

УДК 532.59:533.95

© 1996 г. А.Т. ИЛЬЧЕВ

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ-ПАКЕТЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассматриваются вопросы существования бегущих уединенных волн – продуктов модуляционной неустойчивости в холодной квазинейтральной плазме. Уединенные волны этого типа (называемые в статье уединенными волнами-пакетами) образуются в результате бифуркации из ненулевого волнового числа спектра линейных волн. Показано, что полная система уравнений, описывающая волновые процессы в холодной плазме, имеет решения типа уединенных волн-пакетов, по крайней мере тогда, когда невозмущенное магнитное поле перпендикулярно фронту волны. В статье сформулированы также достаточные условия существования уединенных волн-пакетов в слабодиспергирующих средах.

1. Постановка задачи. Одномерные движения холодной квазинейтральной плазмы описываются безразмерной системой уравнений [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(B_y^2 + B_z^2)}{2} \right] = 0$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{n} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{1}{R_e} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

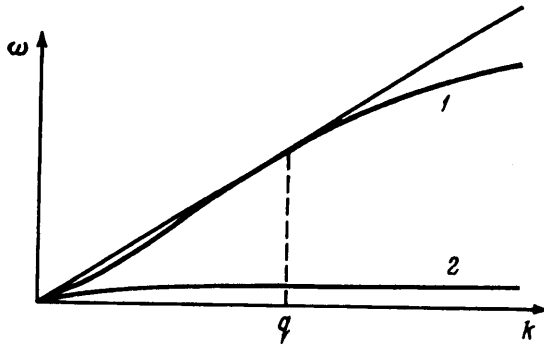
$$\frac{dw}{dt} - \frac{1}{n} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{R_e} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{dB_y}{dt} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dw}{dt} \right)$$

$$\frac{dB_z}{dt} - B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_z \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

$$R_i = \frac{\omega_{ic}}{\omega_0}, \quad R_e = \frac{\omega_{ec}}{\omega_0} \left(\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

где независимая пространственная переменная x , плотность числа частиц n , вектор магнитной индукции $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ и скорость ионов $\mathbf{v} = (u, v, w)$ обезразмерены при помощи характерной длины l , плотности невозмущенной плазмы n_0 , невозмущенного вектора напряженности магнитного поля \mathbf{B}_0 и альфвеновской скорости $V_A = |\mathbf{B}_0| / \sqrt{4\pi n_0 (m_i + m_e)}$ соответственно. Здесь m_i, m_e – массы ионов и электронов, R_i, R_e – параметры дисперсии, ω_{ic} – ионная, ω_{ec} – электронная циклотронные частоты и $\omega_0 = V_A/l$ – характерная частота явления. Для одномерных движений холодной плазмы $B_x = \text{const}$. Переменные $n, u, v, w, B_x, B_y, B_z$ в состоянии покоя имеют значения 1, 0, 0, 0,



Фиг. 1. Дисперсионные кривые

$\cos \theta$, $\sin \theta$, 0 соответственно. Здесь θ – угол между вектором магнитной индукции и направлением движения волн, которое совпадает с осью x .

Дисперсионная кривая в рассматриваемом случае состоит из двух ветвей (фиг. 1, где изображены обе ветви 1 и 2) и для малых волновых чисел k (больших длин волн) фазовые скорости $V_{ph}^{\pm}(k)$ имеют вид

$$V_{ph}^{\pm} = 1 - \frac{1}{2R_i R_e} \left\{ 1 - \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \right\} k^2 + \dots$$

$$V_{ph}^{-} = \cos \theta \left[1 - \frac{1}{2R_i R_e} \left\{ 1 + \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \right\} k^2 + \dots \right] \quad (1.2)$$

Здесь $V_{ph}^{+}(k)$ отвечает быстрым волнам и $V_{ph}^{-}(k)$ – медленным волнам. В пределе $k \rightarrow 0$ из (1.2) получим $V_{ph}^{+} = V_{ph}^{+}(0) = 1$, $V_{ph}^{-} = V_{ph}^{-}(0) = \cos \theta$.

