

УДК 532.529 : 551.213.3

© 1996 г. О.Э. МЕЛЬНИК

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВУЛКАНИЧЕСКИХ ИЗВЕРЖЕНИЯХ СИЛЬНОВЯЗКИХ ГАЗОНАСЫЩЕННЫХ МАГМ

Приводится нестационарная модель, описывающая динамику извержения сильновязких газонасыщенных магм, обобщающая стационарную [1]. Исследуется эволюция извержения при переходе между различными стационарными режимами. Показано, что при этом могут возникать незатухающие колебания расхода магмы с периодом от десятков минут до нескольких часов.

Простейшие стационарные одномерные модели таких течений [2–4] состоят из законов сохранения массы жидкого и газового компонентов и уравнений изменения импульса для смеси в целом и состояния в пузырьковой и газозвешной зонах и содержат только одно дифференциальное уравнение. При этом основные различия возникают при описании механизма перехода от пузырьковой жидкости к газозвеси. В модели [1] учитываются неравновесность давления в пузырьке и в жидкости, скоростная и температурная неравновесность частиц газозвеси. Переходная область моделируется разрывом – волной дробления. Проведены расчеты истечения магмы при заданном перепаде давлений между очагом и атмосферой и длине канала. Показано, что при определенных значениях параметров задачи решение, как и в [4], не единственно. Переход от одного режима к другому в рамках квазистационарного подхода происходит скачкообразно при монотонном изменении определяющих параметров и сопровождается коренной перестройкой течения в канале.

В [5] рассматривается нестационарный аналог модели [1] и приводятся результаты расчетов эволюции извержения при скачкообразном и синусоидальном изменении давления в очаге. Ранее нестационарные модели течения магмы в канале вулкана не предлагались.

**1. Постановка задачи.** Приведем обобщение на нестационарный случай модели вулканического извержения газонасыщенных магм [1].

Так как наиболее интересные явления происходят при сравнительно малых давлениях в очаге, когда гомогенная зона отсутствует, не будем рассматривать давления, большие давления насыщения. Считаем, что в канал из очага вытекает пузырьковая жидкость с массовой долей газовой фазы, зависящей от давления в очаге. По мере роста пузырьков давление газа в них начинает заметно превышать давление в жидкости как за счет увеличения скорости смеси, так и за счет увеличения ее вязкости по мере уменьшения массовой доли растворенного газа. Когда разность давлений в пузырьке и жидкости превышает критическое значение, определяемое прочностью материала на разрыв, межпузырьковые перегородки разрываются и среда переходит в газозвесь.

Основываясь на анализе стационарной модели [1], в нестационарном случае будем учитывать только наиболее существенные процессы. В пузырьковой жидкости предполагаем, что массообмен между пузырьком и жидкостью происходит равновесно, а течение смеси изотермическое. В этих предположениях система уравнений в безраз-

мерных переменных примет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho V^2 + Eu p_s}{\partial x} = -(\rho + F_c); \quad p_s = \alpha p_2 + (1 - \alpha) p_1 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V \frac{\partial a}{\partial x} = C_a \frac{a}{4\mu} (p_2 - p_1); \quad c = c_0 \sqrt{p_2}; \quad \alpha = \alpha_* a^3 n$$

$$\rho_1 = (1 - \alpha)(1 - c); \quad \rho_2 = \delta \rho_2^0 \alpha + (1 - \alpha)c; \quad p_2 = p_2^0$$

$$Ar = \frac{\mu_0 V_0}{\rho_0 g d^2}; \quad Eu = \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2}; \quad \delta = \frac{p_0}{\rho_0 R T_0}$$

Здесь  $\rho_1, \rho_2$  – приведенные плотности жидкости и газа, символы с верхним индексом «0» — их истинные значения,  $V$  – скорость смеси,  $\alpha, n$  – объемная и числовая концентрация пузырьков,  $c$  – массовая доля растворенного газа,  $p_1$  и  $p_2$  – давления в пузырьке и жидкости. Плотность смеси и скорость обезразмерены к плотности и характерной скорости магмы без пузырьков соответственно, давление – к давлению насыщения при заданной массовой доле растворенного газа.

