}{\eta}$$

Как установлено в первом разделе данной статьи, из (6.1) следует, что при $0 < \varepsilon < 1/9$, т.е. в области гиперболичности, существуют два критических значения P_{*1} и P_{*2} , которые соответствуют экстремальным значениям q_{\max} и q_{\min} . При $P_* < P_{*1}$ решение непрерывное и единственное, а профиль скорости $w_* = w_*(r_*)$ по форме близок к классическому параболическому профилю скоростей, наблюдаемому в пуазейлевских течениях ньютоновской жидкости (фиг. 3, сплошная линия). Для определенности здесь и далее в расчетах принято $\varepsilon = 1/10$. Безразмерная скорость $w_* = w/w_0$, где $w_0 = R^2 (dp/dz)/4\eta$. Этот режим будем называть докритическим. В закритической области $P_* > P_{*2}$ решение разрывное и профиль скорости имеет вид, близкий к прямоугольному (см. фиг. 3, штриховая линия). При этом секундный расход Q жидкости резко возрастает и становится в десятки раз больше соответствующего расхода ньютоновской жидкости (фиг. 4). В промежуточной области $P_{*1} < P_* < P_{*2}$ оказалось, что возможен как докритический, так и закритический режим течения. Это зависит от того, каким образом получено стационарное значение P_* : путем последовательного возрастания или убывания градиента давления.

Данный вывод был сделан на основании подробного анализа результатов численного моделирования нестационарных уравнений (1.7)–(1.9) методом конечных разностей. Радиус трубы R разбивался на N одинаковых отрезков Δr , а временной шаг Δt выбирался равным $\Delta t = T_0/40N$, где T_0 – характерное время установления скорости в вязкой ньютоновской жидкости, $T_0 = R^2/4\eta$. Рассматривался квазистационарный процесс. Скорость изменения градиента давления выбиралась малой, так что на каждом шаге по времени параметры течения полностью устанавливались.

В противном случае временной шаг автоматически уменьшался. Оказалось, что если градиент давления постепенно нарастает от некоторого значения $P < P_{*1}$, то процесс идет непрерывно до точки P_{*2} , а затем происходит скачок на верхнюю ветвь с большими скоростями сдвига. Если же градиент давления постепенно уменьшается от некоторого значения $P > P_{*2}$, то процесс идет непрерывно до точки P_{*1} , а затем происходит скачок на нижнюю ветвь с меньшими скоростями сдвига. Подобное поведение решения естественно приводит к явлению гистерезиса и в случае возрастания градиента давления к резкому увеличению расхода при $P > P_{*2}$. На зависимости безразмерного секундного расхода жидкости $Q_* = Q/(R^4 P/\eta)$ от безразмерного градиента давления P_* это заметно достаточно хорошо (фиг. 4).

Заключение. В работе установлено, что эффект резкого увеличения расхода, явление гистерезиса и возникновение почти прямоугольного профиля скорости можно получить, во всяком случае формально, из традиционного рассмотрения в рамках дифференциальной модели Олдройда без априорного предположения о проскальзывании. Проблема устойчивости рассматриваемого вязкоупругого течения оказывается тесно связанной с вопросами единственности стационарного решения. Использование предложенной модификации – супербарнеттовского приближения стандартной модели Олдройда – устраняет дефекты, приводящие к несуществованию и (или) неединственности решения, и она может быть использована при изучении стационарных и квазистационарных закритических течений вязкоупругой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Larson R.G. Instability of viscoelastic flows // Rheol. Acta. 1992. V. 31. № 3. P. 213–263.
2. Vinogradov G., Malkin A., Yanovskii Yu. et al. Viscoelastic properties and flow of narrow distribution polybutadienes and polyisoprenes // J. Polymer Sci. 1972. Pt A-2. V. 10. № 6. P. 1061–1084.
3. Kalika D.S., Denn M.M. Wall slip and extrudate distortion in linear low-density polyethylene // J. Rheol. 1987. V. 33. № 8. P. 815–834.
4. Hill D.A., Hasegawa T., Denn M.M. On the apparent relation between adhesive failure and melt fracture // J. Rheol. 1990. V. 34. № 4. P. 891–918.
5. El Kissi N., Piau J.M. Adhesion of linear low-density polyethylene for flow regimes with sharkskin // J. Rheol. 1994. V. 38. № 5. P. 1447–1463.
6. Brutyayn M.A., Krapivsky P.L. Existence and nonexistence of solutions for some rheological models of viscoelastic liquids // J. Rheol. 1992. V. 36. № 6. P. 1499–1515.
7. Brutyayn M.A., Krapivsky P.L. Unidirectional flows of viscoelastic fluids and their gasdynamic counterparts // ZAMP. 1992. V. 43. № 4. P. 715–725.
8. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O., Curtiss. Dynamics of polymeric liquids, London: J. Wiley and Sons, 1977. V. 1. 740 p. V. 2. 256 p.
9. Joseph D.D., Saut J.C. Short-wave instabilities and ill-posed initial-value problems // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1990. V. 1. № 4. P. 191–227.
10. Hunter J., Slemrod M. Viscoelastic fluid flow exhibiting hysteretic phase changes // Phys. Fluids, 1983. V. 26. № 9. P. 2345–2351.
11. Evans D.J., Morris G.P. Statistical mechanics of nonequilibrium liquids. N.Y., Acad. Press, 1990. 392 p.