Решения системы (1.1) типа бегущих волн зависят от $\xi = x - Vt$ и описываются системой уравнений, полученной однократным интегрированием. Константы интегрирования выбраны так, чтобы состояние покоя удовлетворяло полученным уравнениям. Плотность числа частиц n и x -компонента скорости связаны алгебраическими соотношениями с остальными неизвестными функциями, для которых имеют место дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2V^2} (b_y^2 + 2B_y b_y + B_z^2)$$

$$u = \frac{1}{V} (b_y^2 + 2B_{y0} b_y + B_z^2), \quad b_y = B_y - B_{y0}, \quad B_{y0} = \sin \theta$$

$$\dot{v} = -R_i B_z - \frac{R_i \cos \theta}{V} n v, \quad \dot{w} = \frac{R_i \cos \theta}{V} n v + R_i b_y + R_i \sin \theta n \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$$

$$\dot{b}_y = R_e n \omega + \frac{R_e \cos \theta}{V} n B_z, \quad \dot{B}_z = -R_e n v - \frac{R_e \cos \theta}{V} n b_y \quad (1.3)$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по ξ .

В [2] рассмотрены возможные формы бегущих волн, распространяющиеся со скоростями, мало отличающимися от фазовых скоростей быстрых волн бесконечной длины, т.е. со скоростями $V = 1 + \mu/2$, где μ – малый параметр.

В настоящей работе будут рассмотрены вопросы существования уединенных волн с осциллирующей структурой фронта в окрестности точки $k = q$, где фазовая скорость равна групповой (фиг. 1), т.е. $V = V_0 + \mu$.

$$V_0 = \sqrt{\frac{\left[(R_i R_e^{-1} + R_e R_i^{-1}) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right]^2 - 4 \cos^2 \theta}{4 \operatorname{tg}^2 \theta_c \cos^2 \theta}}$$

$$\operatorname{tg} \theta_c = \sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(R_i^2 + R_e^2) \cos^2 \theta}{V_0^2} - 2 R_i R_e + \frac{R_i R_e \sin^2 \theta}{V_0^2}}$$
(1.4)

Скорость V_0 равна тангенсу угла наклона прямой, касательной к дисперсионной кривой l на фиг. 1 в точке $k = q$, т.е. в точке, где фазовая скорость волны совпадает с групповой скоростью. Подкоренное выражение в формуле (1.4) для q положительно при $\theta < \theta_c$, что соответствует наличию точки перегиба у дисперсионной кривой l на фиг. 1. При $\theta > \theta_c$ кривая l монотонна и точки на ней, в которых достигается равенство фазовой и групповой скоростей (точки 1 : 1 резонанса [3]), отсутствуют. Возникновение уединенных волн (называемых далее уединенными волнами-пакетами) ожидается в окрестности точек 1 : 1 резонанса.

Система (1.3) в окрестности V_0 может быть переписана в виде

$$\dot{\mathbf{w}} = G\mathbf{w} + F(\mu, \mathbf{w})$$
(1.5)

$$\mathbf{w} = \{v, w, b_y, B_z\}^t$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & V_0^{-1} R_i \cos \theta & 0 & -R_i \\ V_0^{-1} R_i \cos \theta & 0 & R_i (1 - V_0^{-2} \sin^2 \theta) & 0 \\ 0 & R_e & 0 & V_0^{-1} R_e \cos \theta \\ -R_e & 0 & -V_0^{-1} R_e \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

