МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1996

УДК 532.529.5:532.517.4

© 1996 г. Л.И. ЗАЙЧИК, В.А. ПЕРШУКОВ

ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ГОРЕНИЕМ ИЛИ ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

(обзор)

Рассматриваются основные теоретические проблемы, связанные с моделированием газодисперсных и парокапельных турбулентных течений с горением или фазовыми переходами. Обсуждаются методы решения этих проблем и даны примеры способов реализации этих решений.

Основные проблемы, возникающие при построении теории и численном моделировании двухфазных и дисперсных турбулентных течений, связаны с математическим описанием следующих процессов:

– взаимодействие частиц с турбулентным несущим потоком;
– обратное влияние частиц на турбулентность;
– взаимодействие частиц с ограничивающей поток поверхностью;
– взаимодействие частиц друг с другом;
– учет полидисперсности частиц и эволюция спектра частиц по размерам;
– влияние турбулентных флуктуаций на скорости гетерогенного горения и фазовых переходов.

Несомненно, список перечисленных проблем является неполным и может быть расширен, но мы ограничимся анализом только указанных проблем и связанных с ними задач.

1. Методы моделирования дисперсных турбулентных течений. Основные принципиальные трудности, возникающие при построении теории двухфазных дисперсных потоков, связаны с турбулентным характером движения среды и взаимодействием частиц при столкновениях. Прежде всего нужно отметить, что к настоящему времени далеко от завершения даже построение теории однофазных турбулентных течений, хотя для описания таких течений предложен целый ряд достаточно эффективных моделей и расчет многих из них не вызывает принципиальных сложностей. Теория дисперсных турбулентных течений, строго говоря, только начинает создаваться; примеров расчета достаточно сложных, реализуемых в практических условиях двухфазных турбулентных течений крайне немного и эти расчеты связаны со значительными затратами процессорного времени на самых быстродействующих ЭВМ.

В настоящем обзоре ограничимся рассмотрением методов моделирования двухфазных турбулентных течений, использующих феноменологические (или полуэмпирические) способы описания непрерывной газовой (или жидкой) фазы. В последние годы в связи с появлением суперЭВМ начинают интенсивно развиваться методы прямого моделирования, основанные на численном решении нестационарных уравнений движения и тепломассопереноса без введения замыкающих соотношений. Этот подход начинает находить приложение в теории двухфазных турбулентных течений [1–3]. Однако в настоящее время это направление только начинает развиваться и еще очень далеко от широкого использования при решении представляющих практический интерес задач.

Известные методы расчета турбулентных двухфазных дисперсных потоков могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся работы, основанные на смешанном эйлерово-лагранжевом описании движения среды: уравнения движения и энергии сплошной несущей фазы представляются и решаются в эйлеровых переменных, а уравнения движения и теплопереноса дисперсной фазы записываются и решаются в лагранжевых переменных, т.е. интегрируются вдоль отдельных траекторий частиц (капель). Учет в рамках такого подхода случайного характера движения частиц, обусловленного взаимодействием их с турбулентными пульсациями несущего потока, в результате интегрирования динамических стохастических уравнений типа Ланжевена вдоль индивидуальных траекторий с последующим осреднением решений по ансамблю начальных данных (например [4, 5]) приводит к существенному увеличению объема вычислений, так как для получения статистически достоверной информации необходимо использовать достаточно представительный ансамбль реализаций.

С уменьшением размера частиц число реализаций, необходимое для получения статистически достоверных осредненных характеристик, вообще говоря, должно возрастать, так как увеличивается вклад взаимодействия частиц с вихрями все меньших размеров. Поэтому применение стохастического моделирования динамики отдельных частиц, по-видимому, целесообразно только для относительно инерционных частиц (при $\Omega_u = \tau_u/T_L > 1$, где τ_u – время динамической релаксации частиц, T_L – лагранжев временной масштаб турбулентности, характеризующий время затухания энергоемких флуктуаций сплошной фазы). Детерминированное лагранжево описание движения и теплообмена дисперсной фазы в турбулентном потоке на основе решения уравнений только для средних величин, т.е. без учета взаимодействия со случайными полями пульсаций скорости и температуры сплошной фазы, оправданно только для очень инерционных частиц ($\Omega_u \gg 1$). Трудности динамического лагранжевого моделирования в значительной степени увеличиваются в высококонцентрированных дисперсных потоках вследствие возрастания "запутанности" траекторий при учете столкновений частиц, а также при изменении числа (рождения или исчезновения) частиц в результате коагуляции, дробления, спонтанного зародышеобразования и т.д.

Другой метод моделирования основан на эйлеровом континуальном представлении уравнений движения и энергии для обеих фаз – на так называемых двухжидкостных моделях. Существенным преимуществом эйлерова двухжидкостного подхода по сравнению с лагранжевым траекторным моделированием является использование уравнений одного типа для обеих фаз и соответственно единого алгоритма решения всей системы уравнений. Кроме того, описание динамики очень мелких частиц не вызывают никаких принципиальных трудностей, так как при $\Omega_u \to 0$ осуществляется предельный переход к задаче о турбулентной диффузии безынерционной примеси (пассивного скаляра).

Так как авторы в своих работах преимущественно используют эйлеров подход для описания дисперсной фазы, будут рассматриваться в основном континуальные двухжидкостные модели.

Вследствие турбулентного характера движения разработка методов расчета двухфазных потоков связана с необходимостью решения двух первых из указанных в списке основных теоретических проблем, состоящих в определении степени вовлечения частиц в пульсационное движение среды, и характера обратного влияния дисперсной фазы на пульсационные характеристики несущего потока. В настоящее время наиболее широкое распространение получили два подхода к решению этих задач, основанные соответственно на моделях пути смешения и уравнениях для вторых одноточечных моментов пульсаций скорости и температуры. В рамках первого (подхода) направления известные модели пути смешения Прандтля и Ван-Дриста для однофазных потоков обобщены на случай газодисперсных сред в [6–9].

В последние два десятилетия для расчета турбулентных однофазных потоков наряду с традиционными алгебраическими моделями (Прандтля, Кармана, Ван-Дриста

и т.д.) стали широко применяться дифференциальные модели, основанные на уравнениях переноса характеристик турбулентности. Применение дифференциальных моделей особенно целесообразно для расчета существенно неравновесных потоков, характеризующихся большими градиентами параметров. Если при использовании алгебраических (локальных) моделей для описания таких процессов нужно вводить дополнительные релаксационные члены, то дифференциальные, включающие конвективные и диффузионные слагаемые, во многих случаях автоматически учитывают эффекты неравновесности.

Наибольшее распространение для расчета турбулентных однофазных течений в настоящее время получили модели, включающие уравнения переноса вторых одноточечных моментов пульсаций скорости и температуры. Привлечение уравнений баланса вторых моментов для описания двухфазных потоков представляется особенно целесообразным, так как в рамках таких моделей можно достаточно последовательно и без введения дополнительных эвристических предложений, характерных для моделей пути смешения, описать вовлечение частиц в пульсационное движение несущего потока и учесть обратное влияние частиц на турбулентность. Впервые такой подход был применен в [10], а дальнейшее развитие с привлечением уравнений только для вторых моментов несущей фазы нашел в [11–21] и с использованием также уравнений для вторых моментов дисперсной фазы – в [22–34].

