

УДК 532.59

© 1996 г. Э.Л. АМРОМИН

ВОЛНЫ СТОКСА НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Рассматривается осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости, вращающейся вокруг полости, давление в которой постоянно. Благодаря центробежной силе на поверхности полости возможно существование волн и, в частности, волн с изломами в подошвах, где меридиональные сечения этой полости образуют угол в $2\pi/3$, т.е. волн Стокса. Описывается метод отыскания таких волн из краевой задачи для потенциала скорости жидкости и для случая бесконечной полости приводятся зависимости их характеристик от числа кавитации, построенного по давлению в полости.

Волны с изломами свободной поверхности и нулевой скоростью в точках изломов существуют во многих течениях идеальной жидкости. К настоящему времени построены прогрессивные волны Стокса в бесконечно глубоком потоке [1] и в жидкости ограниченной глубины [2], свободные солитоны Стокса [3] и солитоны, вызванные изолированными гидродинамическими особенностями [4, 5]. Для существования упомянутых волн было необходимо наличие в условии постоянства давления на свободной поверхности явной функции ее координаты. В [1–5] это обеспечивалось влиянием силы тяжести, но аналогичной может быть и роль центробежной силы.

1. Рассматривается волновое движение на поверхности осесимметричной газовой полости в несжимаемой невязкой жидкости, вращающейся вокруг оси симметрии со скоростью $w = \Gamma/(2\pi y)$. Здесь используется цилиндрическая система координат $\{x, y, \theta\}$, Γ – заданная постоянная. Полость обтекается продольным потоком, скорость которого в любой точке определяется из решения следующей краевой задачи для потенциала скорости Φ :

$$\Delta \Phi = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0, \quad \{x, y, \theta\} \in S; \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \{\text{grad } \Phi\} = \{-V, 0, 0\} \quad (1.2)$$

Здесь N – нормаль к поверхности полости S , в качестве единицы скорости будет в дальнейшем использоваться V . У бесконечной полости нет заданных характерных размеров и за естественную единицу длины выбрано отношение $\Gamma/(2\pi V)$. С помощью интеграла Бернулли

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2\pi y}\right)^2 + \frac{2p}{\rho} = C$$

$$C = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

условие постоянства давления на S примет форму

$$U^2 + y^{-2} = 1 + \sigma \quad (1.3)$$

$$U^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2, \quad \sigma = 2 \frac{p_\infty - p_c}{\rho V^2}$$

p_∞ и p_c – значения давления на бесконечности и в полости, а изломы ее поверхности имеют координаты

$$y\{k\lambda\} = (1 + \sigma)^{-0.5} \quad (1.4)$$

для любого целого k , однако длина волны λ заранее неизвестна. Кроме того, при отыскании волн Стокса необходимо фиксировать углы в изломах S

$$\frac{dy}{dx}\{k\lambda + e\} = \frac{\text{sign}(e)}{2}, \quad e \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

Система соотношений (1.1)–(1.5) позволяет отыскать форму волн при заданном значении единственного параметра этой задачи – числа кавитации σ ; однако задача (1.1)–(1.5) нелинейна.

Используемый ниже итеративный метод ее решения в своей основе совпадает с изложенным в [2, 4, 5] и схож с хрестоматийным методом Ньютона для систем трансцендентных уравнений. Каждая итерация состоит из трех этапов. На первом производится расчет обтекания заданной поверхности S' , для которой решается задача (1.1)–(1.2). На втором этапе на выделенной для контроля части S' проверяется (1.3) и, если там невязка этого условия достаточно мала, вся S' отождествляется с S , а задача полагается решенной. В противном случае переходят к третьему этапу – к коррекции формы полости на основе квазилинеаризованного на ней условия постоянства давления; при этом контролируется соблюдение условий (1.2), (1.4), (1.5) для новой формы.

Третий этап является принципиально приближенной операцией, а точность решения нелинейной задачи (1.1)–(1.5) в целом определяется точностью первого этапа. Поэтому распределение U на S должно быть результатом полученного с контролируемой точностью решения заведомо корректной задачи математической физики.

