МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1996

УДК 532.59

© 1996 г. Ю.А. ДРОЗДОВА, А.Г. КУЛИКОВСКИЙ

ОБ ОПИСАНИИ ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В КАНАЛАХ

Предлагается метод получения уравнений, описывающих длинные нелинейные волны в каналах произвольного поперечного сечения с учетом поперечного ускорения частиц жидкости (приближение Буссинеска). Для каналов с некоторыми заданными формами поперечного сечения эти уравнения выписаны в явной форме. В случае узких каналов уравнения Буссинеска, а также уравнения следующего приближения выписываются явно для произвольной формы поперечного сечения.

При распространении длинных волн в каналах ($l \gg \max\{h, b\}$, l, h, b – характерные величины масштаба движения вдоль оси канала, глубины и ширины потока соответственно) величины скоростей и ускорений в направлениях, перпендикулярных оси канала, малы. В связи с этим можно использовать различные приближенные уравнения, включающие в качестве искомых переменных только некоторую скорость вдоль оси канала u и глубину потока h.

Традиционные уравнения гидравлики, называемые уравнениями мелкой воды (если трение не учитывается) или уравнениями Сен-Венана (если трение учитывается) получаются, если пренебречь влиянием поперечного ускорения и трения на распределение давления p в поперечном сечении потока. Уравнения, приближенно учитывающие зависимость p от поперечного ускорения, называют уравнениями Буссинеска.

Вывод уравнений Буссинеска для каналов произвольного поперечного сечения имеется в работах ряда авторов [1–4]. Во всех этих работах рассматриваются только волны малой амплитуды, так что наряду с малым параметром $\varepsilon = 1/h$ считается малым также параметр $\sigma = a/h$, где a – характерная величина амплитуды волны. Предполагается, что $\sigma = O(\varepsilon^2)$. Искомые уравнения получаются методом формального разложения всех функций, описывающих движение, в ряды по параметру σ, если в уравнениях оставить только члены, имеющие (по предположению) порядок не выше $O(\sigma^2)$. В качестве искомых функций выступают глубина и скорость жидкости на поверхности, или величины, отличающиеся от них на малые второго порядка. В работах [1–4] канал считается горизонтальным, а трение не учитывается.

В данной работе малость амплитуды волны не предполагается. Искомые уравнения являются уравнениями относительно площади живого сечения (или глубины) и средней по сечению продольной скорости потока.

1. Метод вывода уравнений Буссинеска. Законы сохранения массы и количества движения для потока можно записать в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial su}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{s}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{1.1}$$

Здесь t – время; x – координата вдоль оси русла; u – средняя по сечению скорость вдоль русла; P – деленная на плотность сумма сил давления в поперечном сечении и дополнительных потоков импульса; s – площадь поперечного сечения потока.

Уравнения (1.1) написаны без учета трения, дно канала считается горизонтальным.

Если функция P вычисляется в предположении гидростатического закона распределения давления по глубине, то уравнения (1.1) есть уравнения теории мелкой воды. Уравнения Буссинеска получаются при приближенном учете влияния поперечного ускорения на вид функции P. При нахождении выражения для P длина волны по сравнению с поперечным размером канала будет считаться очень большой, так что будет находиться только главная часть малого отличия P от выражения, даваемого гидростатическим распределением давления. Это позволяет при проведении вычислений пользоваться решениями уравнений мелкой воды как нулевым приближением, считая, что $v_x = u(x, t)$, $h = h(x, t)$, (h – возвышение уровня жидкости над некоторым заданным значением). При учете зависимости v_x от y и z первоначально плоские поперечные сечения искривляются. Полученные выражения для v_y и v_z позволяют оценить порядок величины угла отклонения сечения от плоскости. Он оказывается равным $h/l \ll 1$ и им будем пренебрегать.

Способ нахождения функции P, используемый в этой работе, основан на рассмотрении уравнений Лагранжа для некоторого жидкого объема.

