

УДК 533.6.011.5

© 1996 г. В.Н. ГОЛУБКИН

О ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КОНИЧЕСКИХ V-ОБРАЗНЫХ КРЫЛЬЕВ

Изложены результаты теоретических и экспериментальных исследований обтекания треугольных крыльев с V-образной формой поперечного сечения гиперзвуковым потоком газа. Особое внимание уделено изучению и классификации возможных схем конического течения около наветренной поверхности методом тонкого ударного слоя. Даны решения для случаев присоединенного и отошедшего от передних кромок скачка уплотнения. Показано, что для V-образного крыла появляются качественно новые по сравнению с плоским крылом схемы обтекания.

1. Как известно, при заданном числе Маха набегающего сверхзвукового потока $M_\infty > 1$, показателе адиабаты κ и угле атаки α , а также определенном сочетании геометрических параметров V-образного треугольного крыла (угол при вершине 2φ , угол раскрытия γ) может существовать так называемый расчетный режим обтекания с присоединенным скачком уплотнения, лежащим в плоскости передних кромок [1, 2]. В этом случае имеется точное решение, описывающее обтекание крыла равномерным потоком за плоским скачком с постоянным давлением на крыле. Такое крыло называется волнолетом.

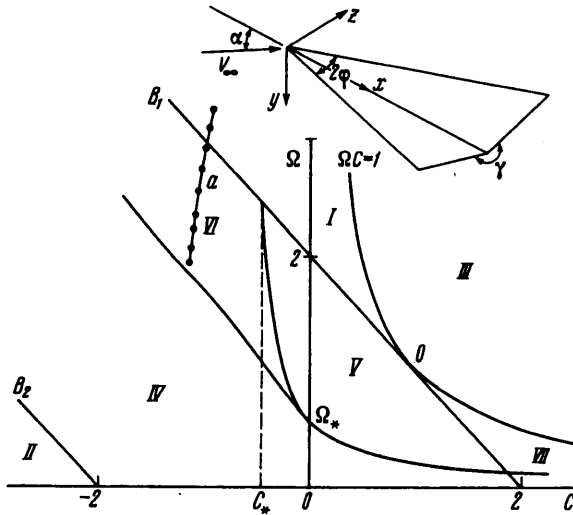
При отклонении какого-либо из определяющих параметров от расчетного значения возникает более сложное пространственное обтекание. Будем считать, что головной скачок уплотнения присоединен к вершине крыла, и рассмотрим коническое течение около наветренной поверхности с присоединенным или отсоединенным от передних кромок скачком. С целью получения результатов в обозримой форме воспользуемся приближенным аналитическим методом тонкого ударного слоя [3, 4]. Полагая угол V-образности $\Psi = (\pi - \gamma)/2$ достаточно малым, в качестве основного малого параметра ε используем обратное отношение плотностей на плоском скачке уплотнения с углом α к набегающему потоку, служащее мерой степени сжатия газа в тонком ударном слое около крыла

$$\varepsilon = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \frac{2}{(\kappa + 1)M_\infty^2 \sin^2 \alpha}$$

Чтобы в рамках единой теории описать оба упомянутых выше положения головного скачка, следует считать, что углы φ , Ψ по порядку величины совпадают с углом Маха в сжатом слое и при $\varepsilon \rightarrow 0$ остаются конечными параметрами подобия

$$\Omega = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha}, \quad C = \frac{\operatorname{tg} \Psi}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (1.1)$$

Если $C > 0$, то форма поперечного сечения крыла Λ -образная, если $C < 0$ – V-образная. В результате исходная многопараметрическая задача становится двухпараметрической, что облегчает анализ и классификацию возможных схем обтекания.



