

УДК 532.526.5

© 1996 г. Вик.В. СЫЧЕВ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ И ОТРЫВЕ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЙ С МАЛЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ТРЕНИЕМ

Рассмотрено плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса около малых неровностей на прямолинейных стенках, в точке пересечения которых находится точечный источник. Детально исследованы режимы обтекания при значении угла полураствора диффузора, близкого к критическому, когда величина поверхностного трения мала. Получены решения, описывающие течения с локальными зонами отрыва. Установлено значение величины поверхностного трения в зависимости от числа Рейнольдса, при которой происходит переход к течениям с развитыми областями возвратных токов.

Согласно результатам асимптотической теории [1–3], стационарный отрыв потока при больших числах Рейнольдса происходит благодаря большому самоиндуцированному градиенту давления, действующему на малом участке обтекаемой поверхности и возникающему в результате взаимодействия течений в пограничном слое и внешней области. При этом приходящий к области взаимодействия пограничный слой обладает конечным поверхностным трением и обращение последнего в нуль, т.е. собственно отрыв, происходит внутри самой области взаимодействия. Изложение результатов многочисленных исследований по теории самоиндуцированного отрыва, включающих, в частности, изучение течений с локальными зонами возвратных токов около малых неровностей на обтекаемой поверхности, содержится в обзорах [4–7] и монографии [8].

Представляет интерес рассмотреть течения с областями отрыва, в которых исходный невозмущенный поток имеет малое поверхностное трение на всей обтекаемой поверхности. В данной работе это делается на примере решения Джеффри [9] и Гамеля [10] (см. также [11–13]), описывающего плоское стационарное течение несжимаемой жидкости от источника, расположенного в точке пересечения двух прямолинейных стенок. В качестве возмущающего фактора, приводящего к появлению возвратных токов, берутся малые двумерные неровности, расположенные на этих стенках.

Ранее в [14–18] были изучены течения, в некотором смысле близкие к рассматриваемому. Так, в [14] было рассмотрено сверхзвуковое течение с пограничным слоем, находящимся под действием заданного неблагоприятного градиента давления, так что в приходящем к области взаимодействия потоке вырабатывается малое поверхностное трение. В [15–18] были рассмотрены пульсирующие течения в каналах с неровностями на стенках, когда в некоторый момент времени также возникают области с малым трением.

1. Решение Джеффри и Гамеля [9, 10], являющееся точным решением полных уравнений Навье–Стокса, имеет вид

$$u = r^{-1}F(y), \quad v = 0, \quad p = r^{-2}P(y), \quad \theta = \alpha y \quad (1.1)$$

Здесь Lr , θ – полярные координаты, $u_m u$ и $u_m v$ – соответствующие проекции вектора скорости, ρu_m^2 – перепад давления, ρ – плотность жидкости. Начало системы координат находится в точке пересечения стенок, задаваемых условием $\theta = \pm\alpha$ и на которых выполняется условие прилипания. Через u_m обозначена характерная скорость,

равная максимальному ее значению в плоскости симметрии $\theta = 0$ при $Lr = L$, где L – характерная длина, которая будет определена ниже. Искомые функции при этом определяются из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} F''' + \alpha^2 4F' + \beta 2FF' &= 0 \\ -2P &= \beta^{-1}F'' + F^2, \quad \beta = \alpha^2 \text{Re} \\ F(1) = F(-1) &= 0, \quad F(0) = 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\text{Re} = u_m L / \nu$ – число Рейнольдса, ν – коэффициент кинематической вязкости.

Как известно [10] (см. также [19]), для каждого значения Re существует критическое значение $\alpha_0 = \alpha_0(\text{Re})$, такое, что при $\alpha < \alpha_0$ имеет место чисто расходящееся течение, т.е. $F(y) > 0$; если α превосходит α_0 , то вблизи стенок появляется возвратное течение с $F(y) < 0$. При $\alpha = \alpha_0$ реализуется течение без противотоков, но с нулевым поверхностным трением: $F'(\pm 1) = 0$. Детальное исследование возможных режимов течения было дано в [20].

Цель данной работы состоит в рассмотрении течений при значениях α , близких к α_0 , и $\text{Re} \rightarrow \infty$. При этом будет изучаться влияние малых неровностей, расположенных на верхней и нижней ($y = \pm 1$) стенках на расстоянии L от источника.

Для течения от источника (см. [19, 12]) относительная величина сил вязкости не может уменьшаться неограниченно с ростом числа Рейнольдса: решение задачи для пристеночных пограничных слоев не существует [13]. Поэтому, согласно (1.2), при $\text{Re} \rightarrow \infty$ решение зависит от параметра $\beta = \alpha^2 \text{Re} = O(1)$, являющегося мерой отношения сил инерции и вязкости. Поскольку основное внимание будет уделено рассмотрению течений при α , близких к α_0 , положим

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^2 \text{Re} = \beta_0 + \Delta_1 \beta_1, \quad \beta_0 = \alpha_0^2 \text{Re} \\ F &= F_0(y) + \Delta_1 F_1(y) + \mu_i \varphi_i(y) + O(\Delta_1^2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь Δ_1 и μ_i – малые параметры: $\Delta_1(\text{Re}) \rightarrow 0$, $\mu_i(\text{Re}) = o(\Delta_1)$ и $\Delta_1 \text{Re} \rightarrow \infty$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$; постоянная β_1 определяет степень отклонения решения от критического состояния и $\varphi_i(y)$ – собственная функция задачи.