В соответствии со сказанным рассмотрим кинетическую T и потенциальную U энергию жидкого объема, расположенного между двумя плоскими поперечными сечениями $x = \text{const}$, находящимися на малом расстоянии q друг от друга. При этом под кинетической энергией T понимается кинетическая энергия, связанная только со скоростями v_y и v_z (оси y и z лежат в плоскости поперечного сечения русла). В качестве работы сил будем рассматривать только работу силы давления, действующей в поперечном сечении: $-\rho P\delta q$.

Если выбрать в качестве обобщенной координаты s, то уравнения Лагранжа запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = Q_s, \quad Q_s\delta s = -\rho P\delta q, \quad L = T - U \tag{1.2}$$

В силу закона сохранения массы $s\delta q + q\delta s = 0$. Следовательно,

$$\rho P = \frac{sQ_s}{q} = \frac{s}{q}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{s}{q}\frac{\partial U}{\partial s} = \rho P_b + \rho P_g \tag{1.3}$$

Формула (1.3) служит для нахождения P при известных T и U. Полученное выражение для P не зависит от выбора величины начального значения q (при заданном s). При дифференцировании U и T по s необходимо учесть, что q и s связаны зависимостью $qs = \text{const}$.

Если U и T найдены, то функции P_b и P_g известны, и уравнения Буссинеска имеют вид (без учета трения и уклона канала)

$$\begin{gathered}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial su}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{s}\left(\frac{\partial P_g}{\partial x} + \frac{\partial P_b}{\partial x}\right)\end{gathered} \tag{1.4}$$

Для потенциальной энергии рассматриваемого объема жидкости верна формула $V = \rho qsgz_c$, где z_c – координата центра тяжести поперечного сечения потока.

Для вычисления кинетической энергии найдем распределение скорости в поперечном сечении. При этом жидкость будем считать идеальной, движение потенциальным, v_x – не зависящей от y и z.

Из уравнения неразрывности следует, что величина $\partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$ не зависит от y и z, поэтому для изменения площади живого сечения потока s имеем

$$\dot{s} = \int_L v_n dl = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)s$$

Здесь L – контур сечения, n – нормаль к L. Следовательно

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\dot{s}}{s} \tag{1.5}$$

Кроме того v_y и v_z должны удовлетворять следующим граничным условиям на свободной поверхности $z = h(x, t)$, на дне и стенках канала $z = z_*(x, y)$.

$$v_z = \dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x\frac{\partial h}{\partial x} \quad (z = h) \tag{1.6}$$

$$v_z = \frac{\partial z_*}{\partial x}v_x + \frac{\partial z_*}{\partial y}v_y \quad (z = z_*) \tag{1.7}$$

Для цилиндрического русла условие (1.7) перепишется в виде

$$v_z = z_*'v_y, \quad z_*' = \frac{dz_*}{dy}$$

Условия (1.6), (1.7) можно записать для потенциала

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \dot{h} \ (z = h), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ (z = z_*) \tag{1.8}$$

Здесь n – нормаль к контуру поперечного сечения.

Итак, уравнения Буссинеска для волн в каналах – это уравнения (1.4), где P_g и P_b даются формулой (1.3), причем T определяется потенциалом φ, удовлетворяющим уравнению Пуассона (1.5) с граничными условиями (1.8).

2. Приближенное нахождение φ и P, и оценки для этих величин. Построим приближенное решение задачи (1.5), (1.8), пользуясь следующими простейшими предположениями: v_z – линейная функция z (при каждом y), v_y – не зависит от z. Этими предположениями можно пользоваться, если $h \ll l$ и, кроме того, $h \ll b_0$, b_0 – характерная ширина канала.

Из несжимаемости жидкости имеем

$$(b - y)v_z(h) - (h - z_*)v_y = \frac{\dot{s}}{s}s(y), \quad \dot{s} = b\dot{h}, \quad s(y) = \int_y^b\int_{z_*}^h dzdy$$

Здесь $b = b(z)$ – ширина потока при данном z.