2. Взаимодействие частиц с турбулентным несущим потоком. При описании движения и теплообмена дисперсной фазы на основе континуальной системы уравнений сохранения массы, количества движения и энергии необходимо определить турбулентные напряжения, а также диффузионный и тепловой потоки, обусловленные вовлечением частиц в пульсационное движение сплошной среды. Для вычисления турбулентных характеристик дисперсной фазы широкое распространение получили алгебраические (локально-равновесные) модели [6–21]. В рамках одного из таких подходов турбулентные напряжения дисперсной фазы $\langle v_i' v_j' \rangle$ непосредственно связываются с рейнольдсовыми напряжениями несущего потока $\langle u_i' u_j' \rangle$ при помощи соотношения

$$\langle v_i' v_j' \rangle = f_u \langle u_i' u_j' \rangle, \quad f_u = \int_0^\infty \psi_u(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_u}\right) d\tau \tag{2.1}$$

где ψ_u – двухвременная автокорреляционная функция пульсаций скорости газа вдоль траекторий частиц.

Аналогичный вид имеет соотношение, выражающее турбулентный тепловой поток в дисперсной фазе $\langle v_i' \vartheta' \rangle$ через турбулентный тепловой поток в непрерывной фазе $\langle u_i' t' \rangle$

$$\langle v_i' \vartheta' \rangle = \frac{\tau_u f_{ut} + \tau_t f_{tu}}{\tau_u + \tau_t} \langle u_i' t' \rangle$$
$$f_{ut} = \int_0^\infty \psi_{ut}(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_u}\right) d\tau, \quad f_{tu} = \int_0^\infty \psi_{ut}(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_t}\right) d\tau \tag{2.2}$$

где ψ_{ut} – двухвременная корреляционная функция пульсаций скорости и температуры газа вдоль траекторий частиц, τ_t – время тепловой релаксации частиц.

Выражения (2.1), (2.2), связывающие вторые одноточечные моменты в дисперсной и сплошной фазах, получаются в рамках локально-однородного приближения и поэтому справедливы для относительно мелких частиц ($\Omega_u < 1$) при отсутствии в потоке больших градиентов скоростей.

Другой путь определения турбулентных характеристик дисперсной фазы состоит в использовании алгебраических выражений градиентного типа в форме соотношений

Буссинеска и Фурье–Фика. Так, в рамках такого подхода турбулентные напряжения и тепловой поток представляются в виде

$$\langle v_i' v_j' \rangle = \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} - \nu_p \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \tag{2.3}$$

$$\langle v_i' \vartheta' \rangle = -\frac{\nu_p}{\mathrm{Pr}_p} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \tag{2.4}$$

где V_i и Θ – осредненные скорость и температура дисперсной фазы, $k_p = \langle v_n' v_n' \rangle / 2$ – турбулентная энергия дисперсной фазы, ν_p и Pr_p – коэффициент турбулентной вязкости и турбулентное число Прандтля для дисперсной фазы.

Так как модели градиентного типа строятся в основном чисто феноменологическим путем на основе аналогии с соответствующими характеристиками переноса в однофазном потоке, то они, как правило, содержат ряд дополнительных эмпирических постоянных. В целом, алгебраические модели справедливы при $\Omega_u < 1$ и могут приводить к существенным ошибкам при расчете характеристик достаточно инерционных частиц, особенно в пристеночной области течения.

Наряду с локально-равновесными алгебраическими моделями описания турбулентного переноса импульса и тепла в дисперсной фазе все большее распространение начинают находить дифференциальные (нелокальные) модели, основанные на уравнениях баланса турбулентной энергии или вторых моментов пульсации скорости и температуры частиц [22–34]. Применение дифференциальных моделей позволяет описывать нелокальные эффекты переноса пульсаций скорости и температуры инерционными частицами – конвективный и диффузионный механизмы турбулентного переноса импульса и тепла, что особенно существенно в пристеночной области течения.

Последовательным методом получения системы уравнений для описания движения и тепломассопереноса дисперсной фазы в рамках эйлерова континуального представления является построение кинетического уравнения для функции плотности вероятности (ФПВ) скорости и температуры частиц в турбулентном потоке. Введение ФПВ позволяет получить статистическое описание ансамбля частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе уравнений движения и теплопереноса типа Ланжевена. В математическом отношении проблема интегрирования стохастических траекторных дифференциальных уравнений в физическом пространстве заменяется решением детерминированного уравнения в частных производных, определенного в фазовом пространстве координат, скоростей и температур. Естественно, при статистическом моделировании на основе ФПВ происходит некоторая потеря информации, касающаяся индивидуальных особенностей динамического поведения отдельных частиц. Однако эта "неполнота" динамической информации в отношении отдельных частиц компенсируется увеличением информации о статистических закономерностях движения и теплообмена коллектива частиц. Учет взаимодействия и изменения числа частиц в рамках статистического моделирования не приводит к таким осложнениям, как при динамическом моделировании, а с уменьшением размера частиц имеет место предельный переход к достаточно хорошо изученной задаче о статистическом описании безынерционной примеси (пассивного скаляра) в турбулентном потоке.

Взаимодействие частиц с турбулентными вихрями несущей среды в [35–37] описывается таким же диффузионным оператором в пространстве скоростей, как и при броуновской диффузии, а кинетическое уравнение для ФПВ по существу совпадает с обычным уравнением Фоккера – Планка. Однако уравнение Фоккера – Планка справедливо только для моделирования δ-коррелированных во времени случайных процессов и поэтому действительно для относительно крупных частиц ($\Omega_u \gg 1$). В более общей форме, чем уравнение Фоккера – Планка, кинетическое уравнение получено в

[24, 38–41] при моделировании турбулентных полей несущего потока гауссовыми случайными процессами с известными корреляционными функциями. В [38, 41] получено кинетическое уравнение для совместной ФПВ скорости и температуры частиц, а в [32] выполнено обобщение на случай вращающихся частиц.

Кинетическое уравнение для ФПВ может быть использовано для построения системы континуальных уравнений, описывающей осредненные гидродинамические и тепловые характеристики (моменты) дисперсной фазы. Получаемая система уравнений для моментов, аналогично известной цепочке уравнений Фридмана–Келлера в теории однофазных турбулентных течений, является незамкнутой, так как уравнение для n-ого момента содержит $(n + 1)$-й момент. Для получения замкнутой системы уравнений для моментов эту цепочку необходимо оборвать, вводя определенные замыкающие соотношения. Так, уравнения для третьих моментов пульсаций скорости и температуры могут быть замкнуты на основе гипотезы Миллионщикова, предполагающей равенство нулю куммулянтов четвертого порядка и представляющей четвертые моменты в виде суммы произведений вторых моментов. Это позволяет получить замкнутое описание движения и теплопереноса дисперсной фазы на уровне уравнений для третьих моментов [41].

С целью упрощения расчетной схемы из системы уравнений для третьих моментов могут быть получены приближенные алгебраические соотношения, выражающие третьи моменты через вторые пульсационные моменты и их производные. Таким образом получается замкнутое описание движения и теплопереноса дисперсной фазы на уровне уравнений для вторых моментов [28, 41].