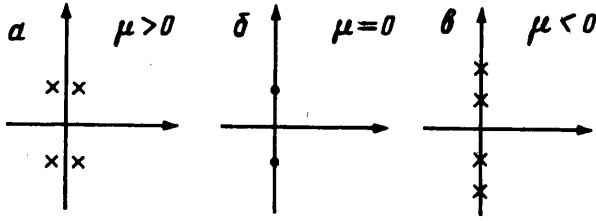
Нелинейная вектор-функция F вплоть до членов порядка $\mu |W| + |W|^3$ имеет вид $F(\mu, \mathbf{W}) = N + N_2 + N_3$

$$N = \frac{\mu R_i \cos \theta}{V_0^2} \begin{pmatrix} -(v + b_y \sin \theta \operatorname{tg} \theta V_0^{-1}) \\ -B_z \\ (R_e / R_i) b_y \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \frac{R_i b_g \sin \theta}{V_0^3} \begin{pmatrix} -w \cos \theta \\ v \cos \theta - V_0 M / b_y \\ (R_e / R_i)(V_0 w + B_z \cos \theta) \\ -(R_e / R_i)(V_0 v + b_y \cos \theta) \end{pmatrix}$$

$$N_3 = \frac{M}{V_0^3} \begin{pmatrix} -R_i \cos \theta \\ R_i (v \cos \theta + b_y \sin^2 \theta / V_0) \\ V_0 R_e w + B_z \cos \theta \\ -V_0 v - b_y \cos \theta \end{pmatrix}$$
(1.6)

$$M = b_y^2 / 2 + B_z^2 / 2 - V_0^{-2} b_y^2 \sin \theta$$



Фиг. 2. Различное расположение собственных значений при изменении параметра μ

Правая часть (1.3) антикоммутирует с изометрией

$$R = \{r_{ij}\}, \quad r_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad r_{11} = r_{33} = -r_{22} = -r_{44} = 1$$

т.е. $GR = -RG$, $F(\mu, RW) = -RF(\mu, W)$. Это означает, что (1.3) обратима относительно инверсии $\xi \rightarrow \bar{\xi}$, т.е. множество ее решений содержит решения с четными v и b_y и нечетными w и B_z . Собственные значения λ матрицы A удовлетворяют уравнению

$$\lambda^4 + \left[\frac{(R_i^2 + R_e^2) \cos^2 \theta}{V_0^2} - 2R_i R_e + \frac{R_i R_e \sin^2 \theta}{V_0^2} \right] \lambda^2 + \left(1 - \frac{1}{V_0^2} \right) R_i^2 R_e^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{V_0^2} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Решением уравнения (1.8) является пара двукратных мнимых собственных значений $\lambda = \pm iq$. Далее ограничимся рассмотрением лишь случая $\theta = 0$.

2. Процедура получения уединенных воли-пакетов для уравнений (1.1). Бифуркация из тривиального решения происходит в результате прохождения собственных значений оператора линеаризованной правой части (1.3) через мнимую ось. Движение собственных значений для μ в окрестности нуля изображено на фиг. 2: при $\mu > 0$ две пары комплексно-сопряженных собственных значений находятся по обе стороны от мнимой оси (фиг. 2, а), при $\mu = 0$ обе пары собственных значений выходят на мнимую ось, попарно сливаясь (фиг. 2, б), при $\mu < 0$ собственные значения расходятся по мнимой оси (фиг. 2, в). В силу обратимости системы (1.3) собственные значения симметричны относительно мнимой и вещественной осей. Из фиг. 2 видно, что возникновение уединенных волн возможно лишь в ситуации а при $\mu > 0$. Произведем в (1.3) замену неизвестных функций

$$W = A\varphi_0 + B\varphi_1 + \bar{A}\bar{\varphi}_0 + \bar{B}\bar{\varphi}_1 + \Phi(\mu, A, B, \bar{A}, \bar{B}) \quad (2.1)$$

$$G\varphi_0 = iq\varphi_0, \quad G\varphi_1 = iq\varphi_1 + \varphi_0, \quad \varphi_0 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}^t, \quad \varphi_1 = \{0, 0, c, d\}^t$$

