

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1996 г. Р.В. БИРИХ, Р.Н. РУДАКОВ

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Рассматривается устойчивость плоской жидкой пленки с однородным поперечным градиентом температуры в невесомости. Коэффициент поверхностного натяжения предполагается линейно зависящим от температуры. На базе точного решения задачи о нейтральных возмущениях в слое с деформируемыми границами определены области неустойчивости, дисперсионные кривые и форма возмущений. Показано, что на пленке в области малых чисел Прандтля могут возникать как термокапиллярные волны с преимущественно продольным течением, так и капиллярные волны, поддержанные термокапиллярным эффектом, с интенсивным поперечным движением жидкости.

Термокапиллярной неустойчивости плоского слоя жидкости с однородным поперечным градиентом температуры посвящено достаточно большое число работ [1–5]. Наиболее тщательно изучен механизм монотонной неустойчивости как в случае плоской, так и деформируемой свободной границы. В [6] исследована монотонная неустойчивость в слое с двумя свободными границами. В работах по изучению колебательной неустойчивости основное внимание уделялось анализу нейтральных кривых и практически без внимания остались дисперсионные соотношения. Это не позволило дать обоснованную классификацию типов колебательной неустойчивости, обусловленных термокапиллярным эффектом. Колебательная неустойчивость в слое с двумя деформируемыми границами рассматривалась в [7], где для решения этой задачи был применен метод малого параметра и показано, что в области малых частот и волновых чисел нет нарастающих колебательных возмущений. Монотонная и колебательная неустойчивость в слое с двумя свободными границами исследована также в [8, 9], однако в этих работах рассмотрены существенно другие условия нагрева слоя – источники или стоки тепла располагались на середине слоя.

В настоящей работе рассмотрена связанная с термокапиллярным эффектом неустойчивость плоского слоя вязкой жидкости с двумя деформируемыми свободными границами при наличии постоянного поперечного градиента температуры. Исследована форма критических движений и ее связь с физическими механизмами неустойчивости. Выделены два типа колебательной неустойчивости: капиллярная неустойчивость относительно возмущений, частота которых близка к частоте капиллярных волн для слоя изотермической невязкой жидкости, и термокапиллярная неустойчивость.

1. Рассмотрим плоский слой вязкой жидкости с двумя свободными границами ($z = 0$ и $z = h$), на которых за счет внешнего подогрева имеется разность температур Θ . В условиях невесомости возможно стационарное состояние, соответствующее механическому равновесию с линейным профилем температуры

$$T_0 = \Theta(1 - z/h) \quad (1.1)$$

Для исследования устойчивости этого состояния рассмотрим малые возмущения скорости v , давления p и температуры T , поведение которых описывается линейно-

ризованными уравнениями Навье – Стокса, теплопроводности и непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nu \nabla T_0 = \chi \Delta T \quad (1.2)$$

где ρ – плотность жидкости, ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности.

При формулировке граничных условий будем предполагать, что отклонение поверхности жидкости ζ от равновесного положения мало по сравнению с толщиной слоя, окружающая среда не оказывает активного влияния на течение жидкости и коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0 - \gamma T$. Коэффициент поверхностного натяжения σ_0 предполагается одинаковым на обеих поверхностях ввиду малости добавки $\gamma \Theta$.

В этом приближении баланс нормальных и касательных напряжений и кинематические условия на плоскостях $z = 0$ и $z = h$ имеют вид

$$p \pm \sigma_0 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 2\rho \nu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$-\gamma \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T_0}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = \pm \rho \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (1.3)$$

$$-\gamma \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T_0}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \pm \rho \nu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

$$\partial \zeta / \partial t = v_z$$

где x, y – продольные координаты, нижний знак относится к границе $z = 0$.

