

УДК 535.516.013.4:536.24

© 1996 г. Г.З. ГЕРШУНИ, И.О. КЕЛЛЕР, Б.Л. СМОРОДИН

О ВИБРАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧАСТОТАХ ВИБРАЦИИ

Рассмотрена вибрационно-конвективная неустойчивость плоского горизонтального слоя жидкости при наличии поперечной стратификации в статическом поле тяжести, а также продольной гармонической вибрации конечной частоты. Рассмотрение базируется на полных уравнениях конвекции в приближении Буссинеска. Показано, что в предельном случае высокочастотной вибрации результаты совпадают с полученными ранее на основе осредненных уравнений. В предельном случае низких частот вибрации природа неустойчивости совершенно иная: она связана с неустойчивостью осциллирующих встречных потоков.

1. Постановка задачи. Ранее [1,2] была исследована вибрационно-конвективная неустойчивость в отсутствие статического поля тяжести, т.е. в условиях невесомости. Анализ продолжен в [3,4], где были указаны новые равновесные конфигурации в плоском слое жидкости и исследована их устойчивость. В [5] рассмотрена конвективная неустойчивость в плоском горизонтальном слое при наличии поперечной разности температур; в этих условиях имеет место суперпозиция двух механизмов возбуждения конвекции – обычного (рэлеевского), связанного с поперечной стратификацией в поле тяжести, и термовибрационного, обусловленного продольной вибрацией. В работах [6–8] рассмотрен случай, когда неоднородность температуры вызывается внутренним тепловыделением в жидкости, пространственно однородным [6,7] либо обусловленным протеканием в горизонтальном слое экзотермической реакции [8].

Во всех цитированных работах рассматривался предельный случай высоких частот и малых амплитуд вибрации. Для анализа возмущений "квазиравновесия" и определения границ устойчивости применялись осредненные уравнения для средних полей [9]. В этом подходе единственным режимным параметром (в случае невесомости) является вибрационное число Рэлея $Ra_v = (\beta b \Omega \Theta L)^2 / 2\nu\chi$, и β , ν и χ – соответственно коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, b и Ω – амплитуда смещения и угловая частота вибрации, Θ – характерная разность температур, L – характерный размер полости. Если возможно равновесие в высокочастотном вибрационном поле, оно становится неустойчивым по достижении параметром Ra_v некоторого критического значения, зависящего от геометрии задачи и направления оси вибрации. Так, в случае плоского слоя в невесомости при наличии поперечной разности температур и продольной оси вибрации, кризис квазиравновесия наступает при значении параметра $Ra_{v,m} = 2129$ и соответствует возмущениям с критическим волновым числом $k_m = 3,23$ (число Рэлея определено через полную разность температур и полную толщину слоя).

В данной работе рассматривается вибрационно-конвективная устойчивость плоского горизонтального слоя при наличии поперечной разности температур и продольной вибрации для случая произвольных (конечных) частот.

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный слой жидкости, ограниченный твердыми параллельными плоскостями $z = \pm h$ (h – полутолщина слоя), на которых

поддерживаются постоянные разные температуры $T = \mp \Theta$. Весь слой (вместе с границами) линейно гармонически осциллирует в направлении продольной оси x с угловой частотой Ω и амплитудой смещения b .

Запишем уравнения конвекции в приближении Буссинеска в колеблющейся системе координат. Для этого необходимо заменить ускорение силы тяжести \mathbf{g} на $\mathbf{g} + b\Omega^2 \sin \Omega t \cdot \mathbf{n}$, где \mathbf{n} – единичный вектор вдоль оси вибрации. Введем безразмерные переменные на основе единиц: расстояния – h , времени – h^2/ν , скорости – χ/h , температуры – Θ , давления – $\rho\nu\chi/h^2$. Тогда безразмерные уравнения примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{P}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + R_v T \sin \omega t \cdot \mathbf{n} + Ra T \boldsymbol{\gamma}$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \Delta T \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Здесь \mathbf{v} – скорость, p – давление, T – температура, $Ra = g\beta\Theta h^3/\nu\chi$ – число Рэлея, $R_v = b\Omega^2\beta\Theta h^3/\nu\chi$ – вибрационный аналог числа Рэлея, $P = \nu/\chi$ – число Прандтля, $\omega = \Omega h^3/\chi$ – безразмерная частота вибрации, а вектор $\boldsymbol{\gamma}$ направлен вертикально вверх.