В результате подстановки этого разложения в (1.2) получим

$$\begin{aligned} F_0''' + 2\beta_0 F_0 F_0' &= 0 \\ F_1''' + 2\beta_0(F_0 F_1' + F_0' F_1) + 2\beta_1 F_0 F_0' &= 0 \\ \varphi_i''' + 2\beta_0(F_0 \varphi_i' + F_0' \varphi_i) &= 0 \\ F_0(\pm 1) = F_1(\pm 1) = \varphi_i(\pm 1) &= 0 \\ F_0(0) = 1, \quad F_1(0) = \varphi_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Исходное уравнение (1.2) может быть дважды проинтегрировано [9, 10]. Поэтому, опуская промежуточные выкладки, выпишем окончательное решение для (1.4) и функции $P(y)$ из (1.2)

$$F_0'^2 = \frac{2}{3} \beta_0 F_0 (1 - F_0^2), \quad F_1 = \frac{\beta_1}{2\beta_0} y F_0', \quad \varphi_i = c_i F_0', \quad P = -\frac{1}{6} + O(\text{Re}^{-1}) \quad (1.5)$$

где c_i – произвольная постоянная. Таким образом [9, 10], $F_0(y)$ – это эллиптическая функция Вейерштрасса и критическое значение β_0 [21, 19] есть

$$\beta_0 = \frac{3}{2} \left[\int_0^1 \frac{dF_0}{[F_0(1 - F_0^2)]^{3/2}} \right]^2 = \frac{3\Gamma^4(1/4)}{16\pi} = 10,3128$$

2. Пусть на расстоянии L ($r = 1$) от источника на поверхности стенок имеются неровности с продольным и поперечным размерами порядка ε и $h \text{Re}^{-1/2}$, причем $\varepsilon = \varepsilon(\text{Re}) \rightarrow 0$ и $h = h(\text{Re}) \rightarrow 0$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Исследуем структуру течения около этих неровностей.

Согласно (1.1), (1.3), (1.5) при $r \rightarrow 1 - 0$

$$u = F_0(y) + O(r-1) + \Delta_1[F_1(y) + O(r-1)] + \mu_i[c_i F_0'(y) + O(r-1)] + O(\Delta_1^2) \quad (2.1)$$

$$p = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}(r-1) + O((r-1)^2) + O(\text{Re}^{-1})$$

На основании (1.5) вблизи стенок, т.е. при $y \rightarrow \pm 1 \mp 0$

$$F_0 = \frac{a_0}{2}(1 \mp y)^2 + O((1 \mp y)^6), \quad a_0 = \frac{\beta_0}{3} \quad (2.2)$$

$$F_1 = b_0(1 \mp y) + O((1 \mp y)^2), \quad b_0 = -\frac{\beta_1}{6}$$

Таким образом, в приходящем к неровностям потоке поверхностное трение мало и равно $\mp b_0 \Delta_1$ при $y = \pm 1$. Это означает, что на нижней стенке оно положительно ($b_0 > 0$), если $\beta_1 < 0$, что соответствует течению с углом полураствора α (см. (1.3)), меньшем критического α_0 , а при $b_0 < 0$ значение α превосходит α_0 .

Все дальнейшее рассмотрение будет ограничено анализом течений с локальными зонами отрыва, когда неровности находятся внутри вязких пристеночных слоев при $|r-1| = O(\varepsilon)$, которые (см. [22, 23]) всегда возникают вследствие необходимости удовлетворить условиям прилипания на деформированных стенках.

В масштабах неровностей, т.е. при $1 \mp y = O(h)$ и $r-1 = O(\varepsilon)$, согласно (2.1), (2.2), $u = O(h^2)$ и $\partial p / \partial r = O(1)$. Поэтому на основании баланса инерционных и "вязких" членов в системе уравнений Навье–Стокса находим, что $h = \varepsilon^{1/4}$. Значение параметра Δ_1 в (1.3) положим равным $\varepsilon^{1/4}$, поскольку в этом случае, согласно (2.2), разложение (2.1) теряет свою равномерную пригодность именно в вязких слоях. Рассмотрение течений при больших (по порядку величины) значениях Δ_1 будет также проведено в дальнейшем.

Итак, на основании сказанного решение в вязких пристеночных слоях может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \alpha^2 \text{Re} &= \beta_0 + \Delta_1 \beta_1, \quad h = \Delta_1 = \varepsilon^{1/4} \\ r-1 &= \varepsilon x, \quad \alpha^{-1} \theta = y = \pm 1 + \varepsilon^{1/4} Y_{\pm} \\ u &= \varepsilon^{1/2} [u_0^{\pm}(x, Y_{\pm}) + \sigma u_1^{\pm}(x, Y_{\pm}) + O(\Delta_1)] \\ v &= \varepsilon^{-1/4} \text{Re}^{-1/2} [v_0^{\pm}(x, Y_{\pm}) + \sigma v_1^{\pm}(x, Y_{\pm}) + O(\Delta_1)] \\ p &= -\frac{1}{6} + \varepsilon [p_0^{\pm}(x, Y_{\pm}) + \sigma p_1^{\pm}(x, Y_{\pm}) + O(\Delta_1)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь наряду с главными членами разложений выписаны также и следующие (содержащие малый параметр σ), рассмотрение которых будет проведено в разд. 6.

В результате подстановки (2.3) в систему уравнений Навье–Стокса приходим к уравнениям пограничного слоя Прандтля

$$\begin{aligned} u_0^{\pm} \frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x} + \beta_0^{-1/2} v_0^{\pm} \frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial Y_{\pm}} + \frac{dp^{\pm}}{dx} &= \beta_0^{-1} \frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial Y_{\pm}^2} \\ p_0^{\pm} &= p^{\pm}(x), \quad \frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x} + \beta_0^{-1/2} \frac{\partial v_0^{\pm}}{\partial Y_{\pm}} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

при условии, что $\epsilon Re^{2/3} \rightarrow \infty$ при $Re \rightarrow \infty$. Решение этих уравнений должно удовлетворять условиям прилипания

$$Y_{\pm} = f_{\pm}(x): u_0^{\pm} = v_0^{\pm} = 0 \quad (2.5)$$

Здесь функции $f_{\pm}(x)$ определяют форму неровностей на верхней и нижней стенках, относительно которых будем полагать, что $f_{\pm}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь течение в основной части диффузора, где $y = O(1)$. Здесь, согласно (2.1), решение имеет вид

$$r - 1 = \epsilon x, \quad y = O(1)$$

$$u = F_0(y) + \epsilon^{1/4} [U_1(x, y) + \sigma U_2(x, y) + O(\Delta_1)] \quad (2.6)$$

$$v = \epsilon^{-3/4} Re^{-1/2} [V_1(x, y) + \sigma V_2(x, y) + O(\Delta_1)]$$

$$p = 1/6 + \epsilon [P_1(x, y) + \sigma P_2(x, y) + O(\Delta_1)]$$

После подстановки этих разложений в исходные уравнения Навье–Стокса находим

$$U_1 = S(x)F_0'(y) + \Phi(y)$$

$$V_1 = -\beta_0^{1/2} S'(x)F_0(y) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \mu_1 \beta_0 S''(x)F_0^2(y), \quad \mu_1(Re) = \epsilon^{-1/4} Re^{-1}$$

Из сращения с решением (2.1) следует, что

$$\Phi = F_1(y), \quad x \rightarrow -\infty: S(x) \rightarrow 0, \quad (2.8)$$

а сама функция $S(x)$ остается пока произвольной.