Таким образом

$$v_y = \gamma\dot{h}, \quad \gamma(y) = \left(\frac{bs_y}{s} - y\right)\frac{1}{h_*}, \quad h_* = h - z_*(y) \tag{2.1}$$

С использованием граничных условий на свободной поверхности и на дне имеем:

$$v_z = \dot{h}(1 - \alpha h + \alpha z), \quad \alpha(y) = (1 - z_*'\gamma)/h_* \tag{2.2}$$

Если поле скоростей определено по формулам (2.1), (2.2), то кинетическая энергия рассматриваемого объема есть

$$T_a = 0,5\dot{h}^2\rho q\int_0^b (\gamma^2 h_* + (1-\alpha h)^2 h_* + \alpha(1-\alpha h)(h^2 - z_*^2) + \frac{\alpha^2}{3}(h^3 - z_*^3))dy = 0,5\dot{h}^2\rho q F(h)$$

$$F(h) = T_a / (\rho q\, 0,5\dot{h}^2) \geqslant 0$$

Формула для P_b для произвольного русла имеет вид:

$$P_b = A_1(s)\ddot{s} + A_2(s)\dot{s}^2 \tag{2.3}$$

$$A_1(s) = \frac{sF}{b^2} \geqslant 0, \quad A_2(s) = \frac{s}{b^3}\left(-\frac{b'F}{b} + 0,5F' - \frac{Fb}{2s}\right)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по h, A_1, A_2 – функции, определяемые формой русла.

Получим оценку сверху и снизу для истинной кинетической энергии слоя. Известна теорема Кельвина: безвихревое движение несжимаемой жидкости в односвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое движение, с одинаковой нормальной компонентой скорости на границе [5].

Поле скоростей (2.1), (2.2) удовлетворяет истинным граничным условиям, поэтому кинетическая энергия T_a для этого поля скоростей больше истинной T (по теореме Кельвина).

Для получения оценки снизу для кинетической энергии введем $\langle v_y(y)\rangle$ – среднее по глубине значение модуля истинной скорости v_y, $\langle v_z(z)\rangle$ – среднее по ширине канала (на глубине z) значение модуля скорости v_z. Кинетическая энергия T_m, вычисленная по $\langle v_y\rangle$ и $\langle v_z\rangle$, меньше истинной. Действительно, пусть, например, поперечное сечение симметрично, уравнение его границы $z = z_*(y)$ или $y = y_*(z)$.

Имеем

$$\frac{1}{\rho q}T = \iint_{s/2} (v_y^2 + v_z^2)dydz = \int_0^{b/2} h_*\langle v_y^2\rangle dy +$$

$$+\int_0^h y_*\langle v_z^2\rangle dz > \int_0^{b/2} h_*(\langle v_y\rangle)^2 dy + \int_0^h y_*(\langle v_z\rangle)^2 dz = \tag{2.4}$$

$$= \iint_{s/2} [(\langle v_y\rangle)^2 + (\langle v_z\rangle)^2]ds = \frac{1}{\rho q}T_m$$

Найдем выражения $\langle v_y\rangle$ и $\langle v_z\rangle$ для произвольного симметричного русла. Рассмотрим слой между двумя жидкими поперечными сечениями, расстояние между которыми q. Объем этого слоя $Q = sq = \text{const}$.

Пусть Q_z – объем слоя глубины z, s_z – площадь поперечного сечения этого слоя, $Q_z = s_z q$, а Q_y – объем части слоя по y от 0 до y, $Q_y = s_y q$.

В силу сохранения объема

$$\frac{\partial Q_y}{dt} = -\langle v_y\rangle h_* q = \dot{h}yq + s_y\dot{q} = \dot{h}yq - \frac{s_y q\dot{s}}{s}$$

$$\frac{\partial Q_z}{dt} = -\langle v_z\rangle b(z)q = s_z\dot{q} = -\frac{s_z q\dot{s}}{s}$$

Отсюда

$$\langle v_z\rangle = \frac{s_z}{b(z)}\frac{\dot{s}}{s}, \quad \langle v_y\rangle = \frac{\dot{h}}{h_*}\left(-y + \frac{s_y b}{s}\right) \tag{2.5}$$

Вторая формула (2.5) совпадает с (2.1).

