МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1996

УДК 532.51.013.4:536.24

© 1996 г. И.О. КЕЛЛЕР

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БИНАРНОЙ СМЕСИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА СОРЕ

Исследовано влияние слабой концентрации примеси на порог конвективной устойчивости равновесия бинарной смеси, заполняющей полость произвольной формы. В случае теплоизолированных границ доказана монотонность возмущений в окрестности критического числа Рэлея, что позволяет выразить критическое число Рэлея для смеси через его аналог для однокомпонентной жидкости при любых значениях параметра Соре. В общем случае границ произвольной теплопроводности получена оценка для критического числа Рэлея в области малых значений параметра Соре.

1. Рассмотрим полость G в твердом массиве, заполненную вязкой несжимаемой бинарной смесью. Неоднородное распределение температуры в смеси приводит к температурной и концентрационной (из-за эффекта термодиффузии) неоднородности плотности и, как следствие, к тепловой и термоконцентрационной конвекции [1]. В случае, когда распределение температуры в массиве задано так, что в полости имеется вертикальный градиент температуры, смесь может находиться в механическом равновесии, которое может стать неустойчивым при определенных значениях параметров.

В данной работе в предположении низкой концентрации одной из компонент (примеси) и при пренебрежении перекрестным эффектом диффузионной теплопроводности (эффектом Дюфора) рассматривается влияние примеси на порог конвективной устойчивости механического равновесия.

В рамках сделанных предположений безразмерные уравнения конвекции смеси в приближении Буссинеска, а также уравнение переноса тепла в массиве имеют вид [1]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{Pr}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} + \mathrm{Ra}(T(1+\varepsilon) + H)\boldsymbol{\gamma} \\
\mathrm{Pr}\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \mathrm{Le}\Delta H - \varepsilon\Delta T \\
\mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \Delta T \\
\mathrm{Pr}\frac{\partial T_m}{\partial t} = c\Delta T_m, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость, p – давление, T, T_m – температуры смеси и твердого массива. Кроме того, введена вспомогательная функция $H = C + \alpha T$, где C – концентрация более легкой компоненты, α – коэффициент термодиффузии.

В качестве единиц времени, расстояния, скорости, давления, температуры и концентрации выбраны соответственно h^2/ν, h, χ/h, $\rho\nu\chi/h^2$, Θ, $\Theta\,\beta_1/\beta_2$, где h – характерный размер полости, ρ – плотность смеси, β_1, β_2, χ, ν – коэффициенты теплового и "концентрационного" расширения (β_1, $\beta_2 > 0$), температуропроводности и вязкости соответственно. Единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ направлен вертикально вверх.

На границе полости заданы условия вязкого прилипания, непрерывности температуры и теплового потока, а также условие непротекания легкой компоненты

$$\Gamma:\ \mathbf{v}=0,\ \ T=T_m,\ \ \frac{\partial T}{\partial n}=k\frac{\partial T_m}{\partial n},\ \ \frac{\partial H}{\partial n}=0 \tag{1.2}$$

Здесь $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к границе.

Задача (1.1) – (1.2) содержит шесть безразмерных параметров: числа Рэлея, Прандтля, Льюиса, Соре, а также отношения коэффициентов температуропроводности и теплопроводности массива и смеси

$$\mathrm{Ra}=\frac{g\beta_1\Theta h^3}{\nu\chi},\ \ \mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\chi},\ \ \mathrm{Le}=\frac{D}{\chi},\ \ \varepsilon=\frac{\beta_1\alpha}{\beta_2},\ \ c=\frac{\chi_m}{\chi},\ \ k=\frac{\varkappa_m}{\varkappa}$$

где D – коэффициент диффузии.

При определенном задании температурного поля T_m в массиве система уравнений и граничных условий (1.1), (1.2) допускает равновесное решение

$$\mathbf{v}\equiv 0,\ \ H\equiv \mathrm{const}_1,\ \ p=\mathrm{Ra}(1+\varepsilon)z+\mathrm{const}_2,\ \ T=-z+\mathrm{const}_3 \tag{1.3}$$

Задача нахождения такого распределения температуры в массиве не является тривиальной. Если коэффициенты теплопроводности в жидкости и массиве различны, соответствующие формулы удается написать только в случае достаточно высокой симметрии полости. В [1] приведены решения для некоторых специальных форм области (плоского горизонтального слоя, эллипсоида вращения, вертикального и горизонтального эллиптических цилиндров).