Дальнейшее упрощение расчетной схемы может быть связано с использованием вместо системы уравнений для вторых моментов пульсаций скорости и температуры одного дифференциального уравнения для турбулентной энергии дисперсной фазы k_p. Для перехода от системы дифференциальных к системе алгебраических уравнений для вторых моментов целесообразно привлечь преобразование Роди [42], получившее широкое распространение для однофазных турбулентных потоков и позволяющее хотя бы в первом приближении учесть анизотропию пульсаций скорости.

Следующий шаг в упрощении расчетной схемы может быть связан с использованием явной квазиизотропной формы для турбулентных напряжений и турбулентного теплового потока (2.3), (2.4). Коэфициент турбулентной вязкости и турбулентное число Прандтля для дисперсной фазы в этих выражениях определяются соотношениями [31, 41]

$$\nu_p = f_u \nu_T + \tau_u k_p / 3, \quad \mathrm{Pr}_p = \frac{(\tau_u + \tau_t)(f_u \nu_T + \tau_u k_p / 3)}{(\tau_u f_{ut} + \tau_t f_{tu})\nu_T / \mathrm{Pr}_T + 2\tau_u \tau_t k_p / 3} \tag{2.5}$$

где ν_T и Pr_T – коэффициент турбулентной вязкости и турбулентное число Прандтля для газовой фазы.

Как видно из (2.5), ν_p и Pr_p зависят от турбулентной энергии частиц k_p, которая в рамках дифференциальных моделей определяется из решения дифференциального уравнения для k_p. При использовании для определения турбулентной энергии частиц следующего из (2.1) локально-однородного соотношения $k_p = f_u k$ получается алгебраическая градиентная модель для расчета переноса импульса и тепла в дисперсной фазе [21]. Следует отметить, что соотношения (2.1), (2.2) следуют из дифференциальных уравнений для вторых моментов пульсаций скорости и температуры при пренебрежении в них членами, описывающими конвективный перенос, диффузию и порождение из осредненного движения, что оправданно только для относительно мелких частиц.

Нелокальные двухжидкостные модели, основанные на уравнениях баланса турбулентной энергии или вторых моментов пульсаций скорости и температуры дисперсной фазы, позволяют рассчитывать различные классы двухфазных течений в широком диапазоне изменения размеров частиц. Апробация этих моделей выполнена

Фиг. 1. Области применения моделей разреженных дисперсных сред

для свободных и пристеночных (струйных и канальных) течений, в том числе закрученных и при наличии зон отрыва и рециркуляции потока. Полученные результаты правильно предсказывают многие экспериментально наблюдаемые эффекты, которые не могли бы быть получены в рамках локальных алгебраических моделей: в частности, существование областей, в которых турбулентная энергия дисперсной фазы превышает турбулентную энергию сплошной фазы. Следует отметить бóльшую актуальность применения уравнений баланса вторых моментов по сравнению с использованием уравнения баланса турбулентной энергии именно для расчета характеристик дисперсной фазы, так как анизотропия пульсаций частиц для многих течений существенно больше, чем анизотропия пульсаций скоростей газа [28].

Гидродинамический расчет двухфазного потока, содержащего мелкодисперсную примесь, может быть выполнен в рамках односкоростного приближения на основе диффузионно-инерционной модели [43, 44]. При $\Omega_u \ll 1$, кроме того, что использование двухжидкостных моделей является нецелесообразным, решение уравнений движения и теплопереноса для дисперсной фазы может быть связано с определенными трудностями, так как они содержат малые параметры τ_u, τ_t перед дифференциальными членами. В этом случае уравнения переноса дисперсной фазы редуцируются к одному уравнению диффузионного типа относительно концентрации частиц, решение которого представляет более простую задачу по сравнению с решением исходной системы уравнений. В предельном случае очень мелких частиц ($\Omega_u \to 0$) это уравнение переходит в обычное уравнение диффузии для пассивного скаляра.

По сравнению с обычной диффузионной моделью диффузионно-инерционная модель позволяет провести расчет распространения мелкодисперсной примеси в турбулентных потоках с учетом ряда инерционных механизмов переноса: турбулентной миграции частиц из областей с высокой степенью турбулентности потока в область с низким уровнем пульсаций в результате взаимодействия с турбулентными вихрями, действия массовых сил и транспорта вследствие отклонения траекторий частиц от линий тока газа при их искривлении и из-за нестационарности потока.

На фиг. 1 представлена схема, отражающая области целесообразности применения рассмотренных выше моделей для разреженной дисперсной среды в зависимости от значения параметра инерционности частиц Ω_u. Передняя стрелка указывает направление изменения Ω_u, в котором применение модели не ограничено, а задняя стрелка обозначает ограничение области справедливости модели. Конечно, приведенная схема достаточно условна и только качественно показывает области применимости моделей. В целом, при $\Omega_u < 1$ имеет смысл применять эйлеров, а при $\Omega_u > 1$ – лагранжев метод моделирования. Однако в зависимости от эффективности и сложности используемой модели область применения каждого из методов может быть существенно сужена или расширена.

3. Обратное влияние частиц на турбулентность. Обратное влияние частиц на характеристики сплошной фазы пропорционально их массовой концентрации M и за исключением случая поверхностно-активных веществ обычно начинает проявляться при M > 0,1. Характер воздействия частиц на структуру турбулентного течения не является однозначным, и в зависимости от инерционности и концентрации частицы могут оказывать как ламинаризирующее, так и турбулизирующее влияние на поток. Так, присутствие относительно мелких частиц ($\Omega_u \leq 1$) в результате тормозящего (демпфирующего) воздействия, связанного с неполнотой их вовлечения в пульсационное движение газа, вызывает дополнительную диссипацию и уменьшение интенсивности турбулентных пульсаций. С ростом параметра Ω_u дополнительная диссипация, обусловленная пульсационным скольжением фаз, снижается и при $\Omega_u \gg 1$ становится несущественной.

Для очень мелких частиц, время релаксации которых сопоставимо с колмогоровским диссипативным масштабом турбулентности, имеет место увеличение диссипации турбулентной энергии вследствие эффекта взаимодействия с высокочастотными мелкомасштабными пульсациями несущего потока [7, 45, 46].

В качестве механизмов генерации турбулентности из-за обратного воздействия дисперсной фазы можно указать дополнительное градиентное порождение турбулентной энергии из осредненного движения и образование нестационарной вихревой структуры вследствие отрыва потока за обтекаемой крупной частицей. Кроме указанных механизмов заметное влияние на распределение турбулентных характеристик сплошной фазы может оказывать также диффузионный турбулентный перенос частиц, обусловленный неравномерностью распределения дисперсной фазы в пространстве. Еще один механизм (очень важный) турбулизации течения, проявляющийся в случае крупных частиц, может быть связан с генерацией возмущений при взаимодействии частиц в результате столкновений [47, 48]. В целом с ростом инерционности частиц наблюдается тенденция смены ламинаризующего влияния частиц на турбулизующее [49].

Для моделирования двухфазных турбулентных течений необходимо построить систему уравнений для сплошной фазы с учетом обратного влияния частиц. Члены, обусловленные присутствием дисперсной примеси, в этих уравнениях могут быть выражены в виде интегралов в фазовом пространстве для ФПВ частиц [50]. На настоящем этапе развития методов моделирования двухфазных турбулентных течений учет обратного влияния дисперсной фазы на турбулентность, как правило, выполняется на основе решения уравнения для турбулентной энергии и скорости ее диссипации.