Используя выражения (2.2) и (2.7), (2.8), произведем сращивание асимптотических разложений (2.3) и (2.6) для вязких пристеночных слоев и основной части локально-невязкого течения. В результате получаем

$$Y_- \rightarrow \infty: u_0^- = \frac{a_0}{2} Y_-^2 + A_-(x)Y_- + O(1)$$

$$Y_+ \rightarrow -\infty: u_0^+ = \frac{a_0}{2} (-Y_+)^2 - A_+(x)(-Y_+) + O(1)$$

$$A_{\pm} = a_0 S(x) \mp b_0 \quad (2.9)$$

$$p^+(x) = p^-(x) + \mu_1(Re)k_1 S''(x)$$

$$k_1 = \beta_0 \int_{-1}^1 F_0^2 dy = \frac{2}{3} \beta_0$$

Наконец, из сращения решения в вязких слоях с приходящим профилем скорости в соответствии с (2.1), (2.2) следует, что при $x \rightarrow -\infty$

$$u_0^- \rightarrow \frac{a_0}{2} Y_-^2 + b_0 Y_-, \quad u_0^+ \rightarrow \frac{a_0}{2} (-Y_+)^2 + b_0 (-Y_+) \quad (2.10)$$

$$A_{\pm} \rightarrow \mp b_0, \quad \frac{dp^{\pm}}{dx} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Распределение давления и характер течения в целом существенным образом зависят от величины параметра μ_1 в (2.7), (2.9). Рассмотрим сначала режим течения, когда

этот параметр мал: $\mu_1(\text{Re}) \rightarrow 0$, что соответствует обтеканию неровностей с продольным размером $O(\varepsilon)$, ббльшим по порядку величины, чем $\text{Re}^{-4/11}$ (см. (2.7)).

3. Согласно (2.9), при $\mu_1 \rightarrow 0$ поперечное изменение давления в ядре потока в главном приближении отсутствует и $p^+ = p^-(x)$. После аффинных преобразований и транспозиционного преобразования Прандтля

$$\begin{aligned} x &= 3^{-1} \beta_0^2 \lambda_0^4 X, \quad Y_{\pm} = \lambda_0 Y'_{\pm}, \quad u_0^{\pm} = a_0 \lambda_0^2 U^{\pm} \\ v_0^{\pm} &= 3 a_0 \lambda_0^{-1} \beta_0^{-3/2} V^{\pm}, \quad p^{\pm} = a_0^2 \lambda_0^4 P^{\pm}, \quad f_{\pm} = \lambda_0 F_{\pm} \\ A_{\pm} &= a_0 \lambda_0 A_{\pm}^{\circ}, \quad S = \lambda_0 S^{\circ}, \quad \lambda_0 = (9 a_0^{-2} \beta_0^{-3})^{1/11}, \quad \Omega_0 = b_0 a_0^{-1} \lambda_0^{-1} \\ Y'_+ &= F_+(X) - Z_+, \quad V^+ = U^+ \frac{dF_+}{dX} - W^+ \\ Y'_- &= F_-(X) + Z_-, \quad V^- = U^- \frac{dF_-}{dX} + W^- \end{aligned} \quad (3.1)$$

задача (2.4), (2.5), (2.9), (2.10) для вязких слоев приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^{\pm}}{\partial Z_{\pm}} \frac{\partial^2 \Psi^{\pm}}{\partial X \partial Z_{\pm}} - \frac{\partial \Psi^{\pm}}{\partial X} \frac{\partial^2 \Psi^{\pm}}{\partial Z_{\pm}^2} + \frac{dP^{\pm}}{dX} &= \frac{\partial^3 \Psi^{\pm}}{\partial Z_{\pm}^3} \\ U^{\pm} &= \frac{\partial \Psi^{\pm}}{\partial Z_{\pm}}, \quad W^{\pm} = -\frac{\partial \Psi^{\pm}}{\partial X} \\ Z_{\pm} = 0: \quad \Psi^{\pm} &= \frac{\partial \Psi^{\pm}}{\partial Z_{\pm}} = 0; \quad F_+(\pm\infty) = F_-(\pm\infty) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi^{\pm} \rightarrow \frac{1}{6} Z_{\pm}^3 + \Omega_0 \frac{1}{2} Z_{\pm}^2, \quad \frac{dP^{\pm}}{dX} \rightarrow 1, \quad A_{\pm}^{\circ} \rightarrow \mp \Omega_0$$

$$Z_{\pm} \rightarrow \infty: \quad \Psi^{\pm} = \frac{1}{6} Z_{\pm}^3 + \frac{1}{2} L_{\pm}(X) Z_{\pm}^2 + M_{\pm}(X) Z_{\pm} + N_{\pm}(X) + o(1)$$

$$L_+ = -A_+^{\circ} - F_+, \quad L_- = A_-^{\circ} + F_-$$

$$M_{\pm} = \frac{1}{2} (L_{\pm}^2 - \Omega_0^2), \quad N_{\pm} = \frac{1}{6} L_{\pm}^3 - \frac{\Omega_0^2}{2} L_{\pm} + \frac{1}{3} \Omega_0^3$$

$$A_+^{\circ} = S^{\circ} - \Omega_0, \quad A_-^{\circ} = S^{\circ} + \Omega_0$$

Здесь Ω_0 – параметр подобия, величина которого (см. (3.1)) определяет степень отклонения течения от критического состояния; $\Psi^{\pm}(X, Z_{\pm})$ – функции тока, для которых наряду с главными членами асимптотики из (2.9) при $Z_{\pm} \rightarrow \infty$ выписаны также и следующие.