Условия теплообмена на границах запишем в виде, наиболее благоприятном для развития термокапиллярной неустойчивости, предполагая, что возмущения теплового потока на границах отсутствуют

$$z = 0, h: \quad \partial T / \partial z = 0 \quad (1.4)$$

Перейдем к базразмерным величинам, взяв за единицу измерения расстояния толщину слоя h , времени – h^2/ν , скорости – χ/h , температуры – Θ , и, рассматривая нормальные возмущения

$$(v_z, T, \zeta) = (v, \theta, \xi) \exp[i(k_1 x + k_2 y - \omega t)]$$

сформулируем задачу для амплитуд z -компоненты скорости $v(z)$, температуры $\theta(z)$ и деформации границ ξ .

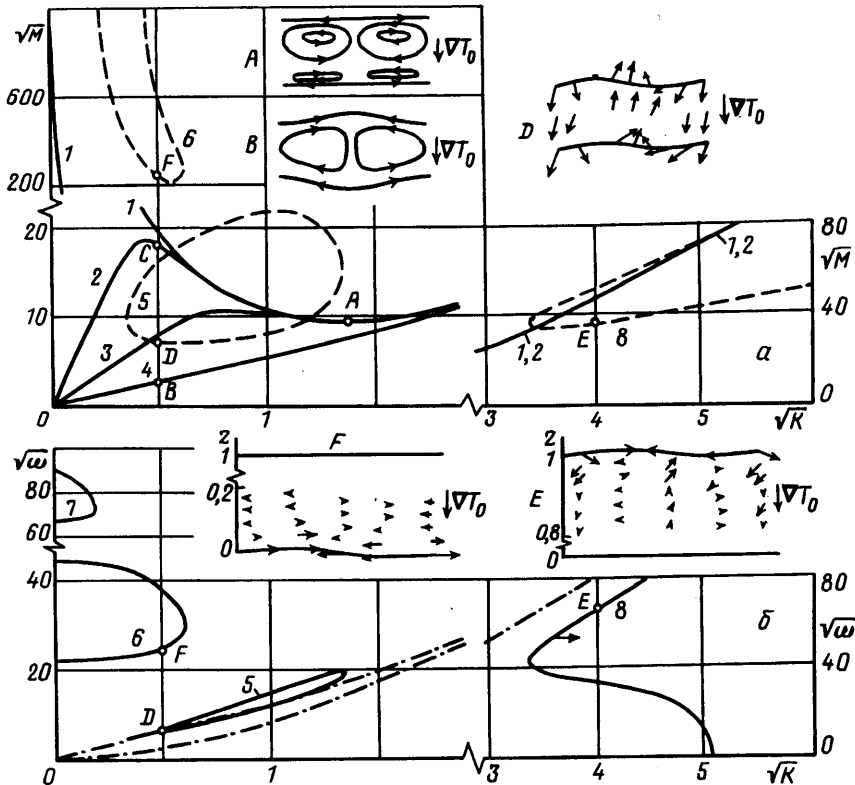
В соответствии с (1.2) – (1.4) краевая задача для амплитуд возмущений имеет вид

$$v'''' - 2k^2 v'' + k^4 v + i\omega(v'' - k^2 v) = 0$$

$$\theta'' - k^2 \theta - T_0' v + i\omega P r \theta = 0 \quad (1.5)$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \omega = \omega_r + i\omega_i$$

$$z = 0, 1: \quad v'''' - (3k^2 - i\omega)v'' \mp \operatorname{PrCa}^{-1} k^4 \xi = 0$$



Фиг. 1. Центральные кривые $Ma(k)$ и дисперсионные соотношения $\omega(k)$ при $Pr = 0,01$ и $Ca = 10^{-4}$. На вставках А и В – линии тока монотонных возмущений для точек А и В нейтральных кривых. На вставках D, E и F – мгновенные значения вектора скорости колебательных возмущений для точек D, E и F