Источниковые члены в уравнении для вторых моментов пульсаций скорости несущей фазы, обусловленные пульсационным межфазным скольжением и диффузионным переносом частиц, имеют вид

$$A_{ij} = -\frac{M}{\tau_u}[(2\langle u_i' u_j'\rangle - \langle u_i' v_j'\rangle - \langle u_j' v_i'\rangle) + (U_i - V_{ci})V_{dj} + (U_j - V_{cj})V_{di}] \tag{3.1}$$

где $\langle u_i' v_j'\rangle$ – смешанный корреляционный момент пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз, V_{ci} и V_{di} – "конвективная" и "диффузионная" составляющие скорости дисперсной фазы ($V_i = V_{ci} + V_{di}$).

Согласно (3.1) дополнительный член в уравнении баланса турбулентной энергии газа имеет вид [28, 31]

$$A_k = -\frac{M}{\tau_u}[2(k - k_i) + (U_n - V_{cn})V_{dn}] \tag{3.2}$$

где $k_i = \langle u_n' v_n'\rangle / 2$ – турбулентная энергия межфазного взаимодействия.

В рамках локально-однородного приближения смешанный корреляционный момент $\langle u_i' v_j' \rangle$ выражается через рейнольдсовы напряжения сплошной среды аналогично (2.1)

$$\langle u_i' v_j' \rangle = f_u \langle u_i' u_j' \rangle \tag{3.3}$$

Обобщение соотношения (3.3) с целью учета неоднородности течения представлено в [20, 46]. В [28, 51, 52] для расчета $\langle u_i' v_j' \rangle$ и k_i привлекаются дифференциальные уравнения, аналогичные по структуре уравнениям для $\langle v_i' v_j' \rangle$ и k_p.

Определение источникового члена в уравнении для диссипации турбулентной энергии A_ε представляет собой более сложную задачу по сравнению с определением дополнительных членов в уравнениях для вторых моментов и должно основываться на анализе взаимодействия частиц с мелкомасштабными вихрями, ответственными за диссипацию. Однако в большинстве работ, посвященных моделированию двухфазных турбулентных течений, величина A_ε определяется из полуэмпирических соображений на основе аналогии с соответствующим членом в уравнении для турбулентной энергии A_k.

4. Взаимодействие частиц с ограничивающей поток поверхностью. Граничные условия. Характер взаимодействия частиц с поверхностью, естественно, в существенной степени зависит как от свойств дисперсной фазы (твердые частицы или жидкие капли), так и от свойств поверхности (твердая стенка или жидкая пленка). Характеристики взаимодействия твердых частиц с поверхностью – коэффициенты восстановления (потери) импульса и тепла и угол отскока, характеризующие степень упругости (или неупругости) удара, – определяются скоростью и углом удара, шероховатостью поверхности, а также соотношением твердостей соприкасающихся материалов.

При взаимодействии капель с сухой поверхностью в зависимости от их скорости, угла падения и условия смачиваемости может реализовываться как режим растекания, так и квазиупругого отскока. В случае столкновения частиц или капель с жидкой пленкой наблюдается разбрызгивание и выбивание вторичных капель; кроме того, может иметь место срыв капель с гребней волн (динамический унос) вследствие межфазного трения на границе пленки с движущимся газом.

Осаждение частиц на обтекаемую поверхность может происходить под действием различных физических механизмов: инерции частиц, броуновской и турбулентной диффузии, турбулентной миграции в результате взаимодействия частиц с турбулентными вихрями несущего потока, термо- и электрофореза, внешних маасовых сил, поперечных сил за счет сдвига средней скорости несущего потока (сила Сэфмана) и вращения частиц (сила Магнуса) и т.д. При наличии жидкой пленки на стенках следует учитывать возможность ее испарения (или конденсации пара) и обусловленного этим влияние поперечного потока газа (стефановского потока) на осаждение частиц. Адекватное описание взаимодействия частиц со стенкой и определение интенсивности осаждения или уноса важно не только с точки зрения моделирования поведения дисперсной фазы в потоке, но и для предсказания таких явлений как эрозия обтекаемых поверхностей или, напротив, образования на них отложений, а также для расчета параметров жидких пленок.

В результате анализа взаимодействия частиц с ограничиваюшей двухфазный поток поверхностью должны быть сформированы граничные условия для уравнений движения и теплопереноса дисперсной фазы. Более детальное моделирование процесса взаимодействия частиц со стенкой может быть выполнено на основе лагранжевого траекторного подхода. В [5] выполнен анализ расчетов на основе различных стохастических лагранжевых моделей, имитирующих столкновение частиц с шероховатой стенкой. При эйлеровом континуальном моделировании имеет место некоторая потеря информации о деталях взаимодействия частиц с поверхностью при определении параметров дисперсной фазы в пристеночной области в результате суммирования импульсов, энергий и других парамеров падающего и отраженного потоков частиц.

Для построения граничных условий для уравнений движения и тепломассопереноса дисперсной фазы в рамках эйлерово подхода так же, как и при получении граничных условий в теории разреженного газа, необходимо определить ФПВ скорости и температуры частиц в пристеночной области. В [24, 26, 53, 54] граничные условия на твердой стенке находятся на основе решения кинетического уравнения для ФПВ методом малого параметра, а в [25, 30, 55] – с использованием априорно заданной ФПВ в виде δ-функции или бинормального распределения.

Характер взаимодействия частиц с поверхностью в полученных граничных условиях описывается коэффициентом отражения, равным вероятности отскока и возвращения в поток столкнувшейся со стенкой частицы, а также коэффициентами восстановления скорости и температуры. Из этих граничных условий следует, что вследствие динамической и тепловой инерционности на поверхности может иметь место скоростное и температурное скольжение, аналогичное соответствующим явлениям в теории разреженного газа. Кроме того, концентрация частиц даже на полностью поглощающей поверхности, вопреки широко распространенному в литературе мнению, не равна нулю. Пульсационная энергия дисперсной фазы на стенке, несмотря на нулевое значение турбулентной энергии несущего потока на гладкой твердой поверхности, также может быть отлична от нуля. Эффект наличия флуктуаций скорости и температуры дисперсной фазы вблизи стенки объясняется обусловленным инерционностью частиц переносом пульсаций из турбулентной области потока.

С целью упрощения вычислительной процедуры при проведении расчетов сложных течений граничные условия для дисперсной фазы могут быть заданы не на самой стенке, а на некотором расстоянии от нее вне области вязкого подслоя.Такой способ переноса граничных условий со стенки в "логарифмический слой" (метод пристеночных функций) впервые был предложен в [56] и нашел широкое применение в расчетах однофазных турбулентных потоков. В [44] на основе численного решения задачи для простого плоскопараллельного движения двухфазного потока в пристеночной области турбулентного течения предложена аппроксимационная зависимость, связывающая поток осаждающихся частиц J_w с концентрацией частиц в "логарифмическом слое". Эта зависимость (пристеночная функция), учитывающая осаждение частиц под действием броуновской и турбулентной диффузии, турбулентной миграции, конвекции и внешних сил, на полностью поглощающей частицы поверхности представляется в виде

$$J_w = \{\frac{(0{,}115 / \mathrm{Sc}_\mathrm{B}^{3/4} + 2{,}5\cdot 10^{-4}\tau_+^{2,5})u_*}{(1+10^{-3}\tau_+^{2,5})\max[0{,}61;\min(1{,}32-0{,}27\ln\tau_+;1)]} - U_y - \tau_u F_y\}\Phi_1 \qquad (4.1)$$

$$\tau_+ = \tau_u u_*^2 / \nu$$

где u_* – динамическая скорость, Sc_B – число Шмидта для броуновской диффузии, U_y и F_y – компоненты скорости газа и ускорения внешней силы в нормальном направлении. Формула (4.1) справедлива для относительно мелких частиц (при $\tau_+ < 100$) при выборе объемной концентрации частиц Φ_1 в диапазоне изменения расстояния от стенки $30 < y_+ < 100$, где имеет место достаточно слабая зависимость Φ от y.