Система (1.1) имеет основное решение вида $T_0 = T_0(z)$, $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, где $v_0 = v_0(z, t)$. Это решение удовлетворяет граничным условиям

$$z = \pm 1: v_0 = 0, T_0 = \mp 1 \tag{1.2}$$

а также условию замкнутости осциллирующего потока

$$\int_{-1}^1 v_0 dz = 0 \tag{1.3}$$

Из (1.1) – (1.3) находим:

$$T_0 = -z, v_0 = \frac{R_v}{\omega} V_0; V_0 = z \cos \omega t + Z_1 \cos \omega t + Z_2 \sin \omega t \tag{1.4}$$

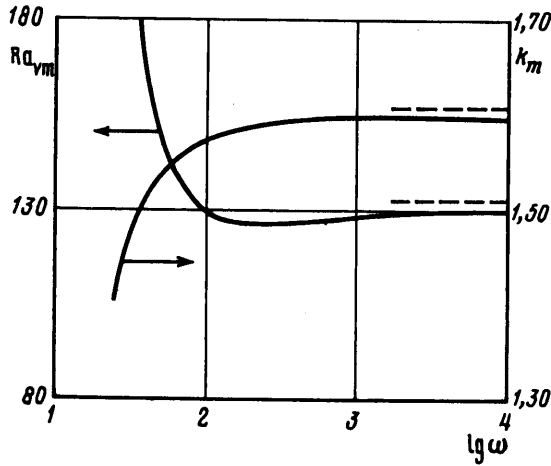
$$Z_1 = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{ch} \beta \cdot \cos \alpha}{\cos 2\kappa - \operatorname{ch} 2\kappa}; Z_2 = \frac{\operatorname{sh} \alpha \cdot \sin \beta - \operatorname{sh} \beta \cdot \sin \alpha}{\cos 2\kappa - \operatorname{ch} 2\kappa} \tag{1.5}$$

$$\alpha = \kappa(1+z), \beta = \kappa(1-z), \kappa = \sqrt{\omega/2}$$

При $\omega \rightarrow \infty$ это решение описывает "квазиравновесие", т.е. такое состояние, при котором осредненная скорость равна нулю, а осцилляционная добавка отлична от нуля.

Для исследования устойчивости основного состояния (1.4) рассмотрим его малые возмущения. В предельном случае высоких частот вибрации, как показано в [2], наиболее опасными (в невесомости) являются двумерные возмущения. Можно показать, что и в рассматриваемом теперь более общем случае конечных частот возмущений это свойство сохраняется. Итак, рассмотрим малые плоские возмущения основного состояния (1.4) вида: $\mathbf{v}' = (v'_x, 0, v'_z)$, где $v'_x = v'_x(x, z, t)$, $v'_z = v'_z(x, z, t)$, а также $T'(x, z, t)$ и $p'(x, z, t)$. Подставляя возмущенные поля в исходную систему (1.1) и производя линеаризацию около основного состояния, получим систему уравнений для возмущений. Введем функцию тока Ψ' для возмущения скорости и рассмотрим возмущения типа "нормальных" мод

$$\Psi'(x, z, t) = \varphi(z, t) \exp(-ikx); T'(x, z, t) = \theta(z, t) \exp(-ikx) \tag{1.6}$$