В рассматриваемом случае

$$P^+(X) = P^-(X) \quad (3.3)$$

и, как нетрудно видеть, задачи для верхнего и нижнего слоев полностью совпадают. Поэтому, как и в [22], $L_+(X) = L_-(X)$ и тогда из выражений для $L_{\pm}(X)$ и $S^{\circ}(X)$ в (3.2) непосредственно следует, что

$$A_{\pm}^{\circ} = -\frac{1}{2} [F_+(X) + F_-(X)] \mp \Omega_0 \quad (3.4)$$

В дальнейшем речь будет идти для определенности только о нижнем слое и знаки плюс и минус в обозначениях будут опущены (при рассмотрении этого режима).

Таким образом приходим к задаче (3.2)–(3.4) для уравнения пограничного слоя с неизвестным заранее распределением давления $P(X)$ и заданной толщиной вытеснения $-2L'(X)$. Задачи этого типа хорошо известны и встречаются при обтекании неровностей как для внешних [24], так и для внутренних [22] течений.

4. Задача (3.2)–(3.4) нелинейна и ее решение может быть получено только численно. Исключение, как и в [22], составляет антисимметричный случай деформации стенок, когда $F_+ = F_-(X)$, и решение есть $\Psi = Z^3/6 + \Omega_0 Z^2/2$, $P'(X) = 1$.

Рассмотрим решение линеаризованной задачи. Представим функции, определяющие форму неровностей, как $F_{\pm} = HG_{\pm}(X)$ и будем считать, что параметр H мал. Тогда решение можно искать в виде

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{6}Z^3 + H\Psi_1(X, Z) + H^2\Psi_2(X, Z) + O(H^3) \\ P &= X + HP_1(X) + H^2P_2(X) + O(H^3) \\ \Omega_0 &= H\omega_1 + H^2\omega_2 + O(H^3), \quad F_{\pm} = HG_{\pm}(X)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Заметим, что если полагать $\Omega_0 = O(1)$ при $H \rightarrow 0$, то линеаризация производится относительно профиля скорости $\partial\Psi/\partial Z = Z^2/2 + \Omega_0 Z$. Решение соответствующей задачи было получено в [15, 18].

Внося (4.1) в (3.2)–(3.4), приходим для функций первого приближения к следующей задаче:

$$\begin{aligned}D[\Psi_1] &= \frac{dP_1}{dX} \\ Z=0: \quad \Psi_1 &= \frac{\partial\Psi_1}{\partial Z} = 0; \quad G_+(\pm\infty) = G_-(\pm\infty) = 0\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi_1 \rightarrow \frac{\omega_1}{2}Z^2, \quad \frac{dP_1}{dX} \rightarrow 0$$

$$Z \rightarrow \infty: \quad \Psi_1 = \frac{1}{2}L_1(X)Z^2 + o(1)$$

$$L_1 = \frac{1}{2}[G_-(X) - G_+(X)] + \omega_1$$

$$D[\cdot] = \frac{\partial^3}{\partial Z^3} - \frac{1}{2}Z^2 \frac{\partial^2}{\partial X \partial Z} + Z \frac{\partial}{\partial X}\quad (4.3)$$

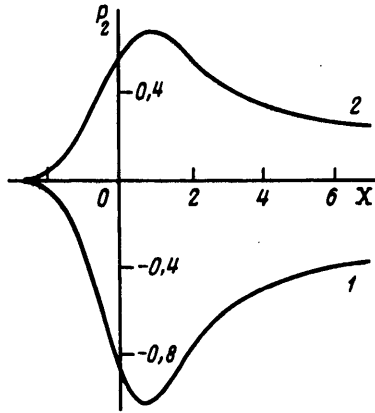
Согласно [25, 26], единственное решение задачи (4.2), (4.3) есть

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}L_1(X)Z^2, \quad P_1 = 0\quad (4.4)$$

Тогда во втором приближении получаем задачу

$$\begin{aligned}D[\Psi_2] &= \frac{dP_2}{dX} + \frac{Z^2}{2}L_1 \frac{dL_1}{dX} \\ Z=0: \quad \Psi_2 &= \frac{\partial\Psi_2}{\partial Z} = 0; \quad X \rightarrow -\infty: \quad \Psi_2 \rightarrow \frac{\omega_2}{2}Z^2, \quad \frac{dP_2}{dX} \rightarrow 0\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$Z \rightarrow \infty: \quad \Psi_2 = \frac{\omega_2}{2}Z^2 + \frac{1}{2}[L_1^2(X) - \omega_1^2]Z + o(1)$$



Фиг. 1. Распределение давления в области взаимодействия

Ее решение также существует и, согласно [25, 26], для функций, определяющих распределение давления и поверхностного трения, находим

$$P_2 = -\frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \int_{-\infty}^X \frac{Q_2(t)}{(X-t)^{1/2}} dt, \quad Q_2 = \frac{1}{2} [L_1^2(X) - \omega_1^2] \quad (4.6)$$

$$\tau_2 = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial Z^2} \Big|_{Z=0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/4} \Gamma(3/4)} \int_{-\infty}^X \frac{Q_2'(t)}{(X-t)^{3/4}} dt + \omega_2$$

Из полученных выражений следует, что, как и в других задачах для пограничного слоя с заданной толщиной вытеснения [24, 22], здесь отсутствует распространение возмущений вверх по потоку. Вниз по потоку ($X \rightarrow \infty$), согласно (4.6), возмущения затухают

$$P_2 = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} Q_2^*(0) X^{-1/2} + O(X^{-3/2})$$

$$\tau_2 = \omega_2 - 2^{-1/4} \Gamma(5/4) Q_2^*(0) X^{-3/4} + O(X^{-9/4}) \quad (4.7)$$

$$Q_2^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_2(X) dX$$

На фиг. 1 представлены графики функции $P_2(X)$ для неровностей вида

$$G_+ = 0, \quad G_- = h_0 e^{-X^2/2} \quad (4.8)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} e^{-X^2/2} (\frac{1}{4} h_0^2 e^{-X^2/2} + h_0 \omega_1)$$

при $h_0^2 = 1$ и $h_0 \omega_1 = \pm 1$ (соответственно кривые 1 и 2).