Фиг. 1. Схематическое изображение крыла и классификация режимов обтекания в зависимости от параметров подобия C, Ω

Свяжем с крылом прямоугольную декартову систему координат, начало которой совместим с его вершиной, ось x направим вдоль ребра крыла, ось y – в сторону нижней поверхности, ось z – по размаху (фиг. 1). В соответствии с (1.1) для описания конического течения между головным скачком и нижней поверхностью крыла перейдем к приведенным коническим переменным

$$\eta = \frac{y}{x \varepsilon \operatorname{tg} \alpha}, \quad \zeta = \frac{z}{x \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha} \quad (1.2)$$

Уравнением поверхности V -образного крыла будет $\eta = C|\zeta|$, $|\zeta| \leq \Omega$. Уравнение искомой поверхности головного скачка уплотнения около нижней поверхности крыла $\eta = \eta_s(\zeta)$, $|\zeta| \leq \Omega$. Подлежащие определению размерные компоненты вектора скорости u^0 , v^0 , w^0 , давление p^0 и плотность ρ^0 представим в виде

$$u^0 = V_\infty (\cos \alpha + \varepsilon u \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha)$$

$$v^0 = V_\infty \varepsilon v \sin \alpha, \quad w^0 = V_\infty \sqrt{\varepsilon} w \sin \alpha$$

$$p^0 = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 (1 + \varepsilon p) \sin^2 \alpha, \quad \rho^0 = \rho_\infty \varepsilon$$

где индексом ∞ отмечены параметры набегающего потока. Безразмерные функции u , v , w , p зависят от координат η , ζ и параметров подобия Ω , C . Исходя из точной формулировки краевой задачи на основе уравнений Эйлера, в первом приближении по ε для их определения получим следующие уравнения и краевые условия:

$$(v - \eta)v_\eta + (w - \zeta)v_\zeta = -p_\eta$$

$$(v - \eta)w_\eta + (w - \zeta)w_\zeta = 0 \quad (1.3)$$

$$v_\eta + w_\zeta = 0$$

$$\eta = \eta_s(\zeta): \nu_s = \eta_s - \zeta\eta'_s - \eta_s'^2 - 1, \quad w_s = -\eta'_s \quad (1.4)$$

$$p_s = 2(\eta_s - \zeta\eta'_s) - \eta_s'^2 - 1$$

$$\eta = C|\zeta|: \nu - \eta = C(w - \zeta)\text{sign } \zeta \quad (1.5)$$

Приближенные уравнения (1.3) сохраняют свойство нелинейности полных уравнений Эйлера. В то же время внесенные упрощения позволяют получить аналитическое решение задачи [4, 5]. С этой целью используется переход к переменным Мизеса ζ, ψ , где функция ψ постоянна вдоль конических проекций поверхностей тока на плоскость $x = \text{const}$ и принимается равной координате ζ точки ее входа в ударный слой. Тогда второе уравнение (1.3) дает $w = \dot{w}(\psi)$, остальные уравнения также интегрируются, и в результате удовлетворения краевым условиям задача сводится к нахождению формы скачка уплотнения. После этого распределение давления и скоростей находится в квадратурах.

На крыле с отсоединенным скачком функция тока $\psi_b(\zeta)$ переменна [4], тогда как в случае присоединенного скачка [5] на прилегающей к кромке и совпадающей с поверхностью тока части крыла $\psi = \text{const}$, а в корневой части $\psi_b(\zeta)$ переменна и согласно условию непротекания является обратной к функции $w(\psi) = -\eta'_s(\psi)$.

При отсутствии скольжения течение симметрично относительно плоскости $z = 0$, так что будем рассматривать задачу в области $z \geq 0$.

2. Форма присоединенного скачка определяется следующим образом. В консольной части, где на крыле $\psi_b = \text{const}$, кривизна поверхностей тока совпадает с кривизной V-образного крыла [5], которая равна нулю. Отсюда следует уравнение

$$\eta_s''[1 - (\eta'_s + \zeta)^{-2}] = 0 \quad (2.1)$$

В случае переменной $\psi_b(\zeta)$ имеем

$$\eta_s''[1 - (\eta'_s + \zeta)^{-2}] = \psi_b'(\psi_b - \zeta)^{-2}, \quad -\eta'_s[\psi_b(\zeta)] = \zeta \quad (2.2)$$