Фиг. 1

Здесь φ и θ – амплитуды, k – волновое число. После подстановки (1.6) в уравнения возмущений и исключения давления обычным путем получим систему амплитудных уравнений

$$\frac{\partial D\varphi}{\partial t} - \frac{ikR_0}{\omega P} V_0 D\varphi + \frac{ikR_0}{P} F_0 \cdot \varphi = D^2\varphi + R_0 \sin \omega t \cdot \theta' + ik Ra \theta \quad (1.7)$$

$$P \frac{\partial \theta}{\partial t} - ik\varphi - \frac{ikR_0}{\omega} V_0 \theta = D\theta$$

Здесь штрих означает дифференцирование по поперечной координате z , $D = \partial^2/\partial z^2 - k^2$, V_0 и F_0 – периодически меняющиеся со временем коэффициенты: $V_0 = (z + Z_1)\cos \omega t + Z_2 \sin \omega t$, $F_0 = -Z_1 \sin \omega t + Z_2 \cos \omega t$. Граничные условия для амплитуд на твердых изотермических плоскостях

$$z = \pm 1: \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0 \quad (1.8)$$

Амплитудная задача (1.7), (1.8) определяет поведение "нормальных возмущений". Для нахождения границы устойчивости требуется теория Флоке, из которой определяются условия существования периодических решений амплитудной задачи.

Для построения периодических решений задачи использовался метод Галеркина – Канторовича. Пространственный базис строился с помощью надлежащим образом нормированных собственных функций амплитудной задачи для неподвижного слоя. В качестве базиса для аппроксимации функции тока брались собственные функции задачи [10]

$$D^2\varphi_i = -\mu_i D\varphi_i; \quad \varphi_i(\pm 1) = \varphi_i'(\pm 1) = 0 \quad (1.9)$$

Базис для аппроксимации амплитуды возмущения температуры строился из собственных функций задачи

$$D\theta_j = -\nu_j \theta_j, \quad \theta_j(\pm 1) = 0 \quad (1.10)$$

Решение строилось в виде суперпозиции пространственных базисных функций с коэффициентами, зависящими от времени. Процедура ортогонализации методом Галеркина приводила к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов, которая интегрировалась методом Рунге – Кутты. В разложениях удерживалось до 20 базисных функций φ_i и θ_j . Если параметры системы заданы, то из начальных условий вырабатывается решение, описывающее затухающие или нарастающие

тающие колебания. По этому решению можно определить мультипликаторы. Интерполяция мультипликаторов на значения ± 1 позволяет найти параметры системы, соответствующие периодическому решению амплитудной задачи, т.е. границу устойчивости.

2. Невесомость. Рассмотрим сначала случай полной невесомости, $Ra = 0$. В этом случае остается только один механизм возбуждения конвективной неустойчивости – термовибрационный, и роль режимного параметра играет R_v . При высоких частотах неустойчивость по своей физической природе связана со стратификацией в вибрационном поле. Асимптотика, получающаяся из решения полной амплитудной задачи (1.7), (1.8), соответствует осредненному подходу. В этой области удобно вместо вибрационного аналога числа Рэлея $R_v = b\Omega^2\beta\Theta h^3 / \nu\chi$ ввести вибрационное число Рэлея, фигурирующее в осредненных уравнениях $Ra_v = (\beta b\Omega\Theta L)^2 / 2\nu\chi$. Их связь такова: $Ra_v = (R_v)^2 / (2\omega^2 P)$.

Нейтральные кривые на плоскости (k, Ra_v) в рассматриваемой области параметров имеют минимум при $k = k_m$, минимальное критическое число Ra_v есть Ra_{vm} . На фиг. 1 для $P = 1$ представлены критические параметры Ra_{vm} и k_m в зависимости от частоты вибрации ω . Видно, что при $\omega \rightarrow \infty$ полученные значения стремятся к асимптотическим, соответствующим осредненному подходу: $Ra_{vm} = 2129/16 = 131,1$, и $k_m = 3,23/2 = 1,61$ (напомним, что здесь в качестве характерного размера принята полутолщина слоя h , а в качестве характерной разности температур – полуразность температур Θ). Видно, что достижение асимптотики величиной Ra_{vm} происходит немонотонно: зависимость $Ra_{vm}(\omega)$ имеет минимум при $\omega \approx 200$.