Для построения картины линий тока введем переменную $Z^\circ = H^{-1}Z$, принимающую конечные значения в масштабах неровностей при $H \rightarrow 0$. Решение (4.1), (4.4) тогда имеет вид

$$\Psi = H^3 \Psi^\circ(X, Z^\circ) + O(H^4) \quad (4.9)$$

$$\Psi^\circ = \frac{1}{6} Z^{\circ 3} + \frac{1}{2} L_1(X) Z^{\circ 2}, \quad Z^\circ = Y^* - G_-(X)$$

Для неровностей, имеющих форму (4.8), в (4.9) функция $L_1(X)$ из (4.2), дающая распределение поверхностного трения в главном приближении, есть

$$L_1 = \frac{1}{2}G_-(X) + \omega_1, \quad G_- = h_0 e^{-X^2/2} \quad (4.10)$$

Параметры ω_1 и h_0 определяют соответственно поверхностное трение в невозмущенном потоке и высоту неровности. При $\omega_1 \geq 0$ и $h_0 > 0$ течение остается безотрывным, так как в (4.10) $L_1(X) > 0$. Если же при $\omega_1 \geq 0$ значение $h_0 < -2\omega_1$, то, согласно (4.10), возникает отрыв. На фиг. 2 представлена картина линий тока для $\omega_1 = 1/4$ и $h_0 = -1$. (Соседние линии тока здесь построены с интервалом значений $\Delta\Psi^0 = 3 \cdot 10^{-3}$.)

При $\omega_1 < 0$ возможны различные виды течения. На фиг. 3 дана соответствующая картина для $\omega_1 = -3/8$ и $h_0 = 1$. (Здесь $\Delta\Psi^0 = 3 \cdot 10^{-3}$.) По мере уменьшения ω_1 точки нулевого поверхностного трения сближаются, сливаясь при $\omega_1 = -h_0/2$ в точке $X = 0$, $Z^0 = 0$. Если $\omega_1 < -h_0/2$, то точка нулевого трения "всплывает" с поверхности. Соответствующая картина представлена на фиг. 4 при $\omega_1 = -5/8$, $h_0 = 1$. (Здесь $\Psi^0 \leq 0$ и $\Delta\Psi^0 = 13 \cdot 10^{-4}$.) Наконец, при $h_0 < 0$ и $\omega_1 < 0$ поверхностное трение, как и в предыдущем случае, всюду отрицательно. Картина такого течения дана на фиг. 5 для $h_0 = -1$ и $\omega_1 = -1/4$. (Здесь $\Psi^0 \leq 0$, $\Delta\Psi^0 = 0,04$.)

На этом завершим рассмотрение решения для главного приближения при значениях параметра ϵ больших по порядку величины, чем $Re^{-4/11}$.

5. Перейдем к анализу течения при $\epsilon = Re^{-4/11}$, когда в масштабах неровностей становится существенным поперечное изменение давления. В этом случае, согласно (2.9), (2.7), $\mu_1 = 1$ и течение в вязких пристеночных слоях описывается решением задачи (3.2), но вместо (3.3) должно выполняться условие взаимодействия

$$P^+(X) - P^-(X) = \frac{2}{3}S^{\circ\circ}(X) \quad (5.1)$$

Оно получается из (2.9) после преобразований (3.1).

При малых значениях H решение задачи (3.2), (5.1) может быть представлено в виде (4.1) вместе с разложением для функции $S^{\circ}(X)$

$$S^{\circ} = HS_1(X) + H^2S_2(X) + O(H^3)$$

В результате подстановка этих разложений в (3.2), (5.1), для $\Psi_1^{\pm}(X, Z_{\pm})$, $P_1^{\pm}(X)$ приходим к задаче вида (4.2), с той лишь разницей, что здесь

$$L_1 = L_1^{\pm} = \mp S_1(X) \mp G_{\pm}(X) + \omega_1 \quad (5.2)$$

$$P_1^+ - P_1^- = \frac{2}{3}S_1^{\circ}(X)$$

Решение этой задачи, согласно [25, 26], есть

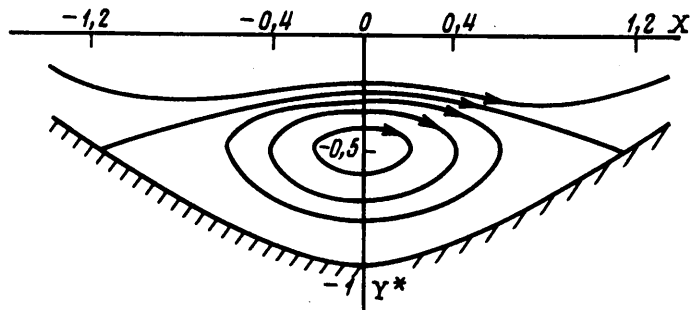
$$\Psi_1^{\pm} = \frac{1}{2}L_1^{\pm}(X)Z_{\pm}^2, \quad P_1^+ = P_1^- = S_1 = 0 \quad (5.3)$$

Поэтому во втором приближении для $\Psi_2^{\pm}(X, Z_{\pm})$, $P_2^{\pm}(X)$ получаем задачу (4.5), в которой под $L_1(X)$ надо понимать $L_1^{\pm}(X)$ из (5.2) и

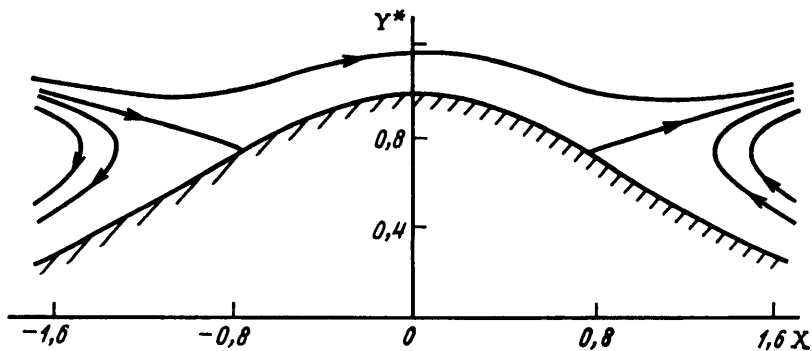
$$P_2^+ - P_2^- = \frac{2}{3}S_2^{\circ}(X) \quad (5.4)$$