Актуальной проблемой является построение граничных условий для двухфазного турбулентного течения при образовании на обтекаемой поверхности жидкой пленки. Однако в этом случае существенные трудности возникают не только с формулировкой граничных условий для дисперсной фазы, но и с расчетом турбулентных характеристик несущей фазы, которые должны определяться из решения сопряженной задачи – двухфазный поток-пленка – с учетом влияния образующихся на поверхности пленки волн. Для решения этой задачи целесообразно использовать метод пристеночных функций, в рамках которого эффективным образом можно учесть проявление "волновой шероховатости".

5. Взаимодействие частиц друг с другом. При моделировании движения частиц в разреженных газодисперсных потоках, т.е. при небольшой объемной концентрации дисперсной фазы, основное внимание уделяется взаимодействию частиц с турбу-

лентными вихрями несущего потока, поскольку роль взаимодействия частиц между собой незначительна. С повышением концентрации и размера частиц вклад межчастичных взаимодействий в перенос импульса и энергии дисперсной фазы возрастает. Хаотическое движение частиц, обусловленное их взаимодействием, получило название псевдотурбулентного (чтобы отличить от турбулентного движения частиц, связанного с их вовлечением в турбулентное течение несущего потока). Причиной возникновения псевдотурбулентного движения может явиться как гидродинамическое взаимодействие между частицами, реализуемое посредством обмена импульсом и энергией со случайными полями скорости и давления окружающей среды, так и непосредственное взаимодействие в результате столкновений.

В [47] на основе прямого анализа межчастичных взаимодействий показано, что псевдотурбулентное движение частиц, обусловленное гидродинамическим (бесстолкновительным) механизмом существенно анизотропно, а в случае столкновительного механизма взаимодействия устанавливается изотропное, близкое к максвелловскому распределение пульсаций скорости. С ростом концентрации и размера частиц роль обмена импульсом и энергией между частицами в результате столкновений по сравнению с гидродинамическим взаимодействием возрастает. В [28, 48] учитывается влияние столкновений на перенос импульса дисперсной фазы при относительно небольших объемных концентрациях; причем в [48] рассматривается случай инерционных частиц, когда их взаимодействием с турбулентными вихрями несущего потока можно пренебречь.

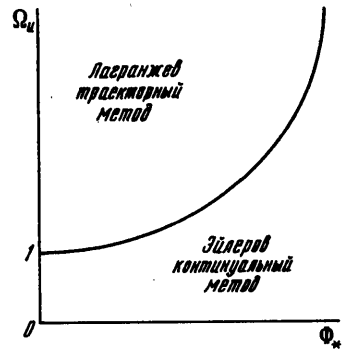
В концентрированных дисперсных средах определяющую роль в формировании статистических свойств системы играют межчастичные столкновения, и теоретический анализ этой проблемы может быть выполнен подобно аналогичной кинетической проблеме для молекулярного движения плотного газа. В [57] построена элементарная теория высококонцентрированных дисперсных систем. В [58] замыкающие соотношения в уравнениях баланса количества движения и пульсационной энергии дисперсной фазы получены на базе анализа динамики процесса соударений и введения ряда феноменологических гипотез. Так как методически моделирование взаимодействия частиц при столкновениях аналогично описанию взаимодействия молекул в кинетической теории газов, то построение системы уравнений движения и тепломассопереноса дисперсных сред целесообразно основывать на уравнении типа уравнения Больцмана. Такие кинетические модели для расчета переноса импульса в высококонцентрированных средах, когда определяющую роль в формирование статистических распределений вносят столкновения, предложены в ряде работ, например [59–62]; при этом для решения уравнения Больцмана для сталкивающихся частиц используется известный метод Энскога в теории плотных газов.

В [63, 64] представлена кинетическая модель, одновременно учитывающая как взаимодействие частиц с турбулентными вихрями несущего потока, так и столкновения друг с другом. Вовлечение частиц в турбулентное движение описывается обобщенным диффузионным оператором Фоккера–Планка в фазовом пространстве координат и скоростей, а межчастичное взаимодействие моделируется интегральным оператором Больцмана в форме Энскога. Решение кинетического уравнения для ФПВ в условиях слабой неравновесности построено методом возмущений: первый член разложения является максвелловским распределением по скоростям, а второй член разложения выражается через комбинацию двух частных решений, одно из которых характеризует взаимодействие частиц с турбулентными вихрями, другое описывает соударения. На основе полученного решения находятся тензор напряжения и коэффициенты вязкости и диффузии пульсационной энергии дисперсной фазы, действительные в широком диапазоне изменения концентрации частиц (от разреженной до плотной). Эффективное время релаксации частиц в результате взаимодействия с окружающей средой и соударений определяется как

$$\tau_{ef} = \frac{\tau_u \tau_c}{\tau_u + \tau_c} \tag{5.1}$$

где характерное время между столкновениями может быть оценено из соотношения

$$\tau_c = \frac{d_p[1-(\Phi/(\Phi_*)^{1/3}]}{k_p^{1/2}\Phi} \qquad (5.2)$$



Фиг. 2. Области применения эйлерова и лагранжева методов моделирования

Здесь d_p – диаметр частиц, Φ_* ~0,6 – предельная объемная концентрация. В разреженной дисперсной среде время между столкновениями намного больше времени релаксации в результате взаимодействия с окружающей средой ($\tau_c \gg \tau_u$); следовательно, $\tau_{ef} \sim \tau_u$ и формирование статистических свойств дисперсной фазы происходит вследствие взаимодействия с турбулентными вихрями несущей фазы, а столкновения влияния не имеют. В высококонцентрированной дисперсной среде, напротив, $\tau_c \ll \tau_u$ и $\tau_{ef} \sim \tau_c$, т.е. решающая роль принадлежит соударениям, а взаимодействием частиц с турбулентными вихрями можно пренебречь.