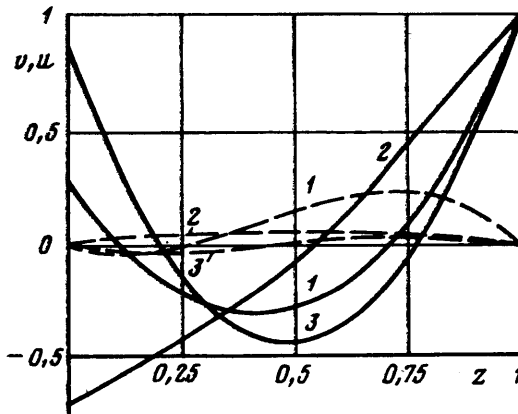
$$\nu'' + k^2\nu \pm Ma k^2(\theta + T_0'\xi) = 0, \quad \theta' = 0, \quad \xi = \frac{-\nu}{i\omega Pr} \quad (1.6)$$

$$Ca = \frac{\rho\nu^2}{\sigma_0 h}, \quad Ma = \frac{\gamma\Theta h}{\rho\nu\chi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi} \quad (1.7)$$

Задача (1.5), (1.6) содержит три независимых безразмерных параметра. Капиллярный параметр Ca характеризует деформируемость границ вязкими силами. Плоская недеформируемая граница соответствует $Ca = 0$. Число Марангони Ma задает интенсивность термокапиллярного воздействия на границах слоя.

Краевая задача (1.5), (1.6) допускает точное решение. Сводные результаты по определению границ устойчивости для жидкости с параметрами $Pr = 0,01$ и $Ca = 10^{-4}$ приведены на фиг. 1, а, где штриховыми линиями показаны нейтральные кривые колебательных возмущений, сплошными линиями – нейтральные кривые монотонной неустойчивости (кривая 4 для указанных параметров). На фиг. 1, б представлены дисперсионные кривые колебательных возмущений. На вставках фиг. 1 качественно показаны формы конвективных ячеек и структура движений для некоторых характерных точек нейтральных кривых. Более подробно вопросы монотонной и колебательной неустойчивости обсуждены в разд. 2 и 3.

2. Монотонная неустойчивость, вызванная термокапиллярным эффектом, для слоя с одной свободной недеформируемой границей была впервые обнаружена в [1] ($Ma =$



Фиг. 2. Распределение амплитуд поперечной $u(z)$ и продольной $u(z)$ компонент скорости монотонных возмущений для точек A , B и C нейтральных кривых (кривые 1, 2 и 3, $u(z)$ – сплошная линия, $u(z)$ – штриховая линия)

79,6, $k_* = 2$) и механизм ее возникновения связан с подтеканием нагретой жидкости к свободной поверхности. Возникающее конвективное течение создает в слое продольный градиент температуры, который за счет термокапиллярного эффекта на охлаждаемой извне свободной границе поддерживает это течение.

В слое с двумя свободными границами термокапиллярный эффект на другой границе препятствует образованию одновихревой структуры нейтральных возмущений и поэтому критическое значение числа Марангони оказывается более высоким: $Ma_* = 87,4$ [6].

Деформируемость границ создает другой механизм монотонной неустойчивости, связанный с наклоном границы слоя к изотермам основного поля температуры. Для слоя с одной свободной границей он подробно исследован в [4]. В условиях невесомости и при числе Био, равном нулю, имеет место абсолютная неустойчивость с $k_* = 0$. Эта длинноволновая неустойчивость сохраняется и в пленке с двумя свободными границами [6].