Система (1.1) состоит из уравнений неразрывности для компонент смеси, уравнения импульса для смеси в целом с учетом сил тяжести и сопротивления канала  $F_c$ , а также уравнения Рэлея – Ламба без учета инерции жидкости вокруг растущего пузырька.

Поскольку избыточное давление в пузырьке нарастает экспоненциально быстро [1], пренебрежем вкладом разности давлений  $p_1$  и  $p_2$  в давление смеси  $p_s$ , что существенно только в узкой переходной зоне между пузырьковой жидкостью и газозвесью. Уравнение для роста пузырька отщепляется от системы (1.1) и служит для определения избыточного давления. При этом система (1.1) приводится к системе уравнений изотермической газовой динамики со сложным уравнением состояния.

При написании системы уравнений газозвеси приняты следующие упрощающие положения, подтверждающиеся стационарными расчетами. Во-первых, температуру частиц считаем постоянной. Это оправдывается большой теплоемкостью и размерами частиц ( $\approx 1$  мм + 1 см). Во-вторых, пренебрежем изменением температуры газа, так как существует интенсивный теплообмен между газом и частицами. При этом на выходе из канала вулкана, где концентрация частиц мала, а скорость расширения газа значительна, истинная температура газа может уменьшиться не более чем на 3 + 5 %. Газозвесь считаем монодисперсной.

В этом случае динамика газозвеси описывается уравнениями неразрывности и импульса для каждой из компонент с учетом силы взаимодействия  $F_{12}$  и уравнением состояния для газовой фазы. Введя приведенные плотности частиц и газа  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно, запишем ее в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 V_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 V_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1 V_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 V_1^2}{\partial x} = Eu (F_{12} - \rho_1) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho_2 V_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 V_2^2 + Eu p}{\partial x} = -Eu F_{12}$$

$$p = \frac{\rho_2}{\delta(1 - \rho_1)}; \quad F_{12} = C_\mu (\rho_1, \rho_2) \frac{(V_2 - V_1)^2}{2}$$

$$\rho_1 = 1 - \beta; \quad \rho_2 = \rho_2^0 \beta$$

Переходная область между пузырьковой жидкостью и газозвесью ввиду малости ее толщины по сравнению с характерными размерами задачи моделируется разрывом – волной дробления. Система соотношений на ней для стационарного случая выписана в [1]. В сделанных выше предположениях о течении в пузырьковой жидкости и газозвеси она приобретает вид

$$(1 - \alpha)(S - V) = (1 - \beta)(S - V_1)$$

$$\rho_2^- \alpha (S - V) = \rho_2^+ \beta (S - V_2) \quad (1.3)$$

$$Eu p_s + \rho^- V(S - V) = Eu p + \rho_2 V_2(S - V_2) + \rho_1 V_1(S - V_1)$$

$$F_{12} = \rho_1; \quad p_2 - p_1 = \Delta p_*$$

Здесь дополнительно введены следующие обозначения:  $S$  – скорость волны дробления,  $\beta$  – объемная доля газа. Первые два соотношения выражают законы сохранения массы для жидкой и газовой фаз, третье – закон сохранения импульса для смеси в целом, четвертое есть условие псевдооживления частиц на выходе из зоны дробления, выписываемое вместо закона изменения импульса одной из фаз, и пятое – условие начала дробления (разность давлений в пузырьке и жидкости достигает критического значения). Поскольку движение в пузырьковой жидкости и газозвеси дозвуковое, с разрыва уходят четыре характеристики, следовательно, пяти условий достаточно для его эволюционности.