Рассмотрим задачу об устойчивости равновесного распределения $\mathbf{v}$, H, p, T, T_m относительно малых нормальных (зависящих от времени по экспоненциальному закону) возмущений. Используя для амплитуд возмущений те же обозначения, что и для основных функций, получим следующую систему уравнений (уравнение неразрывности далее для краткости не пишем):

$$-\lambda\mathbf{v}=-\nabla p+\Delta\mathbf{v}+\mathrm{Ra}(T(1+\varepsilon)+H)+\boldsymbol{\gamma} \tag{1.4}$$

$$-\lambda\,\mathrm{Pr}\,T=\Delta T+v_z \tag{1.5}$$

$$-\lambda\,\mathrm{Pr}\,H=\mathrm{Le}\,\Delta H-\varepsilon\Delta T \tag{1.6}$$

$$-\lambda\,\mathrm{Pr}\,T_m=c\Delta T_m \tag{1.7}$$

Здесь $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i$ – декремент возмущений.

Условия для возмущений на границе полости Γ имеют вид

$$\Gamma:\ \mathbf{v}=0,\ T=T_m,\ \frac{\partial T}{\partial n}=k\frac{\partial T_m}{\partial n},\ \ \frac{\partial H}{\partial n}=0 \tag{1.8}$$

$$\Gamma_1:\ T_m=0 \tag{1.9}$$

Здесь Γ_1 – внешняя граница массива.

2. Рассмотрим предельный случай теплоизолированных границ $k=0$, т.е. $\partial T/\partial n=0$. Тогда уравнение теплопроводности для твердого массива (1.7) можно отбросить.

Покажем, что в этом случае потеря устойчивости при небольшой надкритичности связана с нарастанием монотонных возмущений, а критическое число Рэлея для смеси выражается через его аналог для однокомпонентной жидкости.

Умножим уравнения (1.5) и (1.6) на комплексно-сопряженные функции H^* и T^*

соответственно и проинтегрируем по объему полости G

$$-\lambda \Pr\langle TH^*\rangle = \langle \Delta TH^*\rangle + \langle v_z H^*\rangle \tag{2.1}$$

$$-\lambda \Pr\langle T^* H\rangle = \mathrm{Le}\langle \Delta HT^*\rangle - \varepsilon\langle \Delta TT^*\rangle \tag{2.2}$$

$$\langle\cdot\rangle = \int_G dG$$

Складывая (2.1) и комплексно-сопряженное к (2.2) и интегрируя по частям с учетом (1.2), получим

$$-2\lambda_r \Pr\langle TH^*\rangle = (\mathrm{Le}+1)\langle \Delta TH^*\rangle + \langle v_z H^*\rangle + \varepsilon\langle |\nabla T|^2\rangle \tag{2.3}$$

Умножим далее уравнения (1.4), (1.5), (1.6) на v^*, T^*, H^* соответственно, проинтегрируем по области и подставим выражение для $\langle \Delta TH^*\rangle$ из (2.3)

$$-\lambda\langle |\mathbf{v}|^2\rangle = -\langle |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|^2\rangle + \mathrm{Ra}\Big(\langle Hv_z^*\rangle + (\varepsilon+1)\langle Tv_z^*\rangle\Big) \tag{2.4}$$

$$-\lambda \Pr\langle |T|^2\rangle = -\langle |\nabla T|^2\rangle + \langle v_z T^*\rangle \tag{2.5}$$

$$-\lambda \Pr\langle |H|^2\rangle = -\mathrm{Le}\langle |\nabla H|^2\rangle + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Le}+1}\Big(\langle v_z H^*\rangle + \varepsilon\langle |\nabla T|^2\rangle + 2\lambda_r \Pr\langle TH^*\rangle\Big) \tag{2.6}$$

