

УДК 532.5.031 : 533.694

© 1996 г. Д.Ф. АБЗАЛИЛОВ, Н.Б.ИЛЬИНСКИЙ, Г.Ю. СТЕПАНОВ

**ПОСТРОЕНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ОТБОРОМ  
ВНЕШНЕГО ПОТОКА**

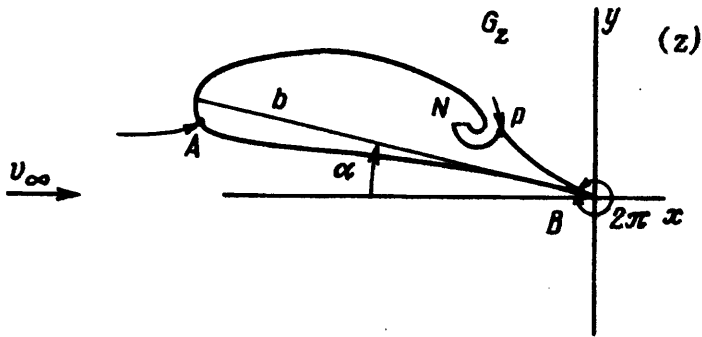
Предложен метод численно-аналитического построения высоконесущего крылового профиля со щелевым отбором воздуха из внешнего потока в модели идеальной несжимаемой жидкости. Щель отбора представляется каналом с постоянными скоростями на стенках. Приведены примеры построения безотрывно обтекаемых крыловых профилей с коэффициентами подъемной силы  $C_y = 2,68$  и  $4$  при относительной максимальной скорости на профиле  $|v_{\max}|/v_{\infty} = 2$  и  $2,2$ . На основе таких профилей просматривается схема самолета типа летающего крыла с размещением внутри него двигателей и полезной нагрузки.

В обратных краевых задачах аэрогидродинамики в качестве исходных данных обычно задают распределение скорости по поверхности крылового профиля, форму которого необходимо определить. На важность решения таких задач исследователи обратили внимание еще в конце 20-х годов нашего столетия [1, 2], но и в наши дни интерес к ним не ослабевает [3, 4]. Подход, основанный на теории обратных краевых задач, имеет преимущества перед прямым, особенно при проектировании новых крыловых профилей, обладающих улучшенными аэродинамическими характеристиками.

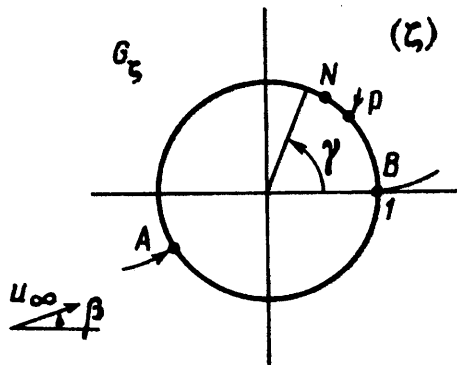
Одним из способов улучшения аэродинамических свойств крыла, в частности получения больших коэффициентов подъемной силы при безотрывном обтекании, является его снабжение устройством отбора внешнего потока. Известны различные математические модели таких устройств. Решение обратных задач при моделировании щели стоком или эквипотенциалью приведено в [4].

В настоящей работе поставлена и исследована обратная задача для крылового профиля со щелевым отбором воздуха из внешнего потока в модели идеальной несжимаемой жидкости. Контур считается гладким (кроме точки схода потока), а щель представляется каналом с постоянными скоростями на стенках [5]. Следуя Лайтхиллу [6], скорость на контуре профиля задана неубывающей функцией  $\gamma$  дуги окружности в канонической области параметрического переменного  $|\zeta| > 1$ . Для выполнения условий разрешимости, т.е. замкнутости искомого контура профиля и совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения, в исходное распределение скорости  $u(\gamma)$  введены свободные параметры. В отличие от Лайтхилла в принятой схеме обтекания учтен отбор внешнего потока и этим устранен физически нереальный спиральный завиток на контуре профиля, возникающий в точке заданного разрыва скоростей  $[u(\gamma)]$ .