В качестве граничного условия на входе в канал будем задавать закон изменения давления в очаге. Поскольку извержение часто происходит из периферического очага [6], связанного с нижележащей питающей системой, рассмотрим следующую связь между скоростью изменения давления в очаге и количеством вещества в нем:

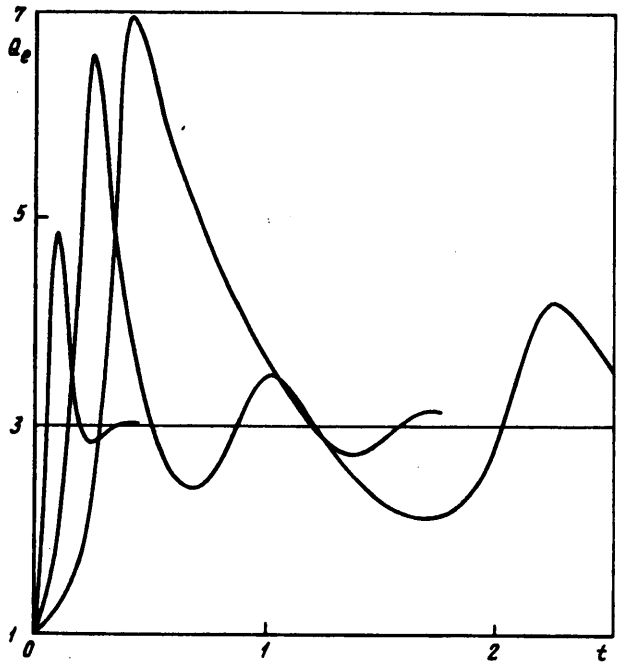
$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{(Q - Q_0)}{\tau}; \quad Q_0, \quad \tau = \text{const} \quad (1.4)$$

Здесь  $Q$ ,  $Q_0$  – расходы магмы, вытекающей из очага и втекающей в него из питающей системы,  $\tau$  – время релаксации давления в очаге. Если расход подтекающей магмы больше расхода вытекающей, давление в очаге растет. В противном случае  $p_0$  падает. Время релаксации зависит от многих параметров вулканической системы, таких как сжимаемость магмы и упругость стенок очага, его размера, и других. В данной модели оно будет считаться постоянным. Чем больше очаг и чем меньше упругость его стенок, тем больше время релаксации. Случай  $\tau = 0$  соответствует заданию расхода магмы на входе в канал, а  $\tau = \infty$  – заданию  $p_0 = \text{const}$ .

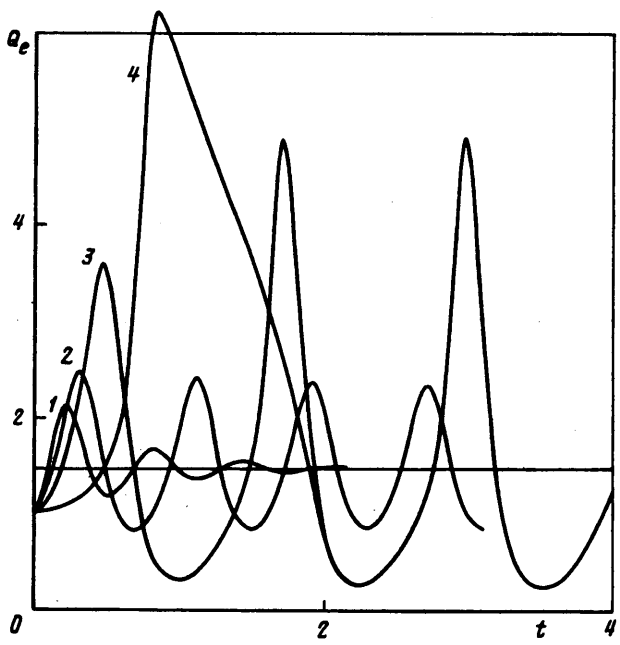
На выходе из канала задается давление, равное атмосферному, если течение дозвуковое, или скорость, равная местной скорости звука. Сверхзвуковые режимы не рассматриваются.