В результате решения этой задачи приходим для $P_2^{\pm}(X)$ к выражению (4.6), в котором вместо $Q_2(t)$ стоит

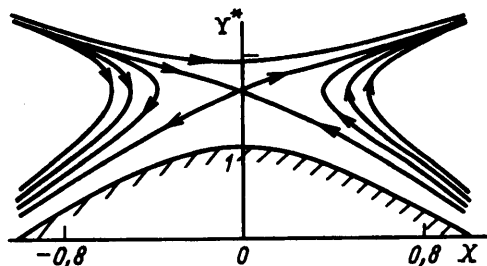
$$Q_2^{\pm} = \frac{1}{2} \left[L_1^{\pm 2}(t) - \omega_1^2 \right]$$



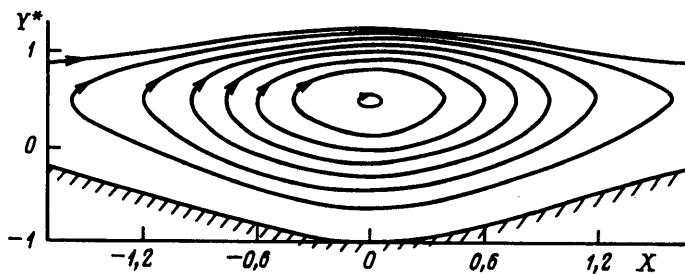
Фиг. 2. Картина линий тока при $\omega_1 = 1/4, h_0 = -1$



Фиг. 3. Картина линий тока при $\omega_1 = -3/8, h_0 = 1$



Фиг. 4. Картина линий тока при $\omega_1 = -5/8, h_0 = 1$



Фиг. 5. Картина линий тока при $\omega_1 = -1/4, h_0 = -1$

Это решение с учетом выражений для $L_1^\pm(X)$ и $S_1(X)$ в (5.2), (5.3) свидетельствует, что, как и раньше, при $X \rightarrow \infty$ давление $P_2^\pm(X)$ затухает по закону $X^{-1/2}$ (см. (4.7)). Но тогда из (5.4) непосредственно следует, что функция $S_2(X)$, входящая в величину трения в этом приближении и определяющая также вытесняющее действие, будет неограниченно расти как $X^{3/2}$ при $X \rightarrow \infty$, т.е. возмущения вниз по потоку от неровностей не затухают. Это означает, что в отличие от рассмотренного выше режима течения при $\mu_1 = \varepsilon^{-1/4} \text{Re}^{-1} \rightarrow 0$ в данном случае ($\mu_1 = 1$) отрыв уже не может быть локализован в вязких пристеночных слоях. Следовательно, предлагаемая структура течения при $\mu_1 = 1$ является противоречивой.

Таким образом, по мере уменьшения величины поверхностного трения Δ_1 ($\Delta_1 = \varepsilon^{1/4}$), как только она становится порядка $\text{Re}^{-1/4}$ (при $\mu_1 = 1$), течение вблизи стенок становится настолько чувствительным к возмущениям, что отрыв уже будет происходить раньше, на некотором расстоянии от неровностей и вне их масштабов.

Полученные результаты вызывают также вопрос: что будет происходить, если в рассмотренном выше решении при $\mu_1 \rightarrow 0$ значение постоянной ω_1 в (4.1), (4.2), определяющей поверхностное трение в невозмущенном потоке, положить равным нулю? Чтобы ответить на него, необходимо рассмотреть следующие члены разложений (2.3), (2.6), которые учитывали бы поперечное изменение давления в ядре потока.

6. Пусть в (2.3) и (2.6) $\sigma = \mu_1 \rightarrow 0$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Тогда следующие члены в этих разложениях как раз и включают в себя поперечное изменение давления. Действительно, после подстановки (2.6) в исходные уравнения Навье–Стокса получим во втором приближении

$$U_2 = C(x)F_0'(y), \quad V_2 = -\beta_0^{1/2}C'(x)F_0(y) \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = \beta_0 S''(x)F_0^2(y)$$

где $S(x)$ – функция, входящая в решение (2.7) первого приближения, а $C(x)$ – остается пока произвольной. Воспользуемся существованием собственной функции $\phi_i(y)$ в (1.3), (1.5). С этой целью положим значение малого параметра $\mu_i = \sigma \varepsilon^{1/4}$. Тогда из сращения разложений (2.1) и (2.6) следует, что в (6.1) функция $C(x) \rightarrow c_i$ при $x \rightarrow -\infty$.

Подставив (2.3) в исходные уравнения, приходим во втором приближении к краевой задаче для системы линеаризованных уравнений пограничного слоя, которая после преобразований (3.1) и

$$\begin{aligned} u_1^\pm &= a_0 \lambda_0^2 U_s^\pm, \quad v_1^\pm = 3a_0 \lambda_0^{-1} \beta_0^{-3/2} V_s^\pm \\ p_1^\pm &= a_0^2 \lambda_0^4 P_s^\pm, \quad C = \lambda_0 C^0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$V_s^+ = U_s^+ \frac{dF_+}{dX} - W_s^+, \quad V_s^- = U_s^- \frac{dF_-}{dX} + W_s^-$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^\pm}{\partial Z_\pm} \frac{\partial^2 \Psi_s^\pm}{\partial X \partial Z_\pm} + \frac{\partial^2 \Psi^\pm}{\partial X \partial Z_\pm} \frac{\partial \Psi_s^\pm}{\partial Z_\pm} - \\ - \frac{\partial \Psi^\pm}{\partial X} \frac{\partial^2 \Psi_s^\pm}{\partial Z_\pm^2} - \frac{\partial^2 \Psi^\pm}{\partial Z_\pm^2} \frac{\partial \Psi_s^\pm}{\partial X} + \frac{dP_s^\pm}{dX} = \frac{\partial^3 \Psi_s^\pm}{\partial Z_\pm^3} \end{aligned}$$

$$U_s^\pm = \frac{\partial \Psi_s^\pm}{\partial Z_\pm}, \quad W_s^\pm = -\frac{\partial \Psi_s^\pm}{\partial X}$$

$$Z_\pm = 0: \quad \Psi_s^\pm = \frac{\partial \Psi_s^\pm}{\partial Z_\pm} = 0 \quad (6.3)$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi_s^\pm \rightarrow \mp \frac{1}{2} c_i \lambda_0^{-1} Z_\pm^2, \quad C^\circ \rightarrow c_i \lambda_0^{-1}, \quad P_s^\pm \rightarrow 0$$

$$Z_\pm \rightarrow \infty: \quad \Psi_s^\pm = \frac{1}{2} L_s^\pm(X) Z_\pm^2 + O(Z_\pm)$$

$$L_s^+ = -C^\circ(X), \quad L_s^- = C^\circ(X), \quad P_s^+ - P_s^- = \frac{2}{3} S^{\circ\prime\prime}(X)$$