Краевыми условиями будут условия присоединения скачка к передней кромке ($\zeta = \Omega$), которая обтекается как скользящий клин, и условие симметрии ($\zeta = 0$)

$$\eta_s(\Omega) = \Omega C, \quad \eta'_s(\Omega) = -w_c, \quad \psi_b(\Omega) = \Omega, \quad \eta'_s(0) = 0 \quad (2.3)$$

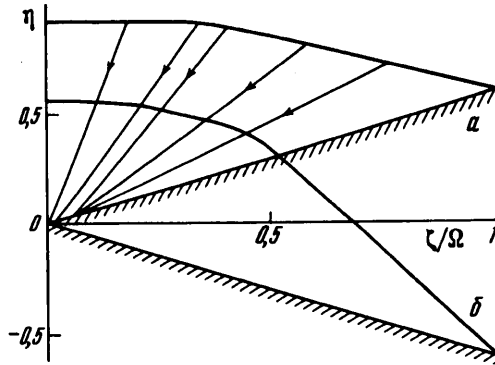
Наклон проекции поверхности тока, пересекающей кромку, равный согласно (1.3)

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\nu - \eta}{w - \zeta} \quad (2.4)$$

должен совпадать с наклоном поверхности крыла $d\eta/d\zeta = C$. Выражая в (2.4) скорости ν, w через форму скачка по формулам (1.4), а координаты η, ζ – по (2.3), и решая получающееся квадратное уравнение, получаем величину w_c

$$w_c = \frac{1}{2}[\Omega - C \pm \sqrt{(\Omega + C)^2 - 4}] \quad (2.5)$$

Полученная двузначность отражает принципиальную возможность существования присоединенного скачка, принадлежащего слабому (нижний знак) или сильному (верхний знак) семейству. Согласно (2.5) скачок присоединен к кромкам, если $|\Omega + C| \geq 2$. В плоскости параметров подобия C, Ω – это область вне полосы, ограниченной прямыми $B_1: \Omega = 2 - C$ и $B_2: \Omega = -2 - C$ (фиг. 1). Расчетный режим обтекания с плоским скачком, проходящим через кромки ($w_c = 0$), соответствует



Фиг. 2. Формы присоединенного скачка уплотнения и поверхностей тока около нижней поверхности крыла (заштрихована) при $\Omega = 3$, $C = 0,2$ (а) и $C = -0,2$ (б)

$\Omega C = 1$ и изображается гиперболой, касающейся границы B_1 в точке O с координатами $C = \Omega = 1$ (фиг. 1). Из (2.5) следует, что выше этой точки расчетный плоский скачок относится к слабому семейству, ниже – к сильному.

Уравнение (2.1) имеет тот же вид, что в случае плоского крыла ($C = 0$). С использованием метода, предложенного в [6, 7] для плоского крыла, было получено решение для V -образных крыльев в области параметров I между гиперболой и границей B_1 . Большая часть скачка ($w_c < \zeta \leq \Omega$) описывается простыми аналитическими решениями уравнения (2.1), принадлежащими двум семействам

$$\eta'_s = \text{const}, \quad \eta'_s = 1 - \zeta \quad (2.6)$$

Эта часть скачка имеет гладкую форму и состоит из двух плоских участков (первое решение (2.6)) с разным наклоном, сопрягающихся посредством параболического скачка (второе решение (2.6)). Включение последнего необходимо для того, чтобы удовлетворить в конечном счете условию симметрии (2.3) исходя из которого и находится длина параболического участка $\Delta(\Omega, C)$. Для поперечного потока за параболическим скачком местное число Маха $M = |w - \zeta| = 1$. Для разных значений Ω, C эти участки скачка отличаются лишь длиной Δ и эквидистантным сдвигом в вертикальном направлении и могут быть совмещены друг с другом путем параллельного переноса, т.е. стабилизация формы скачка в конической транзвуковой области [8] имеет место и для V -образных крыльев.