Формула для T_m такова

$$\frac{1}{\rho q}T_m = \frac{1}{\rho q}\dot{h}^2 \iint\limits_{s/2}\left[\left(\frac{s_z}{b(z)}\frac{b}{s}\right)^2 + \left(-\frac{Y}{h_*} + \frac{s_y b}{s h_*}\right)^2\right]ds$$

и $T_m \leqslant T \leqslant T_a$.

Из оценок для кинетической энергии T и равенства (1.3) следует, что в некотором среднем смысле аналогичные оценки имеют место и для P_b. Так как v_y, определенное по формуле (2.1), совпадает с $\langle v_y \rangle$, то разница между T_m и T_a связана только с различием v_z и $\langle v_z \rangle$

$$\frac{1}{\rho q}(T_m - T_a) = \frac{1}{\rho q}\dot{h}^2 \iint\limits_{s/2}\left[\left(\frac{s_z}{b(z)}\frac{b}{s}\right)^2 - (1-\alpha(h-z))^2\right]dydz$$

Здесь $\alpha = \alpha(y)$ определена формулами (2.1) и (2.2).

Для русел прямоугольного и треугольного сечения (как будет показано ниже) $v_z = \langle v_z \rangle$, поэтому $T_a = T_m$, но так как $T_m \leqslant T \leqslant T_a$, то $T_m = T = T_a$, т.е. полученное решение для поля скорости дает точное значение кинетической энергии. Этот результат очевиден, потому что поле скорости для русел прямоугольного и треугольного сечений, найденное по формулам (2.1) и (2.2), является потенциальным.

Рассмотрим вопрос о корректности линеаризованных уравнений Буссинеска для канала произвольного сечения. Линеаризуем уравнения Буссинеска вблизи состояния $u = u_1 = \text{const}$, $s = s_1 = \text{const}$, причем, не нарушая общности, u_1 можно считать равным нулю. Получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s_1\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c_1^2}{s_1}\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{s_1}A_1^1\frac{\partial^3 s}{\partial t^2 \partial x}$$

$$c_1^2 = \frac{\partial P_g^1}{\partial s},\quad A_1^1 = \frac{\partial P_b}{\partial \ddot{s}} = \frac{sF}{b^2}(s_1) \geqslant 0$$

Верхний индекс 1 означает, что соответствующая величина вычислена в точке $s = s_1$.

Соответствующее дисперсионное уравнение и его решение имеют вид

$$k((1 + A_1^1 k^2)\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - c_1^2) = 0,\quad \omega = \frac{\pm k c_1}{\sqrt{1 + A_1^1 k^2}}$$

Действительным значениям k соответствуют только действительные значения ω, это означает корректность линеаризованных уравнений Буссинеска.

3. Уравнения Буссинеска для некоторых конкретных русел. Уравнения Буссинеска для русла с прямоугольным сечением, полученные способом, описанным в разд. 2, совпадают с известными см. [6]. Они имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{h^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ddot{h}h^2}{3}\right)\right),\quad \dot{h} = \frac{dh}{dt},\quad \ddot{h} = \frac{d\dot{h}}{dt} \tag{3.1}$$

Для русла треугольного сечения с уравнением бортов $z = p|y|$ потенциальная и кинетическая энергия части потока длины q есть соответственно

$$U = \frac{2}{3}\rho q\frac{h^3}{p}, \quad T_a = \rho q\frac{\dot{h}^2h^2}{4p}\left(\frac{1}{3p^2}+1\right)$$

Уравнения Буссинеска имеют вид

$$\frac{\partial h^2}{\partial t}+\frac{\partial uh^2}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{3}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ddot{h}h^3}{4}\left(\frac{1}{3p^2}+1\right)\right)\right) \tag{3.2}$$

