

УДК 532.525.2

© 1996 г. К.Е. ДЖАУГАШТИН, Б.С. ШАЛАБАЕВА

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СЛЕД В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В линейном приближении на основе уравнений пограничного слоя и уравнений для одно-точечных моментов второго порядка полей скорости и температуры, замкнутых на основе полуэмпирических гипотез Колмогорова – Ротта, методом интегральных соотношений решена задача о развитии следа за осесимметричным телом в температурно стратифицированном потоке несжимаемой жидкости. Выявлен анизотропный характер расширения следа за телом.

Как показывают экспериментальные исследования, закономерности развития течений в следе в стратифицированной среде качественно отличаются от случая того же течения в однородной среде [1–4]. Например, если в однородной среде ширина плоского следа непрерывно возрастает с удалением от тела, то в устойчиво стратифицированной среде она, достигнув некоторого предельного значения, далее остается постоянной. Более сложная картина течения наблюдается при обтекании осесимметричного тела: в кормовой области следа ширина зоны смешения в горизонтальном направлении непрерывно возрастает, в то время как вертикальный размер следа вначале возрастает, достигает максимальной величины и далее уменьшается (коллапс следа). При дальнейшем удалении от тела толщина осесимметричного следа, как и в плоском следе, достигает предельного значения и далее остается постоянной. Указанные эффекты в двумерном