2. Такой задачей может быть внешняя задача Неймана, но для нее надо подменить бесконечную полость ограниченной поверхностью S^* длины L . Ясно, что при $a = L/\lambda \gg 1$ в средней части S^* можно обеспечить периодичность U с большой точностью и легко показать, что в осесимметричном потоке упомянутая подмена повлечет за собой погрешности в вычислении U порядка a^{-2} . Представление об используемой при вычислениях S^* дает фиг. 1. Следствием (1.1)–(1.2) на ней является уравнение

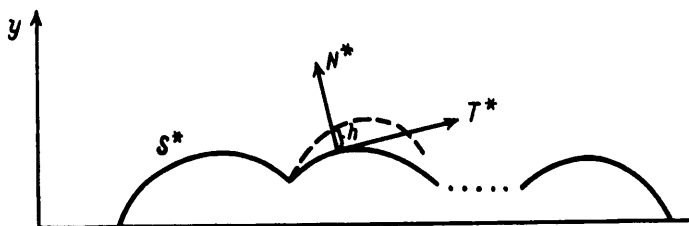
$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(S^*)} Q \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} ds - Q = 2N_x \quad (2.1)$$

относительно обильности источников Q , а аксиальная и радиальная компоненты скорости вычисляются с помощью формул Кулона

$$u = 1 - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S^*)} Q \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} ds; \quad v = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(S^*)} Q \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} ds \quad (2.2)$$

где N_x – компонента N , а r – расстояние от произвольной до контрольной точки на S^* . При $a > 10$ значения U в однофазных точках средней и соседней с ней волн различаются на доли процента.

Проверка условия (1.3) требует уточнения правила определения p_∞ . Чтобы не оперировать неограниченными p и U с оси симметрии, можно либо ввести некую схему замкнутых вихревых линий, при которой азимутальная скорость при $|x| \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$



Фиг. 1. Схема сопоставления искомой и известной поверхностей

останется ограниченной, либо ввести вязкое ядро вихря (например, по формуле из [6]), в котором эта скорость убывает, либо, уклонившись от определения p вблизи бесконечно удаленной точки оси, отождествлять p_∞ с невозмущенным давлением при $y \gg \lambda$. Последний вариант был бы наиболее близок к практике лабораторных опытов.

На этапе корректировки S рассматривается только одна волна в середине S^* . На ней ищется расстояние h между S^* и искомой поверхностью S , откладываемое вдоль нормали N^* к S^* и в соответствии с (1.5), (1.4), совмещая начало координат с подошвой, требуем

$$h(0) = 0, \quad \frac{dh}{dT^*}(0) = 0 \quad (2.3)$$

где T^* — орт касательной к меридиональному сечению S^* . На каждой итерации рассматриваются предположительно малые изменения координат S и невязки $f = U^2 + y^{-2} - \sigma - 1$, т.е.

$$|h| \ll \lambda; \quad |dh/dT^*| \ll 1; \quad |f| \ll 1 \quad (2.4)$$

причем df — линейная аппроксимация f — обратится в нуль под действием четырех факторов: изменения центробежной силы с приращением радиуса S^* на hN_y^* ; отклонения нормали к этой поверхности на $n = N - N^*$; перемещения точки, в которой вычисляются компоненты скорости $\{\partial\Phi/\partial T, \partial\Phi/\partial N\}$, на расстояние h от поверхности распределения источников обильности Q ; варьирования их обильности на некоторую малую величину q . Следствием (2.4) является также соотношение

$$\cos(n, T^*) = -\frac{dh}{dT^*} \quad (2.5)$$

и поэтому в итоге все четыре фактора определяются только двумя функциями: $h(l)$ и $q(l)$, где l — дуговая абсцисса меридионального сечения S^* . Для их отыскания достаточно условия обращения в нуль df и квазилинеаризованного на S^* условия (1.2). Не воспроизводя здесь подробно описанные в [7] преобразования для квазилинеаризации $\{\partial\Phi/\partial T, \partial\Phi/\partial N\}$, можно сразу выписать линейные уравнения, полученные из (1.2), (1.3) для h и q :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial N^*} = -\frac{d(U^*h)}{dT^*}, \quad 2U^* \frac{\partial\Phi}{\partial T^*} + \frac{hN_y^*}{2y^3} = f \quad (2.6)$$