Рассмотрим русло, тангенс угла наклона бортов которого равен p при $h \leqslant h_0$, $p\varepsilon$ при $h \geqslant h_0$. Для этого русла при $h \geqslant h_0$ имеем

$$s = 0,5h_0b_0 + 0,5(h-h_0)(b+b_0), \quad b_0 = \frac{h_0}{p}, \quad b = b_0 + \frac{h-h_0}{p\varepsilon}$$

Здесь s – часть полной площади сечения, соответствующая $y \geqslant 0$.

$$P_g = \frac{g\cos\alpha}{6p}\left[h_0^2(3h-2h_0)+3h_0(h-h_0)^2+(h-h_0)^3\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

Выражения для T_a и соответственно для P_b с использованием равенства (2.3) имеют очень громоздкий вид. Приведем здесь только выражение для P_b для случая волн малой амплитуды, распространяющихся по состоянию с $h = h_0$ ($(h - h_0)/h_0 \ll 1$). Линеаризованные уравнения Буссинеска совпадают в этом случае с уравнениями для сечения в виде простого треугольника. При сохранении членов до второго порядка малости включительно имеем (в системе координат, движущейся со скоростью невозмущенного потока)

$$\frac{1}{s}\frac{\partial P_b}{\partial x} = \frac{1}{s_0}(N_1s_{tt}s_x + N_2s_ts_{tx} + N_3(s_{ttx}+u_{tx}s_x+u_ts_{xx}+2u_xs_{tx}+2us_{xxt}))+$$

$$+\left(\frac{1}{s_0}N_1 - \frac{N_3}{s_0^2}\right)(s-s_0)s_{ttx}$$

$$N_1 = \frac{\partial \overset{\circ}{A_1}}{\partial s}, \quad N_2 = 2\overset{\circ}{A_2}, \quad N_3 = \overset{\circ}{A_1}$$

$$\overset{\circ}{A_1} = \frac{1+3p^2}{24p^2}h_0, \quad \frac{\partial \overset{\circ}{A_1}}{\partial s} = \frac{1}{b_0}\frac{3p^2p\varepsilon-3p\varepsilon+4p}{12p^2p\varepsilon}h_0$$

$$\overset{\circ}{A_2} = \frac{-1+5p-3p^2(1+\varepsilon)-\varepsilon+3p^3-4p\varepsilon}{24p^2\varepsilon}$$

Здесь верхний индекс «∘» означает, что соответствующая величина вычислена при $s = s_0$.

4. Уравнения Буссинеска для потока в узких каналах. В рассматриваемом ниже случае предлагается другой подход к написанию уравнений для длинных волн в случае узких каналов, причем явным образом вычисляются необходимые для написания уравнений Буссинеска коэффициенты и легко могут быть получены приближения, следующие за уравнениями Буссинеска.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной жидкости в узком горизонтальном цилиндрическом канале с произвольной формой поперечного сечения.

Осредняя уравнение неразрывности по ширине канала с использованием граничных условий получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(b(z)\langle v_x\rangle)+\frac{\partial}{\partial z}(b(z)\langle v_z\rangle)=0$$

Здесь $\langle v_x\rangle$ и $\langle v_z\rangle$ – средние значения скорости на прямой $x = \text{const}$, $z = \text{const}$, $\langle v_x\rangle$ и $\langle v_z\rangle$ в узком канале связаны с осредненным по ширине потенциалом формулами:

$$\langle v_x\rangle=\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial x}$$

$$\langle v_z\rangle=\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial z}+\frac{b'(z)}{b(z)}\left(\langle\varphi\rangle-\frac{\varphi(b/2)+\varphi(-b/2)}{2}\right)$$

Так как канал узкий, то последняя формула может быть заменена приближенно (с ошибкой порядка $(b/h)^3$) соотношением:

$$\langle v_z\rangle=\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial z}$$

Уравнение неразрывности запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b(z)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(b(z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0 \tag{4.1}$$

Здесь среднее значение потенциала $\langle\varphi\rangle$ обозначено через φ.