$$\alpha = \frac{1}{4V_0^3} (R_e + R_i)(R_e - R_i)^2, \quad \beta = \frac{iq}{2V_0^2} (R_e^2 - R_i^2)$$

$$\gamma = -\frac{R_e}{2V_0^2} (R_e - R_i)^2, \quad \delta = -\frac{iqR_e}{V_0} (R_e - R_i), \quad c = \frac{iq}{2R_i V_0^2} (R_e^2 - R_i^2)$$

$$d = -\frac{1}{4V_0^3 R_i} (R_e - R_i)^2 (R_e + R_i)$$

$$\Phi(0, A, B, \bar{A}, \bar{B}) = (\Phi_{2000} A^2 + \text{c. c.}) + \Phi_{1100} |A|^2 + (\Phi_{1010} AB + \text{c. c.}) + (\Phi_{0110} \bar{A}B + \text{c. c.}) + \dots$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Компоненты нелинейной вектор-функции Φ будем определять из условия, что уравнение на A и B имеют вид квазинормальной формы уравнений (1.3), которая в случае 1 : 1 резонанса дается уравнениями [4]

$$\begin{aligned} \dot{A} &= iqA + B + iP\left[\mu, |A|^2, \frac{i}{2}(A\bar{B} - \bar{A}B)\right] \\ \dot{B} &= iqB + iP\left[\mu, |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)\right] + AQ\left[\mu, |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)\right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$P = p_1\mu + p_2|A|^2 + \dots, \quad Q = q_1\mu + q_2|A|^2 + \dots$$

где P и Q – вещественные полиномы.

Далее будем полагать $\mu > 0$. Система уравнений (2.2) имеет два первых интеграла

$$\frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B) = K, \quad |B|^2 - G(\mu, |A|^2, K) = H, \quad K, H = \text{const}$$

где $\partial_u G = Q(\mu, u, v)$. Уравнения (2.2) приближают искомую систему (1.3) с точностью до $(|A|^n + |B|^n)$ для любого фиксированного n . Для нахождения коэффициентов p_1, q_1, p_2, q_2 последуем методу, используемому в [5]. Коэффициенты p_1, q_1 легко получить, учитывая, что собственные значения линеаризованной правой части (2.2) выражаются по формуле

$$\lambda = i(q + p_1\mu) \pm \sqrt{q_1} \sqrt{\mu}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.7) с $V_0 \rightarrow V_0 + \mu$ и разлагая результат подстановки в ряд по μ , получим

$$q_1 = \frac{1}{2V_0^3}(R_e + R_i)^2, \quad p_1 = -\frac{1}{4q}(R_e - R_i)^2$$

Продифференцируем далее (2.1) по ξ и положим $\mu = 0$

$$\dot{w} = \dot{A}\phi_0 + \mathbf{B}\phi_1 + \dot{\bar{A}}\bar{\phi}_0 + \dot{\bar{\mathbf{B}}}\bar{\phi}_1 + \dot{\Phi}(0, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) \quad (2.3)$$

Заменив \dot{A} и \dot{B} из уравнений (2.2) и сравнивая (1.3) и (2.3), получим [5]

$$q_2 = \langle 2\mathbf{N}_2(\phi_0, \Phi_{1100}) + 2\mathbf{N}_2(\bar{\phi}_0, \Phi_{2000}) + 3\mathbf{N}_3(\phi_0, \phi_0, \phi_1), \psi \rangle \quad (2.4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в C^4

$$G^*\psi_1 = -iq\psi_1, \quad \psi_1 = \Delta^{-1}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1\}'$$

$$\alpha_1 = \frac{qR_e}{V_0}(R_e - R_i), \quad \beta_1 = \frac{R_e}{2V_0^2}(R_e - R_i)^2$$

$$\gamma_1 = \frac{iq}{2V_0^2}(R_e^2 - R_i^2), \quad \delta_1 = \frac{1}{4V_0^3}(R_e + R_i)(R_e - R_i)^2$$

$$\Delta = R_i^5 \left(\frac{y^5}{4} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{y}{4} - \frac{1}{8} \right), \quad y = \frac{R_e}{R_i}$$