Нейтральные кривые монотонной неустойчивости для слоя с двумя свободными границами, полученные из точного решения краевой задачи (1.5), (1.6), изображены на фиг. 1, a кривыми 1–4 для чисел $PrCa^{-1} = \infty, 10^6, 10^4, 10^2$ соответственно. Эти кривые согласуются с результатами [6] и приведены для сопоставления с нейтральными кривыми колебательной неустойчивости и анализа формы критических монотонных возмущений, который отсутствует в литературе. На вставке A фиг. 1 показана структура возмущений в окрестности минимума нейтральных кривых (точка A). В этом случае имеет место пирсоновский механизм неустойчивости. Деформация границ слоя практически отсутствует, а возникающий продольный градиент температуры ведет к образованию встречного вихря на границе, подогреваемой извне. На вставке B показано возмущение с другим механизмом возбуждения. На деформированной движением жидкости поверхности основное поле температуры T_0 создает продольный градиент, поддерживающий движение за счет термокапиллярного эффекта. Деформация поверхности жидкости поддерживается течением у холодной поверхности. В этом смысле она является активной поверхностью. Форма ячейки, однако, такова (вздутие-сжатие), что движение поддерживается на обеих поверхностях.

Рассмотрим структуру возмущений более детально. Поперечная v_z и продольная v_x компоненты скорости определяются в решении формулами

$$v_z = v(z) \cos kx, \quad v_x = -\frac{1}{k} v'(z) \sin kx \equiv u(z) \sin kx$$

| Точки | k | Ma | $\xi(0)$ | $\xi(1)$ | $\theta(0)$ | $\theta(1)$ |
|-------|------|------|----------------------|-----------------------|-------------|-------------|
| A | 2,0 | 87,7 | $0,91 \cdot 10^{-6}$ | $-0,66 \cdot 10^{-6}$ | 0,018 | 0,032 |
| B | 0,25 | 6,37 | 1,12 | -1,05 | 0,570 | 0,570 |
| C | 0,25 | 321 | $0,69 \cdot 10^{-3}$ | $-0,69 \cdot 10^{-3}$ | 0,065 | 0,069 |

Распределение амплитуд v и u по толщине слоя для точек A, B и C на фиг. 1, а приведены на фиг. 2 кривыми 1, 2 и 3. Сплошные линии представляют амплитуду u , а штриховые линии – v . Решение задачи нормировано по максимальному значению амплитуды продольной компоненты скорости. Возмущение температуры для всех монотонных возмущений слабо зависит от поперечной координаты и может быть охарактеризовано значением на границах. Амплитуды деформации границ ξ и возмущения температуры θ на границах приведены в таблице.

Приведенные данные показывают, что заметная деформация границ имеет место только для точки B, где механизм неустойчивости связан с наклоном слоя.

3. Рассмотрим поведение колебательных возмущений, определяемое решением краевой задачи (1.5), (1.6) при $\omega_i = 0$ и $\omega_r \neq 0$. Общее решение уравнений (1.5) для $Pr \neq 0$ и $Pr \neq 1$ имеет вид

$$v = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz} + c_3 e^{lz} + c_4 e^{-lz}$$

$$\theta = -\frac{c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}}{i\omega Pr} - \frac{c_3 e^{lz} + c_4 e^{-lz}}{i\omega(Pr-1)} + c_5 e^{mz} + c_6 e^{-mz}$$

$$l = (k^2 - i\omega)^{1/2}, \quad m = (k^2 - i\omega Pr)^{1/2}$$

Коэффициенты c_i определяются граничными условиями (1.6). Условие разрешимости системы уравнений для c_i определяет для фиксированного k критическое число Марангони. Требование вещественности числа Марангони при $\omega_i = 0$ (нейтральные возмущения) определяет частоту колебаний ω_r .