Прибавляя к уравнению (2.4) уравнения (2.5) и (2.6), умноженные соответственно на Ra $(\varepsilon + 1)$ и Ra $(\mathrm{Le} + 1)/\varepsilon$, получим

$$-\lambda\left\{\langle |\mathbf{v}|^2\rangle + \mathrm{Ra}\Pr(\varepsilon+1)\langle |T|^2\rangle + \frac{\mathrm{Ra}}{\varepsilon}\mathrm{Le}(\mathrm{Le}+1)\langle |H|^2\rangle\right\} =$$

$$= -\langle |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|^2\rangle - \mathrm{Ra}\langle |\nabla T|^2\rangle - \frac{\mathrm{Ra}}{\varepsilon}\mathrm{Le}(\mathrm{Le}+1)\langle |\nabla H|^2\rangle +$$

$$+2\,\mathrm{Ra}\,\mathrm{Re}\Big\{\langle Hv_z^*\rangle + (\varepsilon+1)\langle Tv_z^*\rangle\Big\} + 2\lambda_r \Pr\langle TH^*\rangle \tag{2.7}$$

Здесь $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ обозначает действительную часть.

В критической точке $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_c$ вещественная часть декремента $\lambda_r = 0$ и так как правая часть (2.7) действительна, то мнимая часть декремента λ_i также равна нулю. Следовательно, амплитуды нейтральных возмущений $\mathbf{v}_c$, T_c, H_c вещественны.

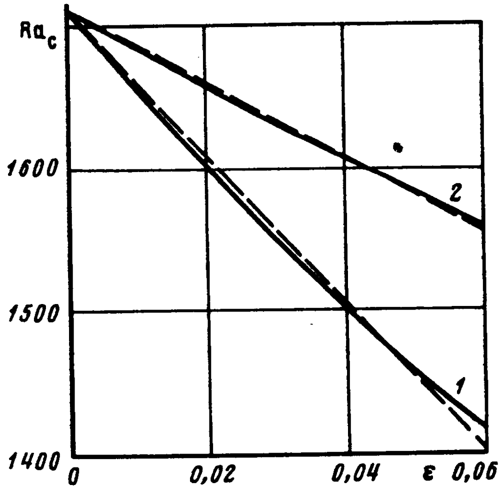
Легко показать, что декремент λ и амплитуды $\mathbf{v}$, T, H вещественны по крайней мере в конечной окрестности критического числа Ra_c. С этой целью разложим λ, $\mathbf{v}$, T, H в ряд по малому параметру – надкритичности $(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c)$. Подставляя разложения в (2.4) –(2.7), получим, что поправки $\lambda^{(n)}$, $\mathbf{v}^{(n)}$, $T^{(n)}$, $H^{(n)}$ в каждом порядке выражаются через поправки в предыдущих порядках и амплитуды нейтральных возмущений $\mathbf{v}_c$, T_c, H_c. Из вещественности последних следует вещественность λ, $\mathbf{v}$, T, H в области сходимости разложения.

Доказанная монотонность нейтральных возмущений позволяет получить простое соотношение, связывающее критическое число Рэлея для смеси Ra_c с его аналогом для однокомпонентной жидкости Ra_0

$$\mathrm{Ra}_c = \frac{\mathrm{Ra}_0}{1+\varepsilon+\varepsilon/\mathrm{Le}} \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8) получено впервые в [2] в предположении монотонности нейтральных возмущений.

3. Рассмотрим теперь общий случай произвольной теплопроводности массива. Считая параметр Соре ε малым, разложим критическое число Рэлея $\mathrm{Ra}_c(\varepsilon)$, декремент



Зависимость критического числа Рэлея от параметра Соре при Pr = 0,75. Сплошные линии – численное решение задачи (1.4) – (1.8), штриховые линии – график правой части неравенства (3.11). *1* – Le = 0,5, 2 – Le = 2

$\lambda = i\lambda_i$ и амплитуды $\mathbf{v}_c$, T_c, T_{mc}, H_c нейтральных возмущений в ряд по степеням ε вида