а постоянные векторы Φ_{1100}, Φ_{2000} определяются из соотношений [5]

$$G\Phi_{2000} + \mathbf{N}_2(\phi_0, \phi_0) = 2iq\Phi_{2000}, \quad G\Phi_{1100} + 2\mathbf{N}_2(\phi_0, \bar{\phi}_0) = 0$$

Вектор N_2 при $\theta = 0$ равен нулю, N_3 дается формулой (1.6) с $\theta = 0$, а

$$v = \alpha(A + \bar{A}) + O(|A|^2 + |B|^2); \quad w = \beta(A - \bar{A}) + O(|A|^2 + |B|^2)$$

$$b_y = \gamma(A + \bar{A}) + c(B - \bar{B}) + O(|A|^2 + |B|^2)$$

$$B_z = \delta(A - \bar{A}) + d(B + \bar{B}) + O(|A|^2 + |B|^2) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5), (1.6) в (2.4), получим

$$q_2 = \frac{R_e^3 R_i^5}{V_0^{12}} \left(\frac{-y^4}{2} + 2y^3 - 3y^2 + 2y - \frac{1}{2} \right)$$

Заметим, что $q_2 < 0$ при $y > 0$. Произведем далее в (2.2) замену

$$A = r_0(\xi) \exp i(q\xi + \theta_0), \quad B = r_1(\xi) \exp(q\xi + \theta_1) \quad (2.6)$$

Гомоклинические орбиты системы (2.2) имеют место при $q_2 < 0$ и $K = 0$ [3]. Из последнего равенства следует

$$A\bar{B} - \bar{A}B = 2ir_0r_1 \sin(\theta_0 - \theta_1) = 0$$

откуда $\theta_0 - \theta_1 = 0$ или $\theta_0 - \theta_1 = \pi$. Без нарушения общности положим $\theta_0 - \theta_1 = 0$. Тогда уравнения (2.2) записываются в следующей форме:

$$r_0' = r_1, \quad r_1' = r_0 Q(\mu, r_0^2, 0), \quad \theta_0' = P(\mu, r_0^2, 0) \quad (2.7)$$

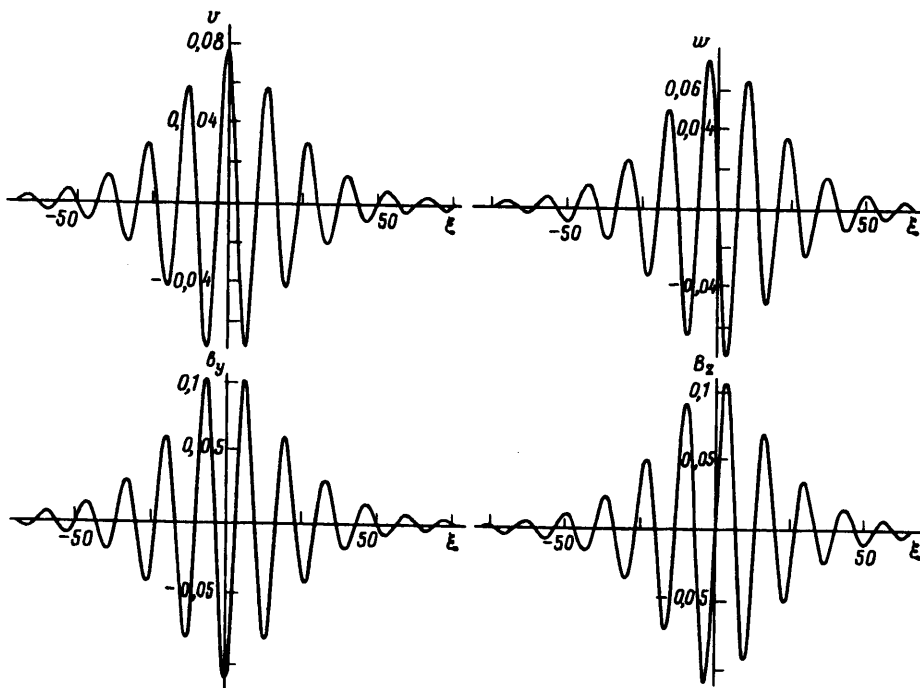
Из (2.7) следует, что в низшем приближении по μ