Численная реализация модели описана в [5]. В каждой из зон на равномерной сетке по чисто неявной компактной разностной схеме, предложенной в [7], решаются системы (1.1) и (1.2). Затем на четырех точках в окрестности волны разрешаются законы сохранения (1.4); определяются значения переменных в соседних от разрыва точках и скорость самого разрыва. Точность расчетов для чисто неявной схемы порядка  $[\Delta t, h^3]$  при этом она абсолютно устойчива.

**2. Расчеты нестационарных явлений динамики вулканического извержения.** Стационарным решениям на плоскости  $Q_e - p_0$  ( $Q_e$  – расход на выходе,  $p_0$  – давление в очаге) соответствует  $S$ -образная кривая [1] (кривая 5 на фиг. 3). Таким образом, фиксированному давлению в очаге могут соответствовать до трех стационарных режимов истечения с расходами, различающимися на порядки. В наиболее интенсивном режиме большая часть канала заполнена газозвесью, сила сопротивления и средний вес смеси



Фиг. 1



Фиг. 2

малы. В нижнем, наоборот, канал занят пузырьковой жидкостью. Исследуем переходные процессы с одного стационарного режима на другой. В качестве начальных условий во всех расчетах используем стационарное решение, при этом начальная скорость волны дробления равна нулю.

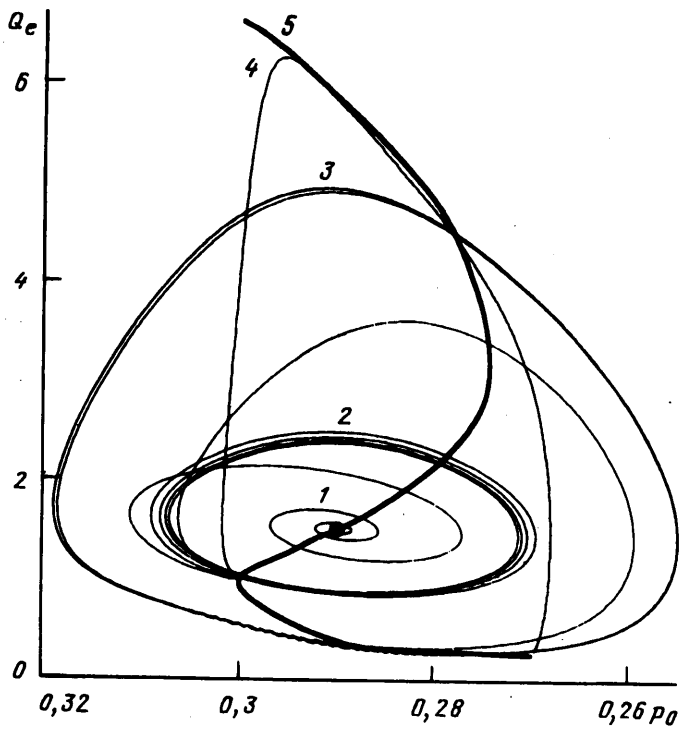
Пусть связь между давлением в очаге и расходом задается соотношением (1.4). Зафиксируем начальное состояние, например, стационарным решением в точке с вертикальной касательной между нижним и средним режимами, при этом давление в очаге и расход отличаются от  $p_0, Q_0$ . Исследуем характер процессов в системе очаг – канал при различных временах релаксации  $\tau$ . Граничное условие допускает стационарное решение с  $Q = Q_0$  и  $dp/dt = 0$ . Топология решения зависит от величин  $\tau$  и  $Q_0$ . Ниже приведены результаты расчетов при заданном расходе подтекающей в очаг магмы, соответствующем устойчивому верхнему режиму ( $Q_0 = 3$ ) и промежуточному неустойчивому ( $Q_0 = 1,5$ ).