В корневой части крыла ($0 < \zeta < w_c$) скачок строится путем численного решения уравнений (2.2) на последовательности отрезков, причем на каждом последующем отрезке функция тока $\psi_b(\zeta)$ находится обращением функции $w(\psi)$, полученной на предыдущем отрезке. Так, на первом отрезке, куда приходят поверхности тока, прошедшие через параболический скачок, имеем $\psi_b(\zeta) = \zeta - 1$. Сопряжение отдельных решений происходит с изломом скачка и поверхностей тока. Природа возникающих особенностей проанализирована в [9] методом сращиваемых асимптотических разложений и связана с существованием неоднородностей течения и неравномерным растяжением исходной области при переходе к приведенным координатам (1.2).

Если величины $\Omega, |C|$ не слишком велики, то скачок уплотнения в целом имеет выпуклую форму как для $C < 0$, так и $C > 0$. На фиг. 2 показаны формы скачка при обтекании крыльев с $\Omega = 3, C = \pm 0,2$. Форма проекций поверхностей тока $\psi = \text{const}$, определяемая как

$$\eta = C\zeta - \int_{\psi_b}^{\psi} \frac{\eta'_s(\psi_1) + \zeta}{\psi_b [\eta'_s(\psi_1) + \psi_1]^2} d\psi_1$$

и показанная на фиг. 2 кривыми со стрелками для $C = 0,2$, в целом характеризуется стеканием потока к плоскости симметрии.

Вместе с тем, применение данного метода в области II левее границы B_2 (фиг. 1), где отношение $|C|/\Omega$ достаточно велико, наталкивается на определенные трудности, о которых упоминалось и в [10].

При конечных значениях углов φ , Ψ в поле течения вне плоскости симметрии могут возникнуть дополнительные линии стекания, а в области III правее расчетной гиперболы (фиг. 1) скачок может иметь в целом вогнутую мостообразную форму с образованием тройных маховских конфигураций [11, 12].

3. Если параметры подобия C , Ω таковы, что $|\Omega + C| < 2$ (полоса между прямыми B_1 и B_2 на фиг. 1), то действительных решений (2.5) не существует и головной скачок отсоединен от передних кромок. Его форма в этом случае описывается решением задачи относительно функции $w = -\eta'_s$

$$w'[w(\psi)]w'(\psi)[\{w[w(\psi)] - w(\psi)\}^{-2} - 1] = [w(\psi) - \psi]^{-2} \quad (3.1)$$

$$w(0) = 0, \quad w(\Omega) = 1 + \Omega \quad (3.2)$$

По-видимому, приемлемую полноту и точность решения этой задачи в отличие от более ранних работ (см. обзор [13]) можно получить, обобщив адаптивный численный метод, разработанный в [14] для плоских крыльев и использующий получаемую информацию о структуре поверхностей тока.

Вместо краевой задачи для уравнения (3.1) будем решать задачу Коши с начальными условиями при $\zeta = 0$, заменив второе условие (3.2) на условие $w'(0) = b$. Соответствие между величиной параметра b , характеризующего поперечную кривизну скачка в плоскости симметрии, и приведенным полуразмахом Ω (при фиксированном C) устанавливается в процессе решения исходя из условия (3.2) на кромке при $\zeta = \Omega$. Согласно условию непротекания, поверхность крыла в данном случае является огибающей поверхностей тока, которые подходят к ней по касательной и оканчиваются в точках, определяемых значением боковой компоненты скорости $\zeta_b(\psi) = w(\psi)$.

Вследствие наличия функциональных связей в (3.1) для инициализации численного решения воспользуемся локальным аналитическим решением для формы скачка в окрестности плоскости симметрии ($\psi \ll 1$) в виде ряда, коэффициенты которого находятся из интегрального аналога уравнения (3.1)