где $\Psi^\pm(X, Z_\pm)$, $S^\circ(X)$ – решение задачи (3.2)–(3.4). Здесь наряду с краевыми условиями прилипания и сращивания с приходящим профилем скорости выписаны также условия, обеспечивающие сращивание при $Z_\pm \rightarrow \infty$ с разложением (2.6), что непосредственно следует из (2.2) и (6.1) с учетом преобразований (3.1), (6.2). Последнее выражение в (6.3), как и в предыдущем разделе, определяет условие взаимодействия течений в верхнем и нижнем пристеночных слоях, которое возникает за счет поперечного изменения давления при $y = O(1)$ (см. (6.1)).

При малых значениях параметра H , определяющего высоту неровностей в масштабах вязких слоев, решение задачи (6.3) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Psi_s^\pm &= \Psi_{0s}^\pm(X, Z_\pm) + H\Psi_{1s}^\pm(X, Z_\pm) + O(H^2) \\ P_s^\pm &= P_{0s}^\pm(X) + HP_{1s}^\pm(X) + O(H^2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$C^\circ = C_0(X) + HC_1(X) + O(H^2)$$

$$c_i = c_i^0 + Hc_i^1 + O(H^2)$$

Внося это представление вместе с (4.1) в (6.3) и учитывая при этом полученные выражения для $S^\circ(X)$ в (3.2) и (3.4), (4.2), (4.4), получаем для главных членов в (6.4) задачу (см. (4.3))

$$D[\Psi_{0s}^\pm] = \frac{dP_{0s}^\pm}{dX}, \quad P_{0s}^+ = P_{0s}^-(X)$$

$$Z_\pm = 0: \quad \Psi_{0s}^\pm = \frac{\partial \Psi_{0s}^\pm}{\partial Z_\pm} = 0$$

$$Z_\pm \rightarrow \infty: \quad \Psi_{0s}^\pm = \mp \frac{1}{2} C_0(X) Z_\pm^2 + o(1)$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi_{0s}^\pm \rightarrow \mp \frac{1}{2} c_i^0 \lambda_0^{-1} Z_\pm^2, \quad C_0 \rightarrow c_i^0 \lambda_0^{-1}, \quad P_{0s}^\pm \rightarrow 0$$

Ее единственное решение, согласно [25, 26], есть

$$\Psi_{0s}^+ = -\frac{1}{2} C_0(X) Z_+^2, \quad \Psi_{0s}^- = \frac{1}{2} C_0(X) Z_-^2, \quad P_{0s}^+ = P_{0s}^- = 0 \quad (6.5)$$

где функция $C_0(X)$ остается пока произвольной. Тогда для вторых членов разложения (6.4) приходим к задаче

$$D[\Psi_{1s}^\pm] = \frac{dP_{1s}^\pm}{dX} \mp \frac{Z_\pm^2}{2} \frac{d(L_1 \cdot C_0 - \Gamma_i)}{dX}, \quad \Gamma_i = c_i^0 \lambda_0^{-1} \omega_i$$

$$Z_{\pm} = 0: \Psi_{1s}^{\pm} = \frac{\partial \Psi_{1s}^{\pm}}{\partial Z_{\pm}} = 0$$

$$Z_{\pm} \rightarrow \infty: \Psi_{1s}^{\pm} = \mp \frac{1}{2} C_1(X) Z_{\pm}^2 + O(Z_{\pm}) \quad (6.6)$$

$$X \rightarrow -\infty: \Psi_{1s}^{\pm} \rightarrow \mp \frac{1}{2} c_i^1 \lambda_0^{-1} Z_{\pm}^2, \quad C_1 \rightarrow c_i^1 \lambda_0^{-1}, \quad P_{1s}^{\pm} \rightarrow 0$$

$$P_{1s}^+ - P_{1s}^- = \frac{2}{3} S_1''(X), \quad S_1 = -\frac{1}{2} [G_+(X) + G_-(X)]$$

Здесь функция $L_1(X)$ определяется выражением в (4.2). Результаты работ [25, 26] позволяют выписать решение задачи (6.6)

$$P_{1s}^{\pm} = \pm \frac{1}{3} S_1''(X), \quad C_0 = [J(X) + \Gamma_i] L_1^{-1}(X) \quad (6.7)$$

$$J(X) = \frac{\Gamma(3/4)}{2^{3/2} 3 \Gamma(5/4)} \frac{X}{\int_{-\infty}^X \frac{S_1'''(t) dt}{(X-t)^{1/2}}}$$

Таким образом получено выражение для функции $C_0(X)$ из (6.5), которая определяет распределение поверхностного трения. Что касается $C_1(X)$ в (6.6), то она остается произвольной и может быть найдена из рассмотрения следующих членов разложения (6.4).

Обратимся к полученному решению (6.7) для $C_0(X)$. Вспоминая выражение (4.2) для $L_1(X)$, которое определяет (см. (4.4)) распределение поверхностного трения в главном приближении, приходим к выводу, что значение постоянной ω_1 не может обращаться в нуль. Дело в том, что при $\omega_1 = 0$ выражение (6.7) для $C_0(X)$ теряет смысл, поскольку при $|X| \rightarrow \infty$ функция $|L_1(X)| \rightarrow 0$ и, следовательно, $|C_0(X)| \rightarrow \infty$. Если же $\omega_1 \neq 0$, то $C_0 - \Gamma_i \omega_1^{-1} = O(X^{-1/2})$ при $X \rightarrow \infty$. Однако при этом в точках отрыва и присоединения ($X = X_0$), где $L(X) = O((X - X_0))$ при $|X - X_0| \rightarrow 0$, согласно (6.7), функция $C_0(X)$, вообще говоря (т.е. если $J(X_0) \neq -\Gamma_i$), обращается в бесконечность: $C_0(X) = O((X - X_0)^{-1})$. Таким образом, в решении возникают особенности. Исследование их структуры и возможности устранения требует отдельного рассмотрения, которое в данной работе не проводится.