Для вывода уравнений длинных волн представим потенциал φ в виде

$$\varphi=\varphi_0(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x,t)f_n(z) \tag{4.2}$$

При рассмотрении потоков над плоским дном или в каналах прямоугольного сечения используется аналогичное представление (см. [7]), где $f_n(z) = z^{2n}$. При этом подстановка выражения (4.2) в уравнение (4.1) и рассмотрение членов при одинаковых степенях z с использованием граничного условия на дне показывает, что ненулевые φ_n связаны условием $\varphi_{n+1} \sim \partial^2\varphi_n/\partial x^2$. Для длинных волн в узких каналах произвольной формы определим последовательность функций φ_n с помощью равенств

$$\varphi_{n+1}=\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} \tag{4.3}$$

Для длинных волн дифференцирование по x увеличивает порядок малости соответствующей величины. Подставим ряд (4.2) в уравнение (4.1).

Приравнивая нулю члены порядка $\partial^2\varphi_n/\partial x^2$ получим

$$(bf'_{n+1})'=-bf_n,\quad n>0 \tag{4.4}$$

$$f_{n+1}=-\int_0^z\frac{1}{b}\int_0^\eta bf_n d\zeta d\eta \tag{4.5}$$

Здесь учтено граничное условие $\partial\varphi/\partial z = 0$ ($z = 0$) из которого следует, что $f'_n = 0$ при $z = 0$.

Формула (4.5) дает возможность найти последовательно все f_n, $n > 0$ ($f_0 = 1$).

Рассмотрим теперь граничное условие на свободной поверхности. Учитывая, что канал узкий, эти условия запишем в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (z=h) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)+gh=0 \quad (z=h) \tag{4.7}$$

Подставим ряд (4.2) в условия (4.6), (4.7). Если оставить в полученных выражениях только члены, содержащие низшие производные по x, то с учетом условия (4.3) получим

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}f_1'(h)=0 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2+gh=0 \tag{4.9}$$

Если продифференцировать (4.9) по x и использовать соотношение $u=\partial\varphi_0/\partial x$ (см. формулу (4.12)), то получим уравнения теории мелкой воды в узком канале произвольного поперечного сечения.

Заметим, что форма сечения канала сказывается только через величину $f_1'(h)=-s/B=-\langle h\rangle$, ($B$ – ширина потока поверху).

Теперь учтем члены следующего порядка малости. Получим систему, которую можно назвать системой уравнений Буссинеска для узких каналов

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3}f_1(h)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}f_1'(h)-\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4}f_2'(h)=0 \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}+\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^2\partial t}f_1(h)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3}f_1(h)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}\right)^2(f_1')^2+gh=0 \tag{4.11}$$

Четвертый и пятый члены уравнения (4.11) содержат более высокий порядок дифференцирования по x. Однако отношение второго члена к четвертому конечно. Поэтому в уравнении (4.11) сохранены все члены.

Введем в рассмотрение среднюю по поперечному сечению скорость потока, которую обозначим u. Имеем с точностью до малых высшего порядка

$$u=\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3}\Phi(h)=\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Phi(h), \quad \Phi(h)=\left(-\frac{B}{s}\right)f_2'(h) \tag{4.12}$$

Используя соотношение (4.12), можно переписать систему (4.10), (4.11) так, чтобы она содержала в качестве неизвестных функций h и v.