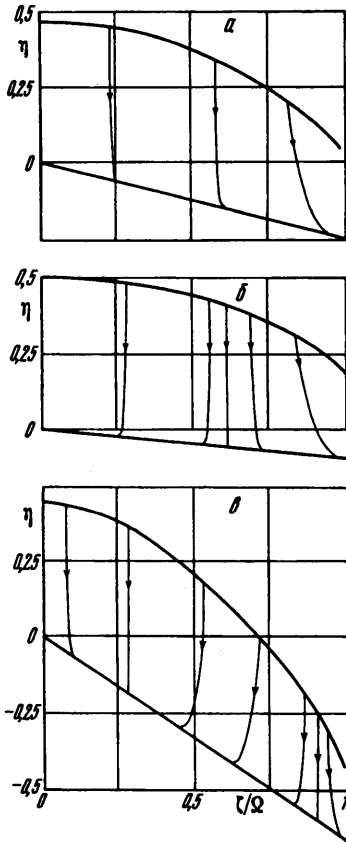
$$w(\psi) = b\psi - ab^2\psi^2 + (1+a^2)b^3\psi^3 + \dots$$

$$a = \frac{C(b-1)^3}{b(2b \ln b + 1 - b^2)}$$

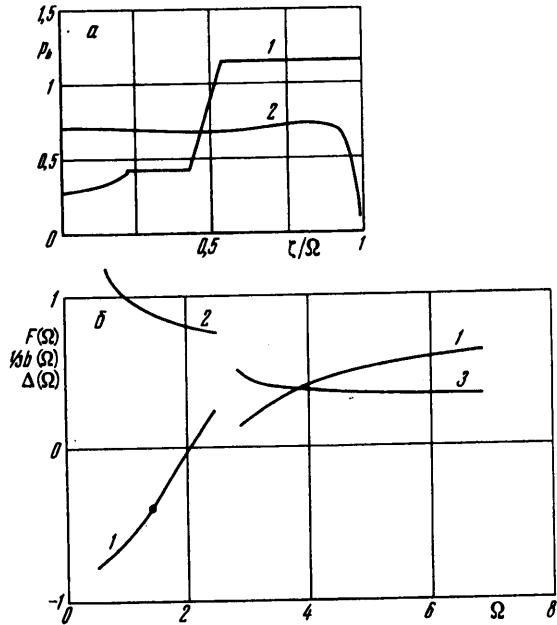
Проекция поверхности тока с данным ψ входит в ударный слой при $\zeta = \psi$, а оканчивается на крыле при $\zeta = w(\psi)$. Поэтому вблизи плоскости симметрии происходит растекание поперечного потока, если $b > 1$ ($\Omega < \Omega_*(C)$), и стекание, если $b < 1$ ($\Omega_*(C) < \Omega < 2 - C$). В области растекания (3.1) рассматривается как уравнение относительно $w[w(\psi)]$, а в области стекания – относительно $w(\psi)$. Формы проекций поверхностей тока $\psi = \text{const}$ и скачка уплотнения даются уравнениями

$$\eta = \eta_s(\zeta) - \int_{\psi}^{\zeta} \frac{w(\psi_1) - \zeta}{\psi [w(\psi_1) - \psi_1]^2} d\psi_1 \quad (3.3)$$

$$\eta_s(\zeta) = \Delta_0 - \int_0^{\zeta} w(\psi) d\psi, \quad \Delta_0 = \frac{b \ln b + 1 - b}{(1-b)^2}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Формы отсоединенного скачка уплотнения и поверхностей тока при $\Omega = 0,855$, $C = -0,3$ (а), $\Omega = 0,73$, $C = -0,1$ (б), $\Omega = 1,341$, $C = -0,5$ (в)

Фиг. 4. а – распределение давления на крыле с присоединенным (1) и отсоединенным (2) скачком; б – зависимости от параметра Ω функции подобия $F(\Omega)$ (кривые 1), приведенной кривизны отсоединенного скачка в плоскости симметрии $b(\Omega)$ (кривая 2) и длины параболической зоны присоединенного скачка $\Delta(\Omega)$ (кривая 3) при $C = -0,75$.