Рассмотрим сначала случай  $Q_0 = 3$ . На фиг. 1 изображены зависимости расхода от времени для  $\tau = 1, 10, 50$  (кривые 1–3 соответственно). Общим свойством зависимости  $Q_e(t)$  является стабилизация извержения с расходом, равным  $Q_0$ . При этом давление в очаге стремится к постоянной величине, соответствующей данному расходу в стационарном решении. На плоскости  $Q_e - p_0$  решение представляется в виде сходящихся к точке  $(p_0, Q_0)$  спиралей. Время стабилизации увеличивается с увеличением  $\tau$  и составляет, например, для  $\tau = 10$  около двух безразмерных времен или порядка часа при принятых значениях определяющих параметров.

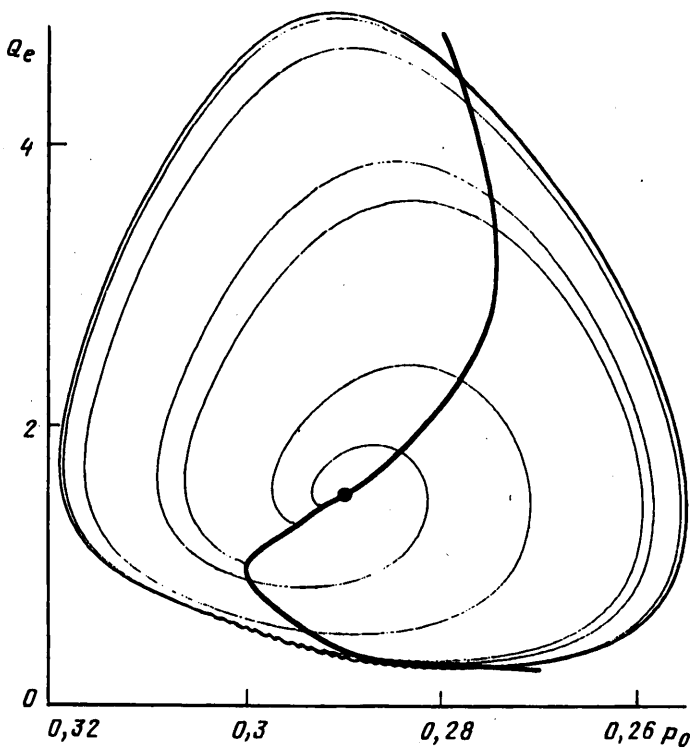
В случае  $Q_0 = 1,5$  возможны два предельных решения: одно – стационарное с  $Q_e = Q_0$ , другое – предельный цикл – незатухающие во времени колебания. Выход на тот или иной тип решения определяется только величиной  $\tau$ . На фиг. 2 и 3 на плоскостях  $Q_e - t$  и  $Q_e - p_0$  представлена картина решений для  $\tau = 2, 4, 10, 100$  (кривые 1–4 соответственно). При  $\tau < \tau_*$  (в данном случае порядка 4) решение ведет себя так же, как и в рассмотренном выше случае. При этом декремент затухания колебаний стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \tau_*$ . При  $\tau = \tau_*$  рождается предельный цикл. Дальнейшее увеличение  $\tau$  приводит к возрастанию разницы максимального и минимального расходов в цикле. При очень больших  $\tau$  (кривая 4) решение квазистационарно проходит цикл гистерезиса, связанный со структурой стационарного решения. Расход увеличивается до значения в верхнем режиме, затем при уменьшении давления в очаге происходит движение по верхней части S-образной кривой, при этом расход в канале практически постоянен по длине, а скорость волны мала. Когда давление в очаге падает ниже давления в точке с вертикальной касательной, происходят нестационарный переход на нижний режим и дальнейшее квазистационарное движение по нему с увеличением давления. Затем процесс повторяется. Следует обратить внимание, что при  $\tau$ , близком к критическому значению, колебания расхода на выходе имеют синусоидальный характер, при уменьшении же  $\tau$  падение расхода происходит быстрее, чем его увеличение. Это связано с видом стационарной зависимости  $Q(p_0)$ .