**1. Постановка задачи.** В физической плоскости  $z = x + iy$  искомый крыловой профиль  $AB$  обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной на бесконечности скоростью  $v_{\infty}$  набегающего потока (фиг. 1). Точка схода потока  $B$  принята за начало координат, ось абсцис выбрана параллельно направлению скорости  $v_{\infty}$ , внутренний к области течения угол в точке  $B$  считается равным  $2\pi$ . Скорости будем считать безразмерными, отнесенными к  $v_{\infty} = 1$ , а линейные размеры – отнесенными к хорде  $b = 1$  профиля. Щель для отбора воздуха из внешнего потока схематизируем бесконечнолистным завитком, асимптотически переходящим в кольцевой канал шириной  $h = R - r$  с постоянными скоростями на его стенках. Здесь  $R$



Фиг. 1. Плоскость  $z$  течения



Фиг. 2. Плоскость  $\zeta$  параметрического переменного

и  $r$  – соответственно внешний и внутренний радиусы границ канала. Коэффициент  $q$  расхода  $Q$  через щель  $q = Q/(u_\infty b)$  тоже задан.

На искомом контуре профиля задаем распределение скорости  $u(\gamma)$  с несколькими свободными параметрами, где  $\gamma$  – полярная координата в канонической области  $|\zeta| > 1$  плоскости  $\zeta$  (фиг. 2). Соответствующие точки в плоскостях  $z$  и  $\zeta$  обозначены одинаковыми буквами. Для взаимно однозначного конформного отображения областей  $G_z$  и  $G_\zeta$  предполагается соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей  $z$  и  $\zeta$ , а также переход точки  $z = 0$  в точку  $\zeta = 1$ .

Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические и геометрические характеристики.

**2. Схема решения задачи.** Обозначим через  $u_\infty$  и  $\beta$  соответственно модуль и аргумент скорости на бесконечности в плоскости  $\zeta$  (фиг. 2). Комплексно-сопряженную скорость  $dw/d\zeta$  обтекания единичного круга со стоком в точке  $N$  нетрудно выписать, воспользовавшись методом особенностей (см., например, [7])

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} \frac{(\zeta - \zeta_a)(\zeta - \zeta_p)(\zeta - 1)}{\zeta^2(\zeta - \zeta_n)} \quad (2.1)$$

где  $\zeta_a = e^{i\gamma_a}$ ,  $\zeta_p = e^{i\gamma_p}$ ,  $\zeta_n = e^{i\gamma_n}$  – координаты точек  $A, P, N$  на окружности  $|\zeta| = 1$ .

Угол  $\beta$  находится по формуле  $\beta = (\gamma_a + \gamma_p - \gamma_n - \pi)/2$ , следующей из (2.1) с учетом того, что окружность является линией тока. Из анализа поведения функции (2.1) на бесконечности определяются (с точностью до множителя  $u_\infty$ , об определении которого

будет сказано ниже) циркуляция  $\Gamma$  и расход  $Q$

$$\Gamma = 2\pi u_{\infty} [\sin \beta - \sin(\gamma_a - \beta) - \sin(\gamma_p - \beta) + \sin(\gamma_n - \beta)] \quad (2.2)$$

$$Q = 2\pi u_{\infty} [\cos \beta + \cos(\gamma_a - \beta) + \cos(\gamma_p - \beta) - \cos(\gamma_n - \beta)]$$

Введем в рассмотрение аналитическую функцию Мичела – Жуковского

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz} = \ln v - i\theta = S - i\theta \quad (2.3)$$

Эта функция имеет логарифмические особенности на окружности в точках  $A$ ,  $N$  и  $P$ . В дальнейшем целесообразно использовать вспомогательную функцию без особенностей

$$\chi^{\circ}(\zeta) = S^{\circ} - i\theta^{\circ} = \ln \frac{dw}{dz} - \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) + \frac{ai}{\pi} \ln \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right) \quad (2.4)$$