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай низких частот вибрации. Основное течение (1.4) в этом пределе имеет вид

$$v_0 = \frac{R_v}{6} (z^3 - z) \sin \omega t + O(\omega), \quad T_0 = -z \quad (2.1)$$

Имеем, таким образом, медленно осциллирующее плоскопараллельное течение, состоящее из двух встречных потоков с кубическим профилем скорости и с точкой перегиба в середине слоя. В статическом случае неустойчивость такого течения имеет невязкую природу: она подробно изучена [11]. В случае медленной модуляции профиля можно применить асимптотический метод Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна [12].

Запишем амплитудную систему уравнений (1.7) (при $Ra = 0$) в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} Au = Nu \quad (2.2)$$

где u – вектор-функция $\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$, а A и N – операторы

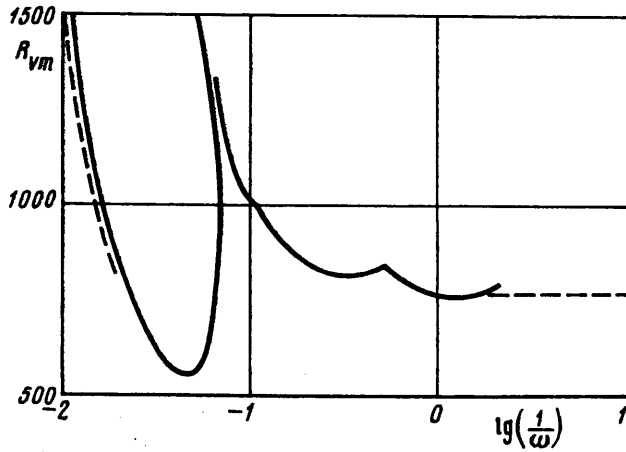
$$A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} D^2 + \frac{ikR_v}{\omega P} V_0 D - \frac{ikR_v}{P} F_0 & R_v \sin \omega t \cdot \frac{\partial}{\partial z} \\ ik & D + \frac{ikR_v}{\omega} V_0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

После введения новой переменной $\tau = \omega t$, уравнение (2.2) принимает вид

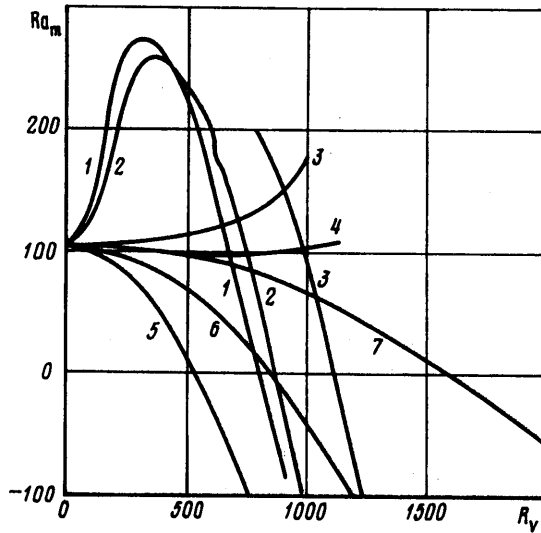
$$\omega \frac{\partial}{\partial \tau} Au = Nu \quad (2.4)$$

где теперь N – 2π -периодический по τ оператор. Граничные условия

$$z = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

При малых ω можно разложить N и критическое число R_v в ряды

$$R_v = R_0 + \omega R_1 + \omega^2 R_2 + \dots, \quad N = N_0 + \omega N_1 + \omega^2 N_2 + \dots \quad (2.6)$$