Как следует из численного решения [14], для плоского крыла первый из указанных выше случаев соответствует схеме поперечного течения с линией растекания в плоскости симметрии, а во втором случае наряду с линией стекания в плоскости симметрии возникает дополнительная вертикальная линия растекания $\zeta = w(\zeta)$. При близких к единице значениях $b < 1$ она расположена вблизи плоскости симметрии и с уменьшением b быстро смещается к передней кромке. Найденное уточненное значение $\Omega_* = 0,565$.

Параметрические численные расчеты показали, что такие же схемы течения возможны и для V-образных крыльев как при $C > 0$, так и при $C_* < C < 0$, $C_* = -0,462$ (см. фиг. 3, а: $\Omega = 0,855$, $C = -0,3$, фиг. 3, б: $\Omega = 0,73$, $C = -0,1$). В плоскости C, Ω им отвечают области IV, V соответственно (фиг. 1). Для V-образного крыла с $C < C_*$ схема V не реализуется. Вместе с тем оказалось, что растекание потока в окрестности плоскости симметрии не всегда влечет за собой течение такого типа в целом (схема IV). Получена и более сложная схема течения VI, в которой на некотором расстоянии от плоскости симметрии образуется дополнительная линия стекания, а затем ближе к

передней кромке – еще одна линия растекания (фиг. 3, в: $\Omega = 1,341, C = -0,5$). Такая возможность отмечалась в [15], но само решение не было получено.

Значения параметров C, Ω , при которых реализуется эта новая схема течения, принадлежат области VI на фиг. 1. При $C > C_*$ она является промежуточной между схемами IV и V, а при $C < C_*$ – между схемой IV и обтеканием с присоединенным скачком. Граница областей IV и VI с хорошей точностью аппроксимируется линейной зависимостью $\Omega = \Omega_* - 1,124 C$. Возникновение дополнительных вертикальных линий стекания (растекания), входящих в ударный слой и оканчивающихся на крыле при одном и том же значении координаты ζ ($w(\zeta) = \zeta$), означает появление особенностей в уравнении (3.1). Для проведения расчета с переходом через эти особые точки предусмотрен специальный алгоритм [14]. Достоверность результатов, полученных методом тонкого ударного слоя, подтверждается численными решениями полных уравнений Эйлера, согласно которым схема течения VI возможна для треугольных крыльев с круговым [16] и, по-видимому, треугольным [17] поперечным сечением.

Еще одной интересной особенностью, обнаруженной в расчетах, оказался своеобразный «туннельный эффект»: при $C > 0$ обтекание крыла с отсоединенным скачком оказывается возможным в области VII (фиг. 1) правее границы B_1 , где формально должен был бы существовать присоединенный скачок сильного семейства. Этот факт отмечался в экспериментах [18, 19] и теперь получил теоретическое подтверждение.

Таким образом, классификация [10] дополнена данными о различных схемах обтекания V-образного крыла с отсоединенным скачком, включая новую по сравнению с плоским крылом схему VI (фиг. 1). Это весьма важно для практики, ибо появление линий стекания и растекания может повлечь увеличение местных тепловых потоков к поверхности.

4. Важным результатом приближенной теории тонкого ударного слоя являются законы подобия, дающие корреляции аэротермодинамических характеристик по параметрам подобия C, Ω . В частности, коэффициент нормальной силы подчиняется закону подобия

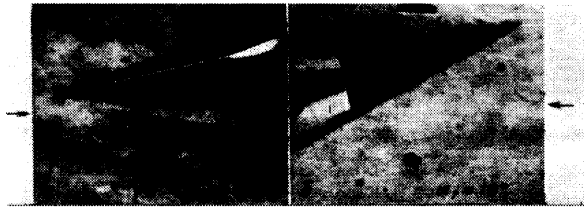
$$\frac{c_N - 2 \sin^2 \alpha - 2 / \kappa M_\infty^2}{\varepsilon \sin^2 \alpha} = F(\Omega, C) = \frac{2}{\Omega} \int_0^\Omega p_b(\zeta, \Omega, C) d\zeta$$

Распределение давления на поверхности крыла $p_b(\zeta)$ выражается через найденную форму скачка уплотнения