Здесь предполагалось малым произведение кривизны меридионального сечения S^* на длину волны, U^* означает U на S^* , а $\Phi = \Phi(q, S^*)$. В (2.6) содержатся те же операторы, что и в (2.1), (2.2), т.е. практически можно использовать элементы уже вычислявшихся матриц. Однако опыт решения математически подобных задач показал, что допустимы и рациональны дальнейшие упрощения, основанные на указанном выше предположении о кривизне S^* и использовании только одной волны для распределения

$q(l)$. При этих упрощениях (2.6) переходят в

$$2U^*h = \int_0^l q(z)dz \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{l(\lambda)} \frac{q(z)}{l-z} dz + \frac{N_y^*}{y^3 U^{*2}} \int_0^l q(z)dz = bf \quad (2.8)$$

Введение положительного коэффициента релаксации b ($b < 1$ всегда, а конкретно использовалось $b = 0,4$) отчасти компенсирует рост погрешности определения q из-за априорных упрощающих предположений. Вместо отыскания q из сингулярного интегрального уравнения (2.8) удобнее решать полученное из него с помощью обращения интеграла Коши уравнение Фредгольма второго рода

$$q(l) + \frac{R(l)}{\pi} \int_0^{l(\lambda)} \frac{N_y^*}{U^{*2} R(z) y^3} \int_0^z q(t) dt \frac{dz}{l-z} = \frac{bR(l)}{\pi} \int_0^{l(\lambda)} \frac{f(z) dz}{(l-z)R(z)}$$

$$R(z) = \sqrt{z / [z(\lambda) - z]}$$

Однако такое q невозможно использовать в (2.7) для всей волны, поскольку нельзя будет обеспечить соблюдение (1.4), (1.5) при произвольной f и неуточненной λ . Поэтому следующее из (2.7) правило $x = x^* + hN_x^*$; $y = y^* + hN_y^*$ используется только до того значения $x = x'$, при котором y будет иметь максимум. Далее, как и в [2], полагают $\lambda = 2x'$, $y(x) = y(2x' - x)$ на рассматриваемой волне, остальные к началу новой итерации копируют по ней.

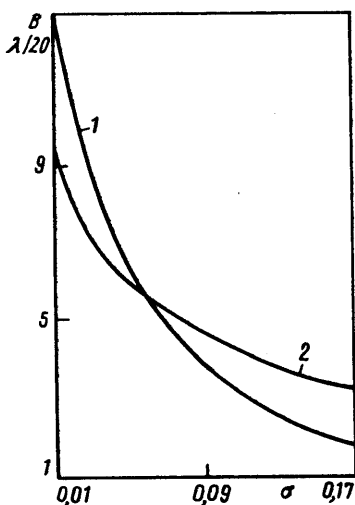
Аналогия между описываемым вычислительным методом и методом Ньютона побуждает обратиться к теоремам [8] о сходимости последнего. Однако эти теоремы гарантируют ее лишь для весьма малых невязок рассматриваемых нелинейных уравнений, хотя опыт вычислений не подтверждает необходимости жестких ограничений на начальное приближение к S . Практически сходимость вычислительных процессов ньютоновского типа оценивается сопоставлением невязок в нелинейных условиях после достаточно точного вычисления всех фигурирующих в них функций. В данном случае таким достаточно точным вычислением является решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа (точность можно неограниченно повышать привлечением соответствующих ресурсов ЭВМ). Таким образом, мера приближения к точному решению нелинейной задачи оценивается здесь вполне достоверно, хотя такой анализ и не дает никакой информации о единственности решения.

Типичное распределение невязки f вдоль полуволны для $\sigma = 0,085$, соответствующее итогу 12 итераций, представлено ниже:

x/λ	0	0,0172	0,0681	0,1471	0,2424	0,3333	0,3982	0,4670	0,4851	0,5
f	0	0,0017	0,0021	-0,007	-0,008	-0,006	-0,003	-0,001	0,0002	0,0009

Основные результаты расчетов представлены здесь в виде зависимостей длины волны и максимальной ширины полости B от σ на фиг. 2 и набора форм полости на фиг. 3. Наименьшее значение σ заметно больше нуля потому, что в вершине волны $w > 0$ и в силу выпуклости S там также $U > 1$.