Характерное время колебаний увеличивается с увеличением  $\tau$ . Оно может составлять величины от десятков минут до нескольких часов в зависимости от конкретных значений определяющих параметров. Поскольку максимумы расхода достаточно узкие (например, для  $\tau = 10$  порядка нескольких минут) визуально они будут восприниматься как периодические взрывы на фоне умеренного извержения.

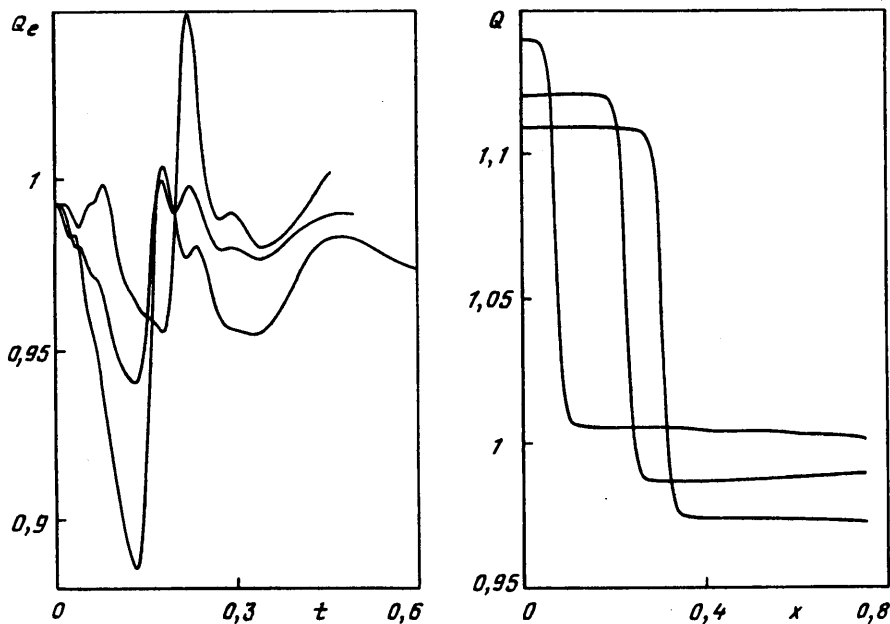
Поведение решения при  $t \rightarrow \infty$  не зависит от начальной точки. На фиг. 4 приведена зависимость расхода от давления в очаге при различных начальных условиях и  $\tau = 10$ . Очевидно, что чем ближе начальная точка к критической  $-(p_0, Q_0)$ , тем большее время требуется для выхода на предельный цикл. При малых  $\tau$  стабилизация решения, наоборот, происходит быстрее. Таким образом, форма предельного цикла есть характерное свойство системы очаг – канал. Оно связано с наличием S-образной зави-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

симости расхода от давления в очаге в стационарном решении и видом граничного условия, но не зависит от начальных условий.

Стабилизация расхода на неустойчивом режиме при малых  $\tau$  может быть легко объяснена из предельного перехода  $\tau \rightarrow 0$ . В этом случае (бесконечно малый или нерастяжимый очаг) граничное условие вырождается в  $Q = Q_0$ , а при заданном расходе давление в очаге определяется однозначно.

В отличие от классической динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями с двумя переменными, для определения состояния системы очаг – канал недостаточно задания точки на фазовой плоскости  $Q_e - p_0$ . Через одну точку проходит бесконечно много интегральных кривых, различающихся распределением параметров по каналу вулкана.

Рассмотрим возможность возникновения пауз в извержении при оттоке магмы в каком-либо сечении канала. Эта ситуация может реализоваться, когда в стенке канала вулкана происходит прорыв и магма выходит на поверхность по параллельному каналу [6]. В [8] на основании стационарного рассмотрения предсказывалась такая возможность.

Для моделирования процессов в канале в систему уравнений в пузырьковой жидкости введены дополнительные члены, учитывающие уменьшение расхода магмы и потерю импульса за счет этого процесса. Давление в очаге считалось постоянным. Варьировалась координата места, в котором оттекает магма, суммарный расход оттекающей магмы составлял 10% от исходного. На фиг. 5 представлена зависимость расхода на выходе  $Q_e$  от времени (начальный участок 5, а) и устанавливающееся в канале стационарное распределение расхода (5, б) при постоянном оттоке. Параметром кривых является место оттока магмы.