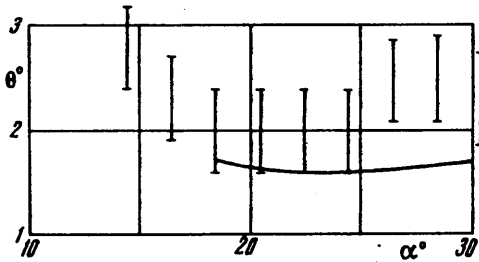
$$p_b(\zeta) = 2(\eta_s - \zeta \eta'_s) - \eta_s^2 - 1 - \eta_s''(\zeta) \left[1 - \frac{1}{(\eta'_s + \zeta)^2} \int_{\psi_b}^\zeta \frac{[\eta'_s(\psi) + \zeta]^3}{[\eta'_s(\psi) + \psi]^2} d\psi \right]$$

За прямолинейными участками (присоединенного) скачка давление постоянно поперек ударного слоя.

Характерные эпюры давления для режимов обтекания с присоединенным ($\Omega = 3, C = -0,75$) и отсоединенным ($\Omega = 0,847, C = 0,3$) скачком показаны на фиг. 4, а кривыми 1, 2. На фиг. 4, б, кривыми 1 представлен график функции подобия $F(\Omega)$ при $C = -0,75$ в широком диапазоне изменения параметра Ω , охватывающем оба эти характерных режима обтекания. Ступенчатый разрыв на границе связан с кардинальным изменением структуры течения при переходе от одного режима к другому, а также с понижением точности численного расчета течения с отошедшим скачком при $\Omega \rightarrow 2 - C$. Точкой отмечено место перехода от схемы обтекания IV к схеме VI, происходящего непрерывным образом. Кривыми 2, 3 на фиг. 4, б, так же при $C = -0,75$ показаны зависимость кривизны отсоединенного скачка уплотнения в центре $b(\Omega)$ ($\Omega < 2,75$) и зависимость длины параболической зоны присоединенного скачка $\Delta(\Omega)$ ($\Omega > 2,75$), полученные при решении соответствующих задач (см. разделы 3, 2).



Фиг. 5. Теплеровские фотографии картин обтекания в плоскости симметрии пирамидального треугольного крыла в случае плоской (а) и V-образной (б) наветренной поверхности: а – $\alpha_1 = -10^\circ$; б – $\alpha_1 = 10^\circ$



Фиг. 6. Сравнение теоретических и экспериментальных данных по угловому расстоянию между скачком уплотнения и ребром крыла

5. В гиперзвуковой аэродинамической трубе ЦАГИ проведена визуализация формы скачка уплотнения в плоскости симметрии крыла, имеющего вид треугольной пирамиды с углами $\varphi = 27,5^\circ$, $\gamma = 232,8^\circ$. Эксперимент проводился при числе Маха $M_\infty = 8$, числе Рейнольдса по длине модели $Re \approx 10^6$.

Теплеровские фотографии картины обтекания при углах атаки $\alpha_1 = \pm 10^\circ$, отсчитываемых от большей плоской грани крыла, показаны на фиг. 5. Сильно сжатый ударный слой имеет вид узкой темной области. Светлая полоса вблизи крыла – гиперзвуковой пограничный слой, в котором плотность значительно ниже. На ребре крыла с наветренной стороны (фиг. 5, б) погранслоем вследствие поперечного растекания потока существенно тоньше, чем на наветренной плоской поверхности (фиг. 5а), так что его можно не учитывать и считать весь ударный слой невязким. Прямолинейность присоединенного к вершине головного скачка уплотнения (внешняя граница ударного слоя) свидетельствует о коническом характере обтекания. На фиг. 1 кривой а показаны значения параметров подобия C , Ω для условий эксперимента при разных углах атаки. Эта кривая частично расположена в области присоединения скачка, частично в области VI, соответствующей новой схеме обтекания с отошедшим скачком. Здесь угол θ между скачком и ребром крыла теоретически определяется как

$$\theta = \varepsilon \Delta_0 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \omega) \quad (5.1)$$