$$r_0 = \pm \sqrt{2\mu q_1 |q_2|^{-1}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{q_1 \mu \xi}); \quad r_1 = \mp q_1 \mu \sqrt{2|q_2|^{-1}} \operatorname{sh}(\sqrt{q_1 \mu \xi}) \operatorname{ch}^{-2}(\sqrt{q_1 \mu \xi})$$

$$\theta_0 = p_1 \mu \xi + 2 \frac{p_2}{q_2} \sqrt{q_1 \mu} \operatorname{th}(\sqrt{q_1 \mu \xi}) \quad (2.8)$$

Гомоклинические орбиты аппроксимирующей системы (2.2), в низшем приближении по μ дающиеся формулами (2.8), являются грубыми относительно обратимых возмущений высшего порядка по μ [3]. Это означает, что полная система (1.3) также имеет гомоклинические траектории, которые отличаются от (2.8) на величины следующего порядка малости по μ . Из (2.6), (2.8) следует, что функция A имеет порядок $\sqrt{\mu}$, а B – порядок μ . Характерный профиль уединенных волн-пакетов возвышения с точностью до $\sqrt{\mu}$ при $\mu = 0,001$, где $\{v, w, b_y, B_z\}$ дается выражениями (2.5), а A и B связаны с (2.8) по формулам (2.6), приведен на фиг. 3 для R_e/R_i . Для реальной плазмы R_e/R_i имеет величину порядка 10^3 и рассматриваемые здесь уединенные волн-пакеты малой амплитуды очень быстро осциллирующие (в безразмерных переменных) и пространственная область их локализации очень велика.

3. Общий случай изотропных диспергирующих сред. Рассматриваемый в статье пример существования уединенных волн-пакетов в холодной плазме иллюстрирует свойства уравнений, описывающих волновые процессы в средах со слабой дисперсией, которые обуславливают существование уединенных волн-пакетов в общем случае. Упомянутые уединенные волны представляют собой третий тип уединенных волн, возникающих в диспергирующих средах. Достаточные условия существования первых двух типов – классических и обобщенных уединенных волн – сформулированы в



Фиг. 3. Изменение параметров плазмы в уединенных волнах-пакетах для $R_e/R_i = 2$

работе автора¹ для обратимых (инвариантных относительно одновременной инверсии $t \rightarrow -t, x \rightarrow -x$) уравнений вида

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{v} + S\left(\mathbf{v} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathbf{v}, \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}\right) = 0, \quad i \leq r, \quad j \leq r-1 \quad (3.1)$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^r A_i \frac{\partial^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{r-1} B_j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial t} + C \frac{\partial}{\partial t}$$

где $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, $\partial^i / \partial x^i$ оператор i -й производной по пространственной переменной x , а $\partial / \partial t$ – оператор производной по времени t , A_i, B_j и C – постоянные матрицы $n \times n$. Вектор S нелинейно зависит от аргументов, обозначенных в (3.1). Будем полагать, что предположения 2 и 3, сформулированные в работе автора (см. сноску на стр. 160), выполнены, т.е. система уравнений (3.1) может быть переписана в виде

$$G(V, \mathbf{v}) \left\{ L\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, -V \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \xi} f\left(\mathbf{v}, \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \mathbf{v}\right) \right\} = 0, \quad k \leq n-1 \quad (3.2)$$