Итак, если анализ течения в главном приближении не приводит к каким-либо ограничениям на значение ω_1 и не дает указаний на существование особенностей, то из рассмотрения последующих членов разложений (2.3), (2.6) следует, что $\omega_1 \neq 0$, и, кроме того, точки нулевого поверхностного трения являются особыми. Последнее обстоятельство связано, по-видимому, с тем, что в задаче (6.6) перепад давления $P_{1s}^+(X) - P_{1s}^-(X)$ является заранее заданной функцией.

Заключение. Остановимся кратко на рассмотрении течений при значениях угла полураствора диффузора α , отличных от критического ($\alpha = \alpha_0$) (см. разд. 1). В этом случае, как уже отмечалось (см. разд. 1), поверхностное трение для невозмущенного течения является конечным. При $\alpha < \alpha_0$ оно положительно и нетрудно показать, что течения с локальными зонами отрыва описываются решениями, полученными в [22, 23]. При этом поперечный размер неровностей (и толщин вязких пристеночных слоев) есть величина порядка $\varepsilon^{1/3} \text{Re}^{-1/2}$ и градиент давления в пристеночных слоях $\sim O(\varepsilon^{-1/3})$. (Здесь ε , как и раньше, определяет масштаб продольного размера неровностей.) При $\alpha > \alpha_0$, когда вблизи стенок имеется возвратное течение, в масштабах неровностей возникают задачи для уравнений пограничного слоя с заданной толщиной вытеснения (или со взаимодействием), решения которых были получены в [27, 22, 18]. При этом вблизи линий, где продольная составляющая вектора скорости обращается в нуль, лежат нелинейные критические слои, течение в которых описывается решением,

также полученным в [15, 18]. Характерные значения для размеров неровностей и гидродинамических функций здесь те же, что и при $\alpha < \alpha_0$.

Описанные течения возникают также при α , близких к α_0 , но при значениях малого параметра Δ_1 в (1.3) ббльших по порядку величины, чем $\varepsilon^{1/4}$. При этом течения с локальными зонами отрыва реализуются при значениях поперечных размеров неровностей порядка $\varepsilon^{1/3} \Delta_1^{-1/3} \text{Re}^{-1/2}$, а градиент давления здесь порядка $\varepsilon^{-1/3} \Delta_1^{1/3}$. Заметим также, что как только значение Δ_1 становится равным $\varepsilon^{-2} \text{Re}^{-3/2}$, течение вблизи неровностей описывается уже решениями полных уравнений Навье–Стокса с локальным числом Рейнольдса, равным единице.

Основной вывод, который можно сделать на основании проведенного в работе анализа, состоит в следующем. По мере уменьшения величины поверхностного трения Δ_1 (см. (1.3)) течение становится все более чувствительным к возмущающим факторам, так что при $\Delta_1 = \text{Re}^{-1/2}$ сколь угодно малые вариации поверхности стенок диффузора приводят к невозможности существования течений с зонами отрыва, локализованными внутри вязких пристеночных слоев.

Автор благодарит С.Н. Тимошина за обсуждение полученных результатов и ряд полезных замечаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00483).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
2. Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
3. Сычев В.В. О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 47–59.
4. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Advances in Applied Mechanics. N.Y., L.: Acad. Press, 1974. V. 14. P. 145–239.
5. Messiter A.F. Boundary-layer separation // Proc. 8th US Natl. Congr. Appl. Mech. North Hollywood, 1979. P. 157–179.
6. Нейланд В.Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики. 1981. Т. 4. Вып. 2. С. 3–62.
7. Smith F.T. On the high Reynolds number theory of laminar flows // IMA J. Appl. Math. 1982. V. 28. № 3. P. 207–281.
8. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений // Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 256 с.
9. Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag. 1915. 6 ser. V. 29. № 172. P. 455–465.
10. Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 1916. Bd. 25. H. 1–3. S. 34–60.
11. Laminar boundary layers / Ed. Rosenhead L. Oxford: Clarendon Press, 1963. 688 p.
12. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
13. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
14. Липатов И.И. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 51–56.
15. Cowley S.J. Pulsatile flow through distorted channels: low-Strouhal-number and translating-critical-layer effects // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1985. V. 38. Pt. 4. P. 589–619.
16. Duck P.W. Pulsatile flow through constricted or dilated channels II // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1985. V. 38. Pt 4. P. 621–653.

17. Тимошин С.Н. Нестационарные эффекты в слабозамушенных пульсирующих течениях в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 96–104.
18. Тимошин С.Н. Асимптотический анализ пульсирующего течения вязкой жидкости в симметричном деформированном канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 17–23.
19. Modern developments in fluid dynamics. V. 1 / Ed. Goldstein S. Oxford: Clarendon Press, 1938. 331 p.
20. Rosenhead L. The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1940. V. 175. № 963. P. 436–467.
21. Tollmien W. Grenzschichttheorie // Handbuch der Experimentalphysik. 1931. Bd. 4. 1 Teil. S. 239–287.
22. Smith F.T. Flow through constricted or dilated pipes and channels: part 1 // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. Pt. 3. P. 343–364.
23. Smith F.T. Flow through constricted or dilated pipes and channels: part 2 // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. Pt. 3. P. 365–376.
24. Боголепов В.В., Нейланд В.Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа // Тр. ЦАГИ. 1971. Вып. 1963. 12 с.
25. Stewartson K. Is the singularity at separation removable? // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. Pt. 2. P. 347–364.
26. Рубан А.И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 42–51.
27. Боголепов В.В. Расчет взаимодействия сверхзвукового пограничного слоя с тонким препятствием // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 6. С. 30–38.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.1995