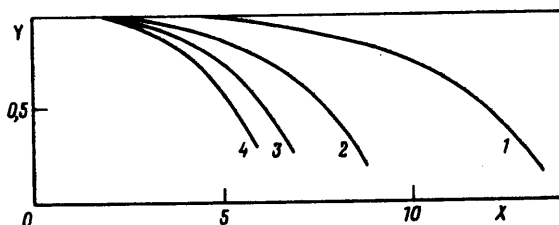
Интересно также сравнить форму осесимметричных и плоских волн Стокса наибольшей длины. На фиг. 4 результаты настоящих расчетов сопоставлены с результатами [2] для плоского потока конечной глубины, причем ось ординат этого гра-



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость длины волны λ (кривая 1) и максимальной ширины плоскости B (кривая 2) от σ

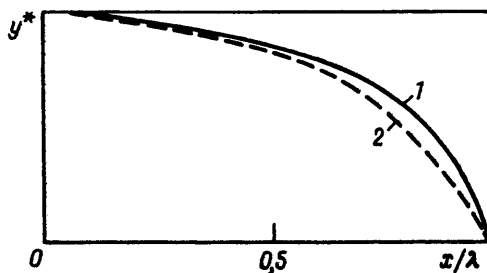
Фиг. 3. Формы полуволн ($X = x/B$, $Y = y/B$). Кривые 1–4 соответствуют $\sigma = 0,03; 0,08; 0,14; 0,17$



Фиг. 3

фика направлена параллельно вызывающей волну массовой силе, а единицей там является модуль разности ординат подошвы и гребня волн.

Заключение. Рассмотренную задачу можно было бы назвать задачей о волнах на кавитирующем вихре. Как и в случае течения поверхностных волн в поле силы тяжести, волны Стокса здесь являются предельным абстрактным случаем реально наблюдаемых волн, всегда имеющих меньшие амплитуды, и приведенные результаты



Фиг. 4. Сопоставление формы плоских и осесимметричных волн Стокса наибольшей длины: 1 – осесимметричная форма; 2 – плоская форма

могли бы использоваться для оценки критических скоростей вращения непроницаемой для жидкости полости. При меньших скоростях эти волны должны бы разрушаться подобно поверхностным волнам и в рассматриваемом здесь случае жидкость проникла бы в полость, причем такой нестационарный процесс сопровождался бы усилением гидродинамического шума. Затем можно было бы ожидать дробления полости на части. При фиксированных числе кавитации и интенсивности вихря подобное же следствие имело бы некоторое повышение давления вдоль оси симметрии течения и описанной здесь расчетный метод позволил бы анализировать такой поток. Однако автор не имеет возможности представить экспериментальные данные, подтверждающие такую трактовку расчетных зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Michell J.H.* The highest waves in water // *Phil. Mag. Ser 5.* 1893. № 36. P. 430–437.
2. *Амромин Э.Л., Иванов А.Н., Садовников Д.Ю.* Предельные волны Стокса в жидкости конечной глубины // *Изв. РАН. МЖГ.* 1994. № 14. С. 125–129.
3. *Lenau C.W.* The solitary wave of maximum amplitude // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 26. Pt 2. P. 309–320.
4. *Амромин Э.Л., Басин М.А., Бушковский В.А.* Два решения пространственной задачи о предельных волнах на поверхности весомой жидкости // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 162–165.
5. *Амромин Э.Л., Бушковский В.А., Садовников Д.Ю.* Уединенные волны Стокса при течении весомой жидкости в щель // *Изв. РАН. МЖГ.* 1991. № 6. С. 173–176.
6. *Амромин Э.Л.* Оценка радиуса вязкого ядра вихря // *ПММ.* 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 150–151.
7. *Амромин Э.Л., Бушковский В.А.* Приближенное решение трехмерной обратной задачи для несущих тел с оптимальными кавитационными характеристиками // *Изв. РАН. МЖГ.* 1994. № 3. С. 92–100.
8. *Канторович Л.В.* О методе Ньютона // *Тр. Мат. ин-та им. Стеклова.* 1949. Т. 28. С. 104–144.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
26.IX.1995