где $G(V, \mathbf{v})$ – невырожденная в окрестности $\mathbf{v} = 0$ и $V = V_0$ (V_0 определена ниже) матрица $n \times n$, а также его система уравнений, полученная из (3.2) однократным интегрированием, разрешима относительно старших производных в окрестности $\mathbf{v} = 0$. Тогда система (3.2) после однократного интегрирования переписывается в виде (1.5) (см. сноску на стр. 160), где G – постоянная матрица $m \times m$, $\mu = V - V_0$, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^m$, а точка в (1.5) означает дифференцирование по "времени", роль которого здесь играет

¹ Статья А.Т. Ильичева "Уединенные и обобщенного" уединенные волны в средах со слабой дисперсией" сдана в журнал ПММ.

пространственная переменная $-\infty < \xi < \infty$, $\xi = x - Vt$. Из рассмотрений, проведенных в разд. 1 и 2 настоящей статьи, следует, что решения уравнений (3.1) типа уединенных волн-пакетов существуют, если выполняются следующие предположения.

Предположение 1. Существуют константа V_0 и ветвь дисперсионного соотношения K , такие, что прямая $V_0 k$ пересекает графики всех ветвей при $k = 0$, касательна к K в точке $k = q \neq 0$ при $k > 0$ и не имеет более ни одной общей точки ни с какой дисперсионной кривой при $k > 0$.

Предположение 2. Константа q_2 , определенная по формуле (2.4), строго меньше нуля.

Система (1.5) для малых решений, по теореме о центральном многообразии [4], при выполнении предположения 1 сводится к системе уравнений 4-го порядка на центральном многообразии. Последняя в свою очередь приближается квазинормальной формой (2.2). Далее, доказательство существования уединенных волн-пакетов полностью аналогично доказательству существования в частном случае холодной плазмы, изложенном в разд. 2 настоящей статьи.

Заключение. Доказано существование и описаны формы уединенных волн-пакетов в холодной плазме для случая, когда вектор невозмущенного магнитного поля перпендикулярен фронту волны. Тем не менее из формулы (2.4) следует, что при достаточно малых углах наклона невозмущенного магнитного поля к направлению распространения волны коэффициент q_2 изменится незначительно и по-прежнему останется отрицательным. Это означает, что существование уединенных волн-пакетов будет иметь место и в случае ненулевых углов наклона.

По сути дела наличие уединенных волн-пакетов в диспергирующей среде связано с эффектом модуляционной неустойчивости, которая присутствует в системе. Нелинейным продуктом модуляционной неустойчивости для волн малой амплитуды является солитон, удовлетворяющий нелинейному уравнению Шредингера. Возникновение бегущих уединенных волн-пакетов имеет место в окрестности скорости V_0 , когда скорость солитона, близкая к групповой скорости волнового пакета, распространяющегося под огибающей, совпадает с фазовой скоростью монохроматической волны.

Данная работа поддержана Международным научным фондом (грант MDM 300) и Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kakutani T., Ono H.* Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. № 5. P. 1305–1318.
2. *Il'ichev A.* Steady waves in a cold plasma // J. Plasma Phys. 1995. V. 55. № 2. P. 181–194.
3. *Iooss G., Peroueme M.C.* Perturbed homoclinic solutions in reversible 1 : 1 resonance vector fields // J. Differents. Equat. 1993. V. 102. № 1. P. 62–88.
4. *Iooss G., Adelmeyer M.* Topics in bifurcation theory and applications. Singapore: World Scientific, 1992. 130 p.
5. *Dias F., Iooss G.* Capillary-gravity solitary waves with damped oscillations // Physica. D. 1993. V. 65. № 4. P. 399–423.

Москва

Поступила в редакцию
15.IX.1995