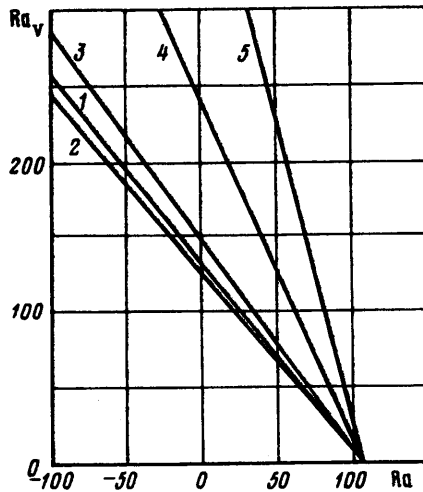
Решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$u = \exp\left[\frac{1}{\omega_0} \int_0^\tau \lambda(\tau') d\tau'\right] (w_0 + \omega w_1 + \omega^2 w_2 + \dots)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \omega \lambda_1 + \omega^2 \lambda_2 + \dots \quad (2.7)$$

Здесь λ – характеристический декремент возмущений квазистатического (“замороженного”) течения с профилем (2.1) (2π -периодическая функция τ). После подстановки разложений (2.6), (2.7), в (2.4) получим уравнения для последовательных приближений. В нулевом порядке по ω будем иметь

$$\lambda_0 A w_0 = N_0 w_0 \quad (2.8)$$



Фиг. 4

Вместе с надлежащими граничными условиями получаем задачу на собственные значения для $\lambda_0(\tau)$. Граница устойчивости по Флоке в нулевом по ω порядке разложения находится из интегрального условия

$$\int_0^{2\pi} \lambda_{0r}(R_0 \sin \omega t) dt = 0 \quad (2.9)$$

где λ_{0r} – действительная часть λ_0 . Для решения задачи на собственные значения (2.8) применялся метод Галеркина с базисом, определяемым (1.9), (1.10). Удерживалось до 20 функций. В результате для $(P = 1)$ получаем $R_{vm} = 764$, минимальное волновое число $k_m = 1,33$.

Поведение критического числа Рэлея в промежуточной области частот показано на фиг. 2, где изображено критическое (минимизированное по k) значение R_{vm} в зависимости от периода $1/\omega$ (число Прандтля фиксировано $P = 1$; области неустойчивости расположены выше кривой). Штриховыми кривыми показаны асимптотики высоких и низких частот. При высоких частотах кризис определяется критическим значением $Ra_{vm} = (R_{vm})^2/(2P\omega^2) = 133,1$ при $k_m = 1,61$ [1]. Отсюда находим $R_{vm} = 16,32(1/\omega)^{-1}$; эта гипербола изображена штриховой кривой на фиг. 2. Низкочастотная асимптотика $R_{vm} = 764$ также изображена штриховой горизонтальной прямой на фиг. 2. На кривой $R_{vm}(\omega^{-1})$ видны области резонансного параметрического возбуждения. Период колебаний нейтральных возмущений в этих областях совпадает с периодом вибраций. Тем не менее стоит отметить различие временного поведения в соседних полосах неустойчивости. Как показывают расчеты, вещественная и мнимая части возмущений имеют в соседних полосах различный период осцилляций, – они либо совпадают, либо отличаются в два раза.

3. Вибрации в поле силы тяжести. Рассмотрим теперь случай, когда имеется статическое поле тяжести. Анализ поведения возмущений теперь должен базироваться на полной системе амплитудных уравнений (1.7) с $Ra \neq 0$.