где постоянная  $a = \ln(v_1/v_2)$ . На границе  $\zeta = e^{i\gamma}$  круга известна действительная часть этой функции

$$S^{\circ}(\gamma) = \ln \left| \frac{v(\gamma)}{4 \sin(\gamma - \gamma_a) / 2 \sin(\gamma - \gamma_p) / 2} \right| + \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2\pi} - \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2|\gamma - \gamma_n|} \quad (2.5)$$

ограниченная и непрерывная всюду при  $\gamma \in [0, 2\pi]$ .

Мнимая часть функции  $\chi^{\circ}(\zeta)$  на границе круга восстанавливается интегралом Шварца – Гильберта

$$\theta^{\circ}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S^{\circ}(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \sigma}{2} d\sigma$$

Угол  $\theta$  наклона касательной к контуру крылового профиля определим из (2.3) и (2.4)

$$\theta(\gamma) = \theta^{\circ}(\gamma) - \frac{\gamma_a + \gamma_p}{2} + \gamma + \pi + \frac{a}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \right| \quad (2.6)$$

Как следует из (2.6), в окрестности точки  $N$  функция  $\theta(\gamma)$  неограниченная. Координаты искомого контура профиля дает квадратура

$$dz = dx + idy = e^{i\theta} ds = e^{i\theta} \frac{u(\gamma)}{v(\gamma)} d\gamma \quad (2.7)$$

Здесь  $s$  – дуговая абсцисса контура крылового профиля, отсчитываемая от задней кромки  $B$  так, чтобы область течения оставалась слева. Функция

$$u(\gamma) = \frac{dw}{d\gamma} = 4u_{\infty} \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \quad (2.8)$$

есть значение модуля скорости (2.1) на границе круга  $\zeta = e^{i\gamma}$ .

Неизвестная в (2.8) скорость  $u_\infty$ , влияющая лишь на размеры контура профиля  $z(\gamma)$ , определяется из условия равенства единице хорды  $b$  профиля (фиг. 1). После определения расхода  $Q$  по (2.2) радиусы  $R$  и  $r$  границ канала отбора отыскиваются по формулам [5]

$$r = Q / (av_1), \quad R = Q / (av_2) \quad (2.9)$$

Так как при приближении  $\gamma$  к  $\gamma_n$  функции  $\theta(\gamma)$  и  $s(\gamma)$  становятся неограниченными, то интегрирование (2.7) ведется лишь до достижения углом  $\theta$  некоторого определенного значения  $\theta_{\min}$  (в расчетах  $\theta_{\min} = -3\pi/2$ ).

**3. Условия разрешимости.** Заданная величина скорости на бесконечности в физической плоскости  $z$  может быть также найдена из (2.4) при  $z \rightarrow \infty$ . Необходимо выполнить условие совпадения заданной скорости  $u_\infty$  с определяемой в процессе решения. Это условие имеет вид

$$\int_0^{2\pi} S^\circ(\gamma) d\gamma = 0 \quad (3.1)$$

Условия замкнутости искомого контура крылового профиля, выводимые из комплексного соотношения  $\operatorname{res}(dw/dz) = 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ , также выражаются через  $S^\circ(\gamma)$  (см. [4])

$$\int_0^{2\pi} S^\circ(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(\cos \gamma_n - 1) + a \sin \gamma_n \quad (3.2)$$

$$\int_0^{2\pi} S^\circ(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi \sin \gamma_n - a \cos \gamma_n \quad (3.3)$$

Условия разрешимости (3.1)–(3.3) с учетом (2.5) представляют собой систему трех нелинейных интегральных уравнений, налагающих ограничения на класс исходных распределений скорости  $u(\gamma)$ .