где $\omega = 14,4^\circ$ – угол между ребром и плоскостью большей грани. Отход скачка уплотнения Δ_0 дается формулой (3.3), в которой используется зависимость $b(\Omega, C)$, полученная в ходе систематических численных расчетов. На фиг. 6 приведено сравнение теоретической зависимости (5.1) с полученными экспериментальными данными, представленными вертикальными штрихами с длиной, соответствующей погрешности определения θ по фотографиям $\pm 20\%$. Учитывая, что теория тонкого ударного слоя всегда имеет тенденцию к занижению толщины слоя, совпадение следует считать удовлетворительным.

Заключение. На основе решений, полученных с применением теории тонкого ударного слоя, изучены закономерности и проведена классификация возможных схем гиперзвукового обтекания V-образных треугольных крыльев малого удлинения под

углом атаки с присоединенным и отсоединенным скачком уплотнения. В случае отсоединенного скачка обнаружена новая по сравнению со случаем плоского крыла схема конического течения около наветренной поверхности, подтверждающаяся численными и экспериментальными данными.

Автор признателен А.В. Баранову за помощь в проведении некоторых расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Майканар Г.И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 376–378.
2. Nonweiler T.R. Aerodynamic problems of manned space vehicles // J. Roy. Aeron. Soc. 1959. V. 63. № 585. P. 521–528.
3. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
4. Messiter A.F. Lift of slender delta wings according to newtonian theory // AIAA Journal. 1963. V. 1. № 4. P. 794–802.
5. Голубинский А.И. Обтекание гиперзвуковым потоком треугольных крыльев определенного класса, установленных под углом атаки с присоединенным скачком уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 73–78.
6. Голубкин В.Н. Обтекание плоского треугольного крыла гиперзвуковым потоком газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 6. С. 1–10.
7. Woods B.A., McIntosh C.B.G. Hypersonic flow with attached shock waves over plane delta wings // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. Pt 2. P. 361–377.
8. Голубкин В.Н. Поле течения вблизи наветренной поверхности треугольного крыла, установленного в гиперзвуковом потоке // Тр. ЦАГИ. 1978. Вып. 1917. С. 38–52.
9. Голубинский А.И., Голубкин В.Н. Анализ особенностей в решении задачи гиперзвукового обтекания треугольного крыла малого удлинения // Уч. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 20–29.
10. Остапенко Н.А. Аэродинамические характеристики V-образных крыльев с отошедшей ударной волной на передних кромках при гиперзвуковых скоростях полета // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 145–154.
11. Гонор А.Л., Остапенко Н.А. Гиперзвуковое обтекание треугольного крыла конечной толщины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 46–55.
12. Гонор А.Л., Остапенко Н.А. Гиперзвуковое обтекание крыльев с маховской системой ударных волн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 104–116.
13. Голубкин В.Н. Асимптотическая теория пространственного обтекания крыльев гиперзвуковым потоком газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1993. Т. 24. № 2. С. 3–20.
14. Голубкин В.Н., Негода В.В. К расчету обтекания треугольных крыльев в приближении тонкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 10. С. 1530–1537.
15. Squire L.C. Flow regimes over delta wings at supersonic and hypersonic speeds // Aeronaut. Quart. 1976. V. 27. № 1. P. 1–14.
16. Косых А.П., Минайлос А.Н. Влияние поперечной кривизны нижней поверхности на поле конического сверхзвукового течения у дельтовидного аппарата // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 103–110.
17. Косых А.П. Некоторые результаты численного исследования сверхзвуковых течений около треугольных в плане крыльев с конечной толщиной // Тр. ЦАГИ. 1978. Вып. 1971. С. 13–36.
18. Келдыш В.В. Исследование течения в окрестности V-образных крыльев, образованных поверхностями тока за плоским скачком уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 4. С. 50–55.
19. Зубин М.А., Остапенко Н.А. Экспериментальное исследование некоторых особенностей сверхзвукового обтекания V-образных крыльев // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 4. С. 130–135.