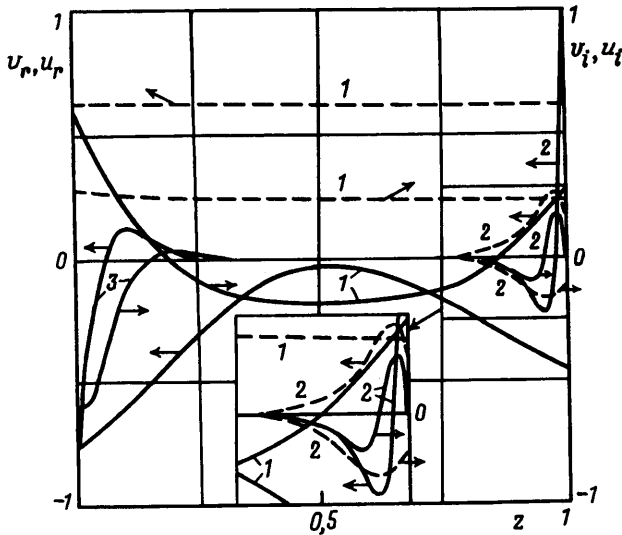
Результаты расчета нейтральных кривых колебательных возмущений для $Pr = 0,01$ и $Ca = 10^{-4}$ представлены на фиг. 1, а штриховыми линиями 5, 6, 8 (область неустойчивости внутри кривых). Соответствующие дисперсионные кривые изображены на фиг. 1, б. Для кривой 7 нейтральная кривая лежит в области больших значений чисел Марангони ($Ma_* = 1,3 \cdot 10^8$) и на фиг. 1, а не приведена.

Штрихпунктирные линии на фиг. 1, б дают дисперсионные соотношения для капиллярных волн на поверхности изотермической невязкой жидкости. Верхняя кривая $\omega^2 = Ca^{-1} k^3 \text{cth}(k/2)$ соответствует изгибным волнам на пленке. Нижняя кривая $\omega^2 = Ca^{-1} k^3 \text{th}(k/2)$ соответствует волнам с симметричными отклонениями поверхностей (вздутия-сжатия пленки). Колебания, описываемые кривой 5, имеют частоту, близкую к частоте изгибных капиллярных волн. Область существования этих волн ограничена со стороны малых волновых чисел. Ранее отсутствие незатухающих колебаний при $k \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$ было показано в [7].

Структура колебательных возмущений для точек разных нейтральных кривых показана на вставках D, E, F фиг. 1. Стрелки показывают мгновенные скорости в характерных точках волны. Исследование формы критического движения для точки D нейтральной кривой 5 показывает, что обе поверхности слоя колеблются практически в одной фазе с частотой, близкой к частоте изгибных волн. Поперечная компонента скорости почти не меняется с глубиной, в то время как продольная компонента скорости от поперечной координаты зависит существенно. Распределение амплитуд этих скоростей

$$v_x = u_r(z) \sin(kx - \omega t) + u_i(z) \cos(kx - \omega t)$$

$$v_z = u_r(z) \sin(kx - \omega t) + v_i(z) \cos(kx - \omega t)$$



Фиг. 3. Распределение амплитуд поперечной (u_r, u_i) и продольной (u_r, u_i) компонент скорости колебательных возмущений для точек D, E и F нейтральных кривых (кривые 1, 2 и 3, u_r, u_i – сплошные линии, u_r, u_i – штриховые линии)

показано на фиг. 3 кривыми 1 (продольная компонента представлена сплошными линиями, поперечная – штриховыми). На горячей поверхности слоя продольная компонента скорости примерно в 2 раза превышает скорость на холодной поверхности и имеет тот же порядок, что и поперечная скорость. Это свидетельствует о том, что подкачка энергии в капиллярную волну термокапиллярным эффектом происходит на горячей поверхности.

Колебания, описываемые нижней ветвью кривой 8 на фиг. 1, а, в связи с характерной зависимостью у них ω от k и структурой движения также следует отнести к капиллярным волнам. В принятых единицах они имеют малую длину волны и локализованы у холодной поверхности жидкости. Структура движения и распределение скоростей жидкости показаны на вставке E фиг. 1 и кривыми 2 на фиг. 3.