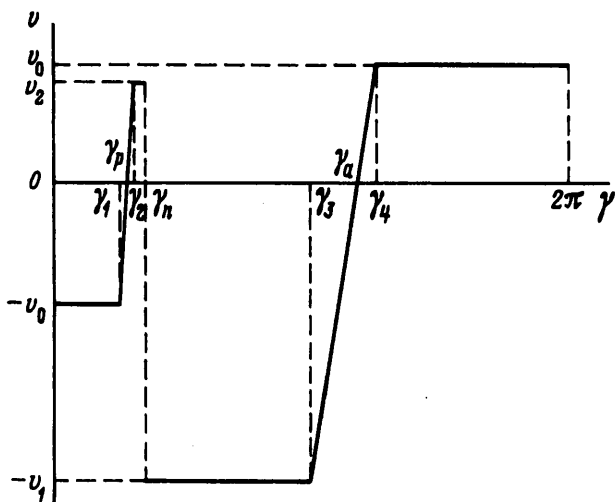
**4. Задание исходного распределения скорости.** Для выполнения условий разрешимости достаточно задавать трехпараметрический класс распределений  $u(\gamma, a_1, a_2, a_3)$ , при этом свободные параметры  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) следует искать из условий разрешимости (3.1)–(3.3).

Ввиду задания безразмерного расхода  $q$  через щель появляется еще одно условие, выполнять которое следует с помощью введения четвертого свободного параметра в  $u(\gamma)$ .

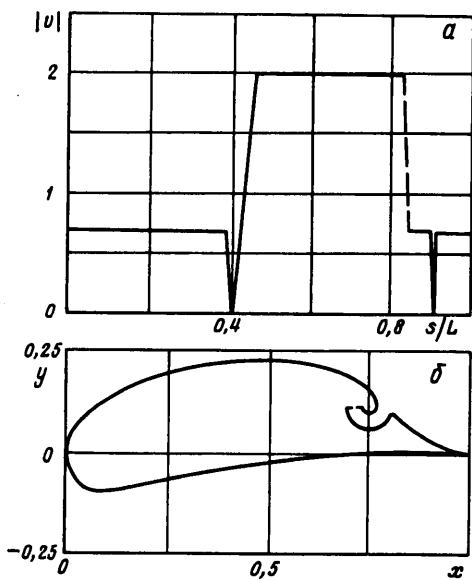
Для получения желаемых геометрических характеристик профиля (например, заданного отстояния щели от задней кромки, заданной ширины канала) исходное распределение скорости задаем зависящим от восьми параметров:  $u_0, v_1, v_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_n, \gamma_3, \gamma_4$ . Схематично такое распределение  $u(\gamma)$  изображено на фиг. 3.

Знак скорости связан с направлением роста  $\gamma$  и поэтому  $u > 0$  при  $\gamma \in (\gamma_p, \gamma_n) \cup (\gamma_a, 2\pi)$  и  $u < 0$  при  $\gamma \in (0, \gamma_p) \cup (\gamma_n, \gamma_a)$ . Задание скорости в таком виде обеспечивает в рамках принятой математической модели безотрывное обтекание крылового профиля за счет отсутствия участков падения скорости. В потоке вязкой жидкости отбор должен быть таким, чтобы основная часть пограничного слоя, образовавшегося на профиле, уходила бы в канал отбора.