Выпишем явно линеаризованные уравнения Буссинеска для узких каналов (считая $v/\sqrt{gh}$ и $(h-h_0)/h_0$ малыми)

$$h_t-f_1'(h_0)v_x=0 \tag{4.13}$$

$$v_t+(f_1(h_0)-\Phi(h_0))v_{xtt}+gh_x=0 \tag{4.14}$$

$$f_1'(h_0)=-s_0/B_0, \quad \Phi(h_0)=(-B_0/s_0)f_2'(h_0)$$

5. Уравнения 2-го приближения для узких каналов. В заключение приведем систему уравнений длинных волн в узких каналах, представляющих следующее приближение, по сравнению с уравнениями Буссинеска (уравнения 2-го приближения)

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3}f_1(h)\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^5\varphi_0}{\partial x^5}f_2(h)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}f_1'(h)-$$
$$-\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}f_2'(h)-\frac{\partial^6\varphi_0}{\partial x^6}f_3'(h)=0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}+\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^2\partial t}f_1(h)+\frac{\partial^5\varphi_0}{\partial x^4\partial t}f_2(h)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3}\right)^2 f_1^2(h)\right)+$$
$$+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3}f_1(h)+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial^5\varphi_0}{\partial x^5}f_2(h)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\right)^2(f_1'(h))^2+$$
$$+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}f_1'(h)f_2'(h)+gh=0 \tag{5.2}$$

Здесь f_1, f_2, f_3 – определяются формулами (4.5). В линейном приближении уравнения (5.1), (5.2) имеют вид ($h = h_0$ соответствует невозмущенному состоянию, $h = h_0 + H$).

$$\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}f_1'(h_0)-\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}f_2'(h_0)-\frac{\partial^6\varphi_0}{\partial x^6}f_3'(h_0)=0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^2\partial t}f_1(h_0)+\frac{\partial^5\varphi_0}{\partial x^4\partial t}f_2(h_0)+gH=0 \tag{5.4}$$

Системе (5.3), (5.4) соответствует дисперсионное соотношение

$$\omega^2(1-k^2f_1(h_0)+k^4f_2(h_0))+g(k^2f_1'(h_0)-k^4f_2'(h_0)+k^6f_3'(h_0))=0$$

Найдем из него зависимость ω от k в явном виде

$$\omega=\pm k\sqrt{g}\left(\frac{-f_1'(h_0)+k^2f_2'(h_0)-k^4f_3'(h_0)}{1-k^2f_1(h_0)+k^4f_2(h_0)}\right)^{0,5}$$

Из формул (4.5) видно, что $f_1(h_0)<0$, $f_1'(h_0)<0$, $f_2(h_0)>0$, $f_2'(h_0)>0$, $f_3'(h_0)<0$. Поэтому действительным значениям k соответствуют только действительные значения ω. Это означает корректность уравнений 2-го приближения.

Заключение. Используемый выше метод вывода уравнений, описывающих длинные волны, существенно опирался на предположение, что свободная поверхность жидкости слабо зависит от поперечной координаты, которое справедливо при рассмотрении следующего за теорией мелкой воды приближения. При рассмотрении более высоких приближений это предположение справедливо для волн в узких каналах. Эти два случая и рассмотрены в работе.

Выведены уравнения, приближенно описывающие длинные волны на поверхности идеальной жидкости в каналах произвольного сечения, учитывающие дисперсию волн (уравнения типа Буссинеска). При выводе уравнений малость амплитуды не предполагалась. Для некоторых конкретных форм поперечного сечения получены выражения для функций, входящих в уравнения. В случае узких каналов уравнения Буссинеска и уравнения следующего приближения выписаны в явном виде для каналов с произвольной формой поперечного сечения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peregrine D.H.* Long waves in a uniform channel of arbitrary cross-section // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. Pt 2. P. 353–365.
2. *Peregrine D.H.* Solytary waves in trapezoidal channels // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. Pt 1. P. 1–6.
3. *Groves Mark D.* Hamiltonian long wave theory for water waves in a channel // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1994. V. 47. Pt 3. P. 367–404.
4. *Teng Michelle H., Wu Theodor Y.* Nonlinear water waves in channels of arbitrary shape // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 211–233.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Эглит М.Э.* Неустановившиеся движения в руслах и на склонах. М.: Изд-во МГУ, 1986. 95 с.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.VII.1995