Рассмотрим, какие процессы будут происходить в канале вулкана при оттоке магмы. Расход в области глубже места оттока начинает возрастать, чтобы компенсировать потери массы. За счет инерционности системы значение расхода превышает необходимое. В результате серии последовательных колебаний устанавливается новый стационарный профиль расхода. На выходе расход сначала уменьшается, когда доходит волна падения расхода, затем следует его увеличение, связанное с ростом

расхода в причаговой части канала. В установившемся решении расход на выходе остается практически таким же, как и был вначале. При этом, чем ближе координата сужения к концу пузырьковой зоны, тем быстрее происходит падение расхода на выходе и тем оно больше. Напротив, если отток происходит в причаговой области, расход в основном канале резко увеличивается, и на поверхности после ослабления извержения наблюдается его значительное усиление.

Таким образом, для возникновения пауз в извержении необходимы очень интенсивный отток магмы и короткая зона газовзвеси так, чтобы волна падения расхода дошла до выхода раньше, чем расход в зоне до места оттока заметно возрастет.

**Заключение.** Впервые предложена нестационарная модель вулканического извержения сильновязких газонасыщенных магм, учитывающая наличие в потоке двух зон – пузырьковой жидкости и газовзвеси, разделенных подвижной границей. Исследована зависимость расхода магмы в жерле вулкана от закона изменения давления в очаге  $p_0$ . Если скорость изменения давления в очаге пропорциональна разности расходов подтекающей в очаг магмы  $Q_0$  и вытекающей из него  $Q$ , возможны два типа предельных при  $t \rightarrow \infty$  решений: либо стабилизация решения около точки  $(p_0, Q_0)$ , либо предельный цикл с незатухающими периодическими колебаниями. Выход системы на то или иное решение зависит от времени релаксации давления в очаге  $\tau$ . Если  $\tau$  мало, реализуется стационарное решение, даже если  $Q_0$  соответствует неустойчивой ветви стационарной зависимости  $Q(p_0)$ . При больших  $\tau$  реализуется предельный цикл, причем период колебаний увеличивается с увеличением  $\tau$  и составляет величину от десятков минут до нескольких часов в зависимости от значений определяющих параметров. Поведение решения при  $t \rightarrow \infty$  не зависит от начальной точки.

Рассмотрена возможность возникновения пауз в извержении при оттоке магмы в каком-либо сечении канала. Показано, что для возникновения пауз в извержении необходимы очень интенсивный отток магмы и короткая зона газовзвеси.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17622).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А.А. Мельник О.Э. Об особенностях динамики извержения сильновязких газонасыщенных магм // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 49–60.
2. Wilson L., Sparks R.S.J., Walker G.P.L. Explosive volcanic eruptions. IV. The control of magma properties and conduit geometry on eruption column behaviour // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1980. V. 63. № 1. P. 117–148.
3. Wilson L. Relationship between pressure, volatile content and ejecta velocity in three types of volcanic explosion // J. Volcanol. and Geotherm. Res. 1981. V. 8. № 2–4. P. 297–313.
4. Селезин Ю.Б. Динамика дисперсионного режима вулканических извержений. 1. Теоретическое описание движения магмы в канале вулкана // Вулканол. и сейсмол. 1983. № 5. С. 9–17.
5. Бармин А.А., Мельник О.Э. Моделирование нестационарных явлений динамики извержения сильновязких газонасыщенных магм // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 1996. №4. С. 78–83.
6. Большое трещинное Толбачинское извержение: Камчатка, 1975–1976. М.: Наука, 1984. 637 с.
7. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
8. Селезин Ю.Б. Динамика дисперсионной струи эксплозивного вулканического извержения // Вулканология и сейсмология. 1982. № 3. С. 18–29.