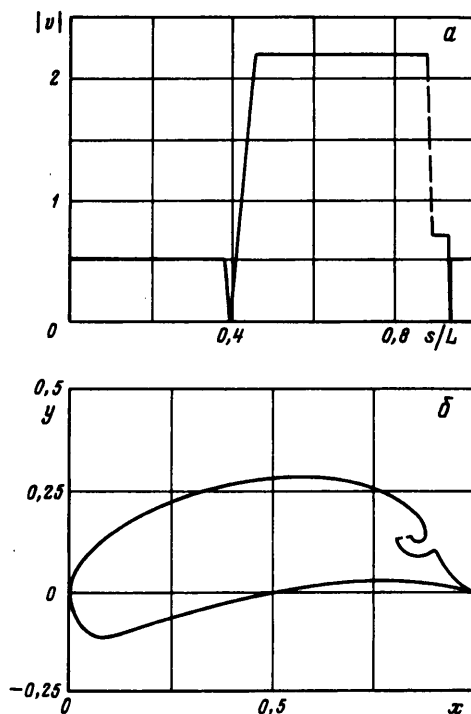
Для получения заданного коэффициента расхода  $q$  и выполнения условий разрешимости параметры  $\gamma_1, u_0, \gamma_3, \gamma_4$  определялись в процессе решения задачи. Угол  $\gamma_n$ , от которого зависит отстояние щели от задней кромки, задавался. Скорости  $v_1$  и  $v_2$  на стенках канала отбора, однозначно связанные с радиусами закругления  $R$  и  $r$  формулами (2.9), также задавались; параметр  $\gamma_2$  был принят равным среднеарифметическому,  $\gamma_2 = (\gamma_1 + \gamma_n)/2$ .



Фиг. 3. Задаваемое распределение скорости на профиле



Фиг. 4. Пример построения, профиль № 1



Фиг. 5. Пример построения, профиль № 2

**5. Примеры построения крыловых профилей.** На фиг. 4 и 5 изображены построенные профили с соответствующими распределениями скоростей  $|v(s/L)|$ , где  $L$  – длина показанной части контура крылового профиля, включая малый участок, соединяющий по нормали стенки канала (на нем скорость изображена штриховой линией). Задаваемые ( $v_1, v_2, q, \gamma_n$ ), а также определяемые параметры и характеристики этих профилей приведены в таблице. Расчетный угол атаки  $\alpha$  указан в градусах, толщина  $t$  профиля, радиусы  $R$  и  $r$ , ширина  $h$  щели – в процентах длины хорды  $b$ . Коэффициенты

№ профиля	$v_1$	$v_2$	$q$	$\gamma_n$	$v_0$	$C_y$
1	2,0	0,7	0,04	0,8	0,686	2,68
2	2,2	0,7	0,04	0,6	0,513	4,00

№ профиля	$C_x$	$\alpha^\circ$	$t, \%$	$R, \%$	$r, \%$	$h, \%$
1	0,08	10	26,6	5,4	1,9	3,5
2	0,08	11	29,0	5,0	1,6	3,4

подъемной силы и сопротивления вычислены по формулам Жуковского [8]

$$C_y = 2\Gamma / (v_\infty b), \quad C_x = 2Q / (v_\infty b) = 2q$$

Второй (фиг. 5) крыловой профиль получен в результате модификации первого с целью увеличения  $C_y$  путем изменения скорости и уменьшения отстояния щели от задней кромки. Отметим, что скорость в точке  $B$  равна  $v_0 < v_\infty = 1$ , т.е. за выходной кромкой на критической линии тока происходит увеличение скорости.

Изложенный метод расчета реализован в НИИ математики и механики Казанского государственного университета в виде программы для PC 486DX-2(66); построение одного профиля по 500 точкам в диалоговом режиме занимает около 30 с.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weinig F.* Widerstands- und Tragflügelprofile mit vorgeschriebener Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche // ZAMM. 1929. В. 9. № 6. S. 507–509.
2. *Mangler W.* Die Berechnung eines Tragflügelprofiles mit vorgeschriebener Druckverteilung // Jbuch. Deutsch. Luftfahrtforschung. 1938. В. 1. S. 46–53.
3. *Eppler R.* Airfoil design and data. Berlin: Heidelberg; Springer-Verlag, 1990. 562 p.
4. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Потапов А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
5. *Степанов Г.Ю.* Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 30–42.
6. *Lighthill M.J.* A new method of two-dimensional aerodynamic design // Aeronaut. Res. Council. Rept. and Mem. 1945. № 2112.
7. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
8. *Жуковский Н.Е.* О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 4. С. 51–68.

Казань  
Москва

Поступила в редакцию  
26.X.1995