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots \tag{3.1}$$

Подставляя разложения (3.1) в (1.4) – (1.9), в нулевом порядке по ε получим задачу для определения критического числа Рэлея Ra_0 и амплитуд нейтральных возмущений $\mathbf{v}_0, p_0, T_0, T_{m0}, H_0$ в однокомпонентной жидкости. Из монотонности последних следует [3], что

$$\lambda_{0i} = 0, \quad H_0 = 0, \quad -\nabla p_0 + \Delta \mathbf{v}_0 + Ra_0\, T_0 \boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{3.2}$$

$$\Delta T_0 = -v_{0z} \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Le}\,\Delta H_1 = \Delta T_0, \quad \Delta T_{m0} = 0 \tag{3.4}$$

Неоднородное уравнение для импульса в первом порядке по ε имеет вид

$$-\nabla p_1 + \Delta \mathbf{v}_1 + Ra_0\, T_1 \boldsymbol{\gamma} = -[Ra_1\, T_0 + Ra_0(T_0 + H_1)]\boldsymbol{\gamma} - i\lambda_{1i}\mathbf{v}_0 \tag{3.5}$$

С учетом самосопряженности задачи и вещественности амплитуд в нулевом порядке условие разрешимости уравнения (3.5) имеет форму

$$\lambda_{1i} = 0, \; Ra_1 \langle T_0 v_{0z} \rangle = -Ra_0 \langle T_0 + H_1, v_{0z} \rangle \tag{3.6}$$

С точностью до первого порядка по ε, используя (3.3), (3.4) и (3.6), получим

$$Ra_c = Ra_0[1 - \varepsilon(1 + K)], \quad K = \mathrm{Le}\frac{\langle H_1 \Delta H_1 \rangle}{\langle T_0 \Delta T_0 \rangle} \tag{3.7}$$

Вводя обозначение $\langle \cdot \rangle_m$ для интеграла по твердому массиву и интегрируя (3.7) по частям, имеем

$$K = \frac{\mathrm{Le}\langle |\nabla H_1|^2 \rangle}{\langle |\nabla T_0|^2 \rangle + k\langle |\nabla T_{m0}|^2 \rangle_m} > 0 \tag{3.8}$$

Можно уточнить оценку (3.8). Для этого умножим уравнение для H_1 из (3.4) на T_0 и проинтегрируем по частям. Применяя затем неравенство Шварца, получим

$$-\mathrm{Le}^{-1}\langle \Delta T_0 T_0\rangle = \langle \nabla H_1 \Delta T_0\rangle \leqslant \langle |\nabla H_1|^2\rangle^{1/2}\langle |\nabla T_0|^2\rangle^{1/2}$$

$$\langle |\nabla H_1|^2\rangle \geqslant \mathrm{Le}^{-2}\frac{\langle \Delta T_0 T_0\rangle^2}{\langle |\nabla T_0|^2\rangle} \qquad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) следует оценка $K \geqslant \mathrm{Le}^{-1}$, с учетом которой из (3.7) получим

$$\mathrm{Ra}_c \leqslant \mathrm{Ra}_0[1-\varepsilon-\varepsilon/\mathrm{Le}]. \qquad (3.10)$$

Для проверки полученной оценки для Ra_c задача (1.4) – (1.8) решалась для плоского горизонтального слоя с идеально теплопроводными границами. Использовался метод Галеркина с девятью базисными функциями. Полученные из расчетов зависимости $\mathrm{Ra}_c(\varepsilon)$ для двух значений числа Льюиса Le = 0,5, Le = 2 и при фиксированном Pr = 0,75 представлены на фигуре сплошными линиями *1* и *2* соответственно. Штриховые линии соответствуют оценке (3.10).

Полученные оценки тем точнее, чем меньше относительная теплопроводность массива k. В пределе $k = 0$ неравенство (3.10) переходит в равенство, совпадающее с (2.8) с точностью до $O(\varepsilon)$.

Автор выражает глубокую благодарность Б.И. Мызниковой за внимание к работе и полезные рекомендации.

Заключение. Учет эффекта Соре при конвекции бинарной примеси уменьшает практическое значение числа Рэлея по сравнению с его однокомпонентным аналогом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. *Накорякова С.Б.* К вопросу об устойчивости механического равновесия неравномерно нагретой бинарной смеси // Сб. научн. тр. Пермск. политехн. ин-та. 1963. N 13. С. 58–66.
3. *Сорокин В.С.* Вариационный метод в теории конвекции. // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 1. С. 39–48.

Пермь

Поступила в редакцию
27.IV.1995