Нейтральная кривая 6 на фиг. 1, а представляет нейтральные колебания качественно другой структуры. Частота этих колебаний остается конечной при $k \rightarrow 0$, что отличает их от капиллярных волн. Возникающее движение жидкости характеризуется интенсивным продольным течением вблизи горячей поверхности слоя (см. вставку F на фиг. 1 и кривые 3 на фиг. 3). Поперечная скорость для этого возмущения на фиг. 3 не представлена ввиду ее малости. В отличие от капиллярных волн эти волны можно назвать термокапиллярными, поскольку механизм их возбуждения связан, как и в случае длинноволновой монотонной неустойчивости, с наклоном границы слоя к изотермам равновесного температурного поля и генерацией движения термокапиллярным эффектом. Обратим внимание на то, что колебания возбуждаются на поверхности, нагреваемой снаружи, в то время как монотонная длинноволновая неустойчивость генерируется поверхностью, нагреваемой изнутри слоя.

Нейтральные кривые и форма критических движений довольно чувствительны к изменению параметров задачи. Так, при $Ca = 10^{-4}$ замкнутая область колебательной неустойчивости (кривая 5) появляется при $Pr = 0,0022$. При меньших значениях числа Прандтля изгибные волны термокапиллярным эффектом не поддерживаются. С увеличением Pr до 0,05 области неустойчивости, ограниченные кривыми 5 и 6, сближаются, а затем происходит их объединение. После этого разделение колебательных возмущений на капиллярные и термокапиллярные становится условным. Минимальное

критическое значение числа Марангони для колебательной неустойчивости растет от 16 при $Pg = 0,0022$ до 540 при $Pg = 0,05$ и при этом расширяется область значений волновых чисел незатухающих возмущений.

Заключение. В слое с двумя свободными границами наблюдаются те же механизмы неустойчивости, что и в слое с одной свободной границей. Для длинноволновой монотонной и колебательной термокапиллярной неустойчивости характерны течения с преобладанием продольной компоненты скорости, приводящие к изменению локальной толщины слоя. За счет деформации свободной поверхности на ней возникает продольный градиент температуры, поддерживающий движение жидкости. Для малых значений числа Прандтля в области средних значений волнового числа возможна поддержка изгибных капиллярных волн термокапиллярным эффектом ($Pg = 0,001$, $Ca = 10^{-4}$; $0,1 < k < 1,9$).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01730а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pearson J.R.A.* On convection cells induced by surface tension // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4. Pt 5. P. 489–500.
2. *Scriven L.E., Sternling C.V.* On cellular convection driven surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 19. Pt 3. P. 321–340.
3. *Takashima M.* Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface // *J. Phys. Soc. Japan* 1981. V. 50. № 8. P. 2745–2756.
4. *Goussis D.A., Kelly R.E.* On the thermocapillary instabilities in a liquid layer heated from below // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1990. V. 33. № 10. P. 2237–2245.
5. *Рябицкий Е.А.* Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии вертикального градиента температуры // *Изв. РАН. МЖГ.* 1992. № 3. С. 19–23.
6. *Funada T.* Marangoni instability of thin liquid sheets // *J. Phys. Soc. Japan.* 1986. V. 55. № 7. P. 2191–2202.
7. *Funada T., Kubo T., Matsuura S.* Marangoni instability of unsteady mode for a liquid sheet // *Numazu College Technol. Research Annual.* 1994. № 28. P. 53–59.
8. *Birikh R.V., Briskman V.A., Rudakov R.N., Velarde M.G.* Marangoni-Benard convective instability driven by a heated divider // *Intern. J. Heat and Mass Transfer.* 1994. V. 37. № 3. P. 493–498.
9. *Birikh R.V., Briskman V.A., Rudakov R.N., Velarde M.G.* Marangoni-Benard instability of a floating liquid layer with an internal, permeable, heated or cooled divider and two deformable open surfaces // *Intern. J. Heat and Mass Transfer.* 1995. V. 38. № 15. P. 2723–2731.

Пермь

Поступила в редакцию
2.VIII.1995