Как уже отмечалось, вычислительные трудности лагранжевого траекторного моделирования резко возрастают с увеличением концентрации дисперсной фазы. Как правило, это связано с необходимостью одновременного расчета траекторий очень большого числа частиц, участвующих в разыгрываемой ситуации. Эффективный способ устранения этого обстоятельства предложен в [65], где расчет коллектива сталкивающихся частиц заменяется моделированием движения одной частицы с введением вероятности соударений с другими фиктивными (виртуальными) частицами. Однако и в этом случае с увеличением концентрации необходимое количество расчетных траекторий для получения статистически достоверного ансамбля реализаций несомненно должно возрастать. Поэтому область применения эйлерова континуального метода моделирования расширяется с ростом объемной концентрации дисперсной фазы, когда увеличивается частота межчастичных столкновений. Граница между областями целесообразности применения эйлерова и лагранжева методов моделирования может быть оценена из условия

$$\tau_{ef} / T_L \sim 1 \qquad (5.3)$$

При $\tau_{ef}/T_L < 1$ имеет смысл применять эйлеров подход, а при $\tau_{ef}/T_L > 1$ напротив, лагранжев. Изменение значения параметра инерционности Ω_u характеризующего целесообразность применения эйлерова или лагранжева метода моделирования, в зависимости от объемной концентрации дисперсной фазы Φ, в соответствии с соотношениями (5.1)–(5.3), качественно показано на фиг. 2.

В заключение этого параграфа следует подчеркнуть, что численное моделирование высококонцентрированных дисперсных сред представляет собой исключительно сложную задачу, так как такие течения вследствие их гидродинамической неустойчивости, как правило, нестационарны даже при стационарных граничных условиях.

6. Учет полидисперсности частиц и эволюции спектра частиц по размерам. Необходимость расчета полидисперсных систем особенно актуальна при наличии горения, фазовых переходов, дробления, коагуляции и других физических процессов, приводящих к изменению спектра частиц по размерам. Существующие методы учета полидисперсности могут быть подразделены на две группы. К первой группе относятся методы, основанные на определении функции распределения частиц по размерам с расчетом эволюции всей системы частиц в целом. Ко второй группе можно отнести методы, в основе которых лежит разбиение всего спектра частиц на отдельные фракции с последующим расчетом динамики каждой фракции в отдельности.

В рамках первой группы могут быть выделены методы, основанные на непосредственном решении кинетического уравнения для распределения частиц по

размерам, и на решении уравнений для моментов ФПВ. Область применения этих методов ограничена случаем достаточно мелких частиц, скорости и температуры которых не очень сильно отличаются от характеристик несущего газового потока, или в случае достаточно узкого диапазона изменения параметров частиц, т.е. когда осредненные по спектру размеров частиц уравнения движения и тепломассопереноса газодисперсного потока в целом или дисперсной фазы в состоянии адекватно описать эволюцию всей системы частиц. Следует упомянуть, что могут иметь место ситуации, когда система моментных уравнений становится полностью эквивалентной кинетическому уравнению для ФПВ распределения частиц по размерам. Так, получивший широкое распространение для расчета двухфазных течений со спонтанной конденсацией метод моментов дает точное решение задачи, если скорость роста капель не зависит от их размера [66] (что имеет место только в свободномолекулярном режиме). Учет зависимости скорости роста от размера капли приводит к тому, что метод моментов вместо точного становится приближенным и в существенной степени зависит от удачного выбора среднего размера, характеризующего спектр капель в целом [67].

Вторая группа методов является более универсальной и без особенных проблем позволяет получить многоскоростное и многотемпературное описание дисперсной фазы, т.е. учитывать различие фракций по скоростям и температурам. В рамках этой группы могут быть выделены два метода – лагранжев и эйлеров подходы. Лагранжев подход предполагает разбиение всей полидисперсной системы частиц на несколько монодисперсных фракций с изменяющимися в процессе движения размерами. Такой подход естественно сочетается с лагранжевым методом описания динамики частиц, прост в логическом отношении, однако существенно усложняет вычислительную процедуру при наличии процессов, приводящих к изменению числа частиц (например, дробления или коагуляции).

Существенно более эффективным с вычислительной точки зрения является эйлеров метод учета полидисперсности, основанный на разбиении спектра частиц на фракции с фиксированными размерами. Этот метод органично сочетается с эйлеровым описанием движения и тепломассопереноса дисперсной фазы. Теоретическую основу для эйлерова моделирования полидисперсных потоков может составить кинетическое уравнение для ФПВ ансамбля взаимодействующих частиц с переменной массой, описывающее распределение частиц по скоростям, температурам и массам.

Физические процессы, приводящие к изменению спектра частиц по размерам, могут быть как непрерывными (горение, конденсация, испарение), так и дискретными (дробление, коагуляция). Эти процессы описываются соответственно дифференциальными и интегральными операторами по "массовой" координате в фазовом пространстве кинетического уравнения для ФПВ. Появление новых частиц в объеме течения может быть также вызвано явлением зародышеобразования при спонтанной конденсации пара в переохлажденных потоках. Изменение спектра частиц в объеме течения может происходить и при взаимодействии частиц и газового потока с ограничивающими поверхностями (осаждение, дробление, вторичный унос капель с пленки и т.д.). Эти процессы ("граничные эффекты") должны учитываться через соответствующие граничные условия. Обстоятельный анализ физических условий, приводящих к коагуляции или дроблению при взаимодействии частиц друг с другом и с газовым потоком, содержится в [68].

Для расчета процесса коагуляции в турбулентных потоках необходимо определить частоту столкновений частиц в результате их хаотического движения. Для вычисления частоты столкновений (скорости коагуляции) обычно используется один из двух подходов. Один из них основан на вычислении коэффициентов корреляций относительной скорости (и ее производных) двух частиц в однородном изотропном турбулентном потоке в результате решения уравнения движения для частиц, например [69]. Другой подход базируется на диффузионной модели Левича [70], аналогичной модели Смолуховского для броуновской коагуляции. Однако наиболее эффективным методом расчета скорости коагуляции может быть использование кинетического

уравнения для ФПВ относительной скорости двух частиц в турбулентном потоке. В качестве модели для вычисления частоты дробления капель в турбулентном потоке может быть предложена резонансная гипотеза, предполагающая собственную частоту колебаний капли равной частоте турбулентных пульсаций энергоемких вихрей.

7. Влияние турбулентных флуктуаций на гетерогенное горение и фазовые переходы. Изучению механизмов гомогенного горения в турбулентных газовых средах уже многие годы уделяется значительное внимание. В то же время гетерогенные химические реакции и фазовые переходы рассматриваются, как правило, в квазиламинарном приближении, т.е. без учета влияния турбулентных флуктуаций. Однако вследствие возможной сильной нелинейной зависимости скорости этих процессов от параметров окружающей среды (в первую очередь от температуры) влияние турбулентных флуктуаций может быть очень существенным.

В [71–73] выполнено моделирование нестационарных процессов воспламенения и горения одиночных частиц под воздействием флуктуаций параметров внешней среды; при этом случайный характер внешних условий проявляется через пульсации коэффициентов тепло- и массообмена или температуры окружающей среды. Из полученных решений следует возможность реализации механизмов стохастического воспламенения и погасания частиц. В [74] выполнено лагранжево моделирование влияния флуктуаций скорости, температуры и концентрации пара на испарение капли в однородном турбулентном потоке за решеткой.