В отсутствие вибраций ($R_v = 0$), как известно, система (1.7) описывает затухание возмущений при нагреве сверху ($Ra < 0$), которое может быть как монотонным, так и осциллирующим. При подогреве же снизу ($Ra > 0$) выполняется принцип монотонности возмущений и существует критическое число Рэлея, определяющее границу монотонной неустойчивости. Для горизонтального слоя, подогреваемого снизу, критическое значение $Ra_{m0} = 106,7$. Задача состоит в исследовании влияния продольной вибрации

конечной частоты на конвективную устойчивость. При этом понятно, что частота и амплитуда являются независимыми параметрами (в пределе высоких частот параметром служит произведение $b\Omega$).

На фиг. 3 представлена зависимость минимизированного по волновому числу критического числа Рэлея от амплитуды и частоты вибрации. Показаны зависимости Ra_m от R_v для нескольких значений частоты (кривые 1–7 соответствуют частотам $\omega = \pi, 2\pi, 4\pi, 4,1\pi, 8\pi, 16\pi$ и 32π). При малых R_v зависимости $Ra_m(R_v)$ – параболические

$$Ra_m = Ra_{m0} + dR_v^2 \quad (3.1)$$

где d зависит от остальных параметров. При $P = 1$ имеем $d > 0$, если $\omega < \omega_*$, и $d < 0$, если $\omega > \omega_*$, где $\omega_* \cong 4,1\pi$. При конечных R_v наступают отклонения от закона (3.1). При $\omega < \omega_*$ кривые имеют максимум при некотором R_v , а при относительно высоких частотах все кривые уходят в область отрицательных Ra , т.е. соответствуют нагреву сверху.

Приведем границы устойчивости на плоскости $Ra - R_v$ для нескольких частот (на фиг. 4: 1 – $\omega = \infty$, 2 – $\omega = 32\pi$, 3 – $\omega = 16\pi$, 4 – $\omega = 8\pi$, 5 – $\omega = 6\pi$). Кривые устойчивости практически прямые. Как и в предельном случае бесконечно больших частот, нейтральные кривые продолжают в область $Ra < 0$, т.е. специфический вибрационный механизм возбуждения неустойчивости действует и в случае нагрева сверху.

Заключение. На основе полных уравнений конвекции в приближении Буссинеска рассмотрена вибрационно-конвективная устойчивость плоского горизонтального слоя при наличии поперечной разности температур и продольной вибрации для произвольных частот. В результате в предельном случае высокочастотной вибрации обосновано применение осредненных уравнений.

В отличие от случая $\omega \rightarrow \infty$, когда вибрационный механизм всегда является дестабилизирующим, при конечных частотах вибрации благодаря параметрическому возбуждению возможны как дестабилизация равновесия, так и его стабилизация в зависимости от амплитуды и частоты.

Исследования, результаты которых представлены в данной статье, выполнялись частью при поддержке Международного научного фонда (ISF) (грант N MF 5300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 580–584.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 12–19.
3. Браверман Л.М. К вопросу о вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 178–180.
4. Браверман Л.М. О некоторых типах вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 4–7.
5. Браверман Л.М., Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Колесников А.К., Шихов В.М. Новые результаты исследования вибрационно-конвективной неустойчивости // Тез. докл. 3-го Всесоюз. семинара по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Черноголовка, 1984. С. 11–13.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Колесников А.К. Вибрационно-конвективная неустойчивость горизонтального слоя жидкости с внутренними источниками тепла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 3–7.
7. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M., Kolesnikov A.K., Yurkov Yu.S. Vibrational convection in a horizontal fluid layer with internal heat sources // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1989. V. 32. № 12. P. 2319–2328.

8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Колесников А.К.* Конвективная устойчивость горизонтального слоя реагирующей среды в высокочастотном вибрационном поле // *Физика горения и взрыва*. 1990. Т. 26. № 5. С. 91–96.
9. *Зеньковская С.М., Симоненко И.Б.* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1966. № 5. С. 51–55.
10. *Петров Г.И.* Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // *ПММ*. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 3–12.
11. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М.: Наука, 1989. 767 с.

Пермь

Поступила в редакцию
20.VII.1995