Для расчета турбулентных течений с горящими частицами или с фазовыми превращениями в рамках эйлерова моделирования необходимо осреднить источниковые члены в континуальных уравнениях, связанные с гетерогенными переходами вещества, по ансамблю реализаций скоростей, температур и концентраций двухфазной среды. Для упрощения процедуры вычислений, как и при расчетах гомогенного горения, могут быть использованы априорно заданные ФПВ в виде нормального распределения, нескольких δ-функций или других простых распределений, зависящих от осредненных значений характеристик дисперсной и непрерывной фаз и их дисперсий. Примеры таких расчетов даны в [67, 75]. Так, учет влияния турбулентных флуктуаций на скорость нуклеации (зародышеобразования) приводит к существенной интенсификации процесса спонтанной конденсации пара в затопленных переохлажденных струях [67]. В [75] установлено заметное сокращение длины зоны воспламенения мелкодисперсного топлива под воздействием турбулентных пульсаций по сравнению с квазиламинарным расчетом.

Следует, однако, отметить, что способ предварительно независимого осреднения скорости горения или фазового перехода по ансамблю турбулентных пульсаций (независимо от распределений температуры, концентраций реагентов и других искомых функций) справедлив для условий, близких к статистически равновесным, когда масштаб турбулентных пульсаций много меньше характерного масштаба химических реакций или фазовых превращений. Поэтому подход, основанный на предварительном осреднении источниковых членов в континуальных уравнениях сохранения, строго говоря, перестает быть справедливым в области фронта пламени или скачка конденсации. Расчет двухфазных течений с химическими реакциями или фазовыми переходами в областях, где масштабы турбулентных флуктуаций и характеристик гетерогенных переходов соизмеримы, представляет собой чрезвычайно сложную задачу и, по-видимому, должен быть основан на решениии кинетического уравнения для ФПВ или прямом интегрировании стохастических уравнений движения и тепломассопереноса.

Заключение. Используемые в настоящее время континуальные двухжидкостные модели нуждаются в дальнейшем развитии как в отношении описания взаимодействия частиц с турбулентными вихрями, так и друг с другом и с ограничивающими поток поверхностями. Эффективным путем такого развития может быть сопоставление с результатами решения кинетического уравнения для ФПВ, а также прямого численного моделирования нестационарных уравнений движения и тепломассо-

переноса. Это позволит определить области достоверности использования различных гипотез замыкания, используемых для построения континуальных уравнений сохранения на уровне первых, вторых, третьих и четвертых моментов, а также проверить точность граничных условий для этих моментных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-012995а) и Международного научного фонда INTAS (грант N94-4348).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squires K.D., Eaton J.K.* Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. N 7. P. 1191–1203.
2. *Elghobashi S.E., Truesdell G.C.* On the interfaction between solid particles and decaying turbulence // Proc. 8 th Symp. on Turbulent Shear Flows. Munich. 1991. P. 7.3.1–7.3.6.
3. *Banerjee S.* Direct similation of multiphase flows // Plenary Lecture on 4th Intern. Conf. in Numer. Methods in Nuclear Engineering. Montreal. 1993.
4. *Berlemont A., Desjonqueser P., Gouebest G.* Particle Lagrangian simulation in turbulent flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1990. V. 16. N 1. P. 19–34.
5. *Sommerfeld M.* Modelling of particle-wall collisions in confined gas-particle flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18. N 6. P. 905–926.
6. *Абрамович Г.Н.* О влиянии примеси твердых частиц или капель на структуры турбулентной газовой струи // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 5. С. 1052–1055.
7. *Буевич Ю.А.* К модели снижения сопротивления при введении частиц в турбулентный поток вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 114–120.
8. *Цой Ён Дон., Чун Мён Кун.* Исследование турбулентного течения в трубе газа с взвешенными твердыми частицами // Теорет. основы инж. расчетов. 1983. Т. 105. № 3. С. 166–172.
9. *Зуев Ю.В., Лепешинский И.А.* Математическая модель двухфазной турбулентной струи // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 69–77.
10. *Баренблатт Г.И.* О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 3. С. 261–274.
11. *Danon H., Wolfshtein M., Hetsroni G.* Numerical calculations of two-phase turbulent round jet // Intern. J. Multiphase Flow. 1977. V. 3. N 3. P. 223–243.
12. *Genchew Z.D., Karpusov D.S.* Effects of the motion of dust particles on turbulence transport equations // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. N 4. P. 833–842.
13. *Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W.* A two-equation turbulence model for two-phase flows // Phys. Fluids. 1983. V. 26. N 4. P. 931–938.
14. *Pourahmadi F., Humphrey J.A.C.* Modeling solid-fluid turbulent flows with application to predicting erosive wear // Phys. Chem. Hydrodyn. 1983. V. 4. N 3. P. 191–219.
15. *Chen C.P., Wood P.E.* Turbulence closure of the dilute gas-particle axisymmetric jet // AIChE Journal. 1986. V. 32. N 1. P. 163–166.
16. *Dobrowolski B.* A computational model for the prediction of two-dimensional nonequilibrium turbulent recirculating two-phase flow//Arch. Mech. 1986. V. 38. N 5/6. P. 611–634.
17. *Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П.* Турбулентные течения газовзвеси. Киев, Наук. думка, 1987. 239 с.
18. *Mostafa A.A., Mongia H.C.* On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus Lagrangian approach // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1987. V. 30. N 12. P. 2583–2593.
19. *Rizk M.A., Elghobashi S.E.* A two-equation turbulence model for dispersed dilute confined two-phase flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. N 1. P. 119–133.
20. *Derevich I.V., Yeroshenko V.M., Zaichik L.I.* Hydrodynamics and heat transfer of turbulent gas suspension flows in tubes. 1. Hydrodynamics, 2. Heat transfer // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1989. V. 32. N 12. P. 2329–2350.
21. *Винберг А.А., Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Модель расчета турбулентных газодисперсных струйных течений // Инж.-физ. ж. 1991. Т. 61. № 4. С. 554–563.

22. *Милоевич Д., Солоненко О.П., Крылов Г.М.* Сравнительный анализ некоторых моделей турбулентного переноса инерционных частиц // Процессы переноса в одно- и двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 1986. С. 70–80.
23. *Zhou L., Huang X.* Particle turbulent energy transport equation in suspension two-phase flow // Front. Fluid Mech.: Proc. Beijing Int. Conf. Fluid Mech. Beijing, 1987. Oxford, 1988. P. 791–793.
24. *Деревич И.В., Зайчик Л.И.* Осаждение частиц из турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 96–104.
25. *Кондратьев Л.В., Шор В.В.* Исследование турбулентного течения газовзвеси в трубе с учетом соударения со стенкой и вращения частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 56–64.
26. *Деревич И.В., Ерошенко В.М.* Расчет осредненного скоростного скольжения фаз при турбулентном течении дисперсных потоков в каналах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 69–78.
27. *Гусев И.Н., Зайчик Л.И.* Моделирование динамики частиц в пристеночной области газодисперсного турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 50–60.
28. *Simonin O.* Second-moment prediction of dispersed phase turbulence in particleladen flows // Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows. Munich. 1991. P. 7.4.1–7.4.6.
29. *Zhou L.X., Li R.X., Yuan O.C.* Particle-fluid turbulence in threedimensional recirculating gas-particle flows // Proc. Intern. Conf. on Multiphase Flows. Tsukuba. 1991. P. 555–558.
30. *Гусев И.Н., Гусева Е.Н., Зайчик Л.И.* Модель осаждения частиц из турбулентного газодисперсного потока в каналах с поглощающими стенками // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 58–65.
31. *Винберг А.А., Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Расчет переноса импульса и тепла в турбулентных газодисперсных струйных течениях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 3. С. 69–80.
32. *Деревич И.В.* Расчет турбулентного течения газовзвеси частиц, интенсивно взаимодействующих со стенками канала ПМТФ. 1992. № 6. С. 73–81.
33. *Винберг А.А., Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Расчет двухфазных закрученных струйных потоков // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. № 1. С. 71–78.
34. *Зайчик Л.И., Козелев М.В., Першуков В.А.* Расчет турбулентных газодисперсных течений в каналах с зонами рециркуляции // Изв. АН СССР. МЖГ 1994. № 4. С. 65–75.
35. *Buyevich Yu.A.* Statistical hydromechanics of disperse systems. Pt. 1. Physical background and general equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. N 3. P. 489–507.
36. *Крошилин А.Е., Кухаренко В.Н., Нигматулин Б.И.* Осаждение частиц на стенку канала в градиентном турбулентном дисперсном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 57–63.
37. *Ватажин А.Б., Клименко А.Ю.* Континуальные модели движения инерционных частиц в ламинарном и турбулентном потоках, основанные на уравнениях Фоккера – Планка // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. № 2. С. 27–35.
38. *Деревич И.В., Зайчик Л.И.* Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // ПММ. 1990. Т. 54. № 5. С. 767–774.
39. *Reeks M.W.* On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. N 3. P. 446–456.
40. *Reeks M.W.* On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. N 6. P. 1290–1303.
41. *Зайчик Л.И.* Модели турбулентного переноса импульса и тепла в дисперсной фазе, основанные на уравнениях для вторых и третьих моментов пульсаций скорости и температуры частиц // Инж.-физ. ж. 1992. Т. 63. № 4. С. 404–413.
42. *Rodi* W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. Bd. 56. H. 3., Sonderh. P. 219–221.
43. *Винберг А.А., Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Диффузионно-миграционное описание распространения мелкодисперсной примеси в турбулентной струе // Инж.-физ. ж. 1990. Т. 59. № 4. С. 609–614.
44. *Гусев И.Н., Зайчик Л.И.* Численное моделирование двухфазных турбулентных течений в топочных камерах // ПМТФ. 1992. № 2. С. 116–122.
45. *Деревич И.В.* Спектр пульсаций скорости газа с частицами при однородной изотропной турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 69–74.

46. *Деревич И.В., Ерошенко В.М., Зайчик Л.И.* Течение и теплообмен мелкодисперсных турбулентных потоков в каналах // Инж.-физ. ж. 1987. Т. 53. № 5. С. 740–751.
47. *Koch D.L.* Kinetic theory for a monodisperse gas-solid suspension // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. N 10. P. 1711–1723.
48. *Louge M.Y., Mastorakos E., Jenkins J.T.* The role of particle collisions in pneumatic transport // J. Fluid Mech. 1991. V. 213. P. 345–359.
49. *Hetsroni G.* Particle-turbulence interfaction // Intern. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. N 5. P. 735–746.
50. *Деревич И.В.* Влияние примеси крупных частиц на турбулентные характеристики газовзвеси в каналах // ПМТФ. 1994. Т. 2. С. 70–78.
51. *Simonin O., Deutsch E., Minier J.P.* Eulerian prediction of the fluid / particle corrrelated motion in turbulent two-phase flows // Appl. Scient. Res. 1993. V. 51. N 1/2. P. 275–283.
52. *Zhou L.X.* Two-fluid models for turbulent combusting gas-particle flows using a unified second-order moment closure // Proc. 2nd Intern. Conf. on Multiphase Flow. Kyoto. 1995. V 1. P. CO-21– CO-26.
53. *Деревич И.В., Зайчик Л.И.* Граничное условие для уравнения диффузии частиц в неоднородном потоке // Инж.-физ. ж. 1988. Т. 55. № 5. С. 735–739.
54. *Деревич И.В., Ерошенко В.М.* Граничные условия для уравнений тепло- и массопереноса грубодисперсных аэрозолей в турбулентном потоке // Инж.-физ. ж. 1991. Т. 61. № 4. С. 546–553.
55. *Волков Э.П., Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Моделирование горения твердого топлива. М.: Наука, 1994. 320 с.
56. *Launder B.E., Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flows // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1974. V. 3. N 2. P. 269–289.
57. *Гольдштик М.А., Козлов Б.Н.* Элементарная теория концентрированных дисперсных систем // ПМТФ. 1973. № 4. С. 67–77.
58. *Рохман Б.Б., Шрайбер А.А.* Математическое моделирование аэродинамики и физико-химических процессов в надслоевом пространстве топки с циркулирующим кипящим слоем. I. Постановка задачи. Основные уравнения аэродинамики. II. Взаимодействие частиц (псевдотурбулентность), III. Граничные условия. Некоторые численные результаты // Инж.-физ. ж. 1993. Т. 65. № 5. С. 521–526; 1994. Т. 66. № 2. С. 159–167; 1994. Т. 66. № 6. С. 681–688.
59. *Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurniy N.* Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow an slightly inelastic particles in a general flow-field // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. C. 223–256.
60. *Ding J., Gidaspow D.* A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow // AIChE Journal. 1990. V. 36. N 4. P. 523–538.
61. *Буевич Ю.А., Рубцов А.Г.* К теории грубодисперсного псевдоожиженного слоя // Инж.-физ. ж. 1992. Т. 63. N 4. С. 414–424.
62. *Буевич Ю.А.* Гидродинамическая модель дисперсного потока // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 1. С. 79–87.
63. *Зайчик Л.И.* Кинетическая модель переноса частиц в турбулентных потоках с учетом соударений // Инж.-физ. ж. 1992. Т. 63. № 1. С. 44–50.
64. *Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Моделирование движения частиц в турбулентном потоке с учетом соударений // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 62–78.
65. *Sommerfeld M., Zivkovič G.* Recent advances in the numerical simulation of pneumatic conveying through pipe systems // Computational Methods in Applied Sciences. Amsterdam, etc.: Elsevier, 1992. P. 201–212.
66. *Стернин Л.Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
67. *Ватажин А.Б., Клименко А.Ю., Лебедев А.Б., Сорокин А.А.* Гомогенная конденсация в турбулентных затопленных изобарических струях //Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 43–52.
68. *Стернин Л.Е., Шрайбер А.А.* Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
69. *Yuu S.* Collision rate of small particles in a homogeneous and isotropic turbulence // AIChE Journal. 1984. V. 30. N 5. P. 802–807.
70. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 599 с.

71. *Буевич Ю.А., Федотов С.П.* Формирование режимов гетерогенной реакции под воздействием мультипликативного шума // Инж.-физ. журн., 1987. Т. 53. № 5. С. 802–807.
72. *Федотов С.П., Третьяков М.В.* О стохастическом воспламенении частицы // Хим. физика. 1991. Т. 10. № 2. С. 238–241.
73. *Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Влияние флуктуаций температуры на гетерогенное горение частиц // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 61. № 4. С. 533–539.
74. *Berlemont A., Grancher M.-S., Gouesbet G.* On the Lagrangian simulation of turbulence influence on droplet evaporation // Inter. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 34. N 11. P. 2805–2812.
75. *Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Горение мелкодисперсного твердого топлива в турбулентном потоке // Физика горения и взрыва. 1990. № 5. С. 42–52.

Москва

Поступила в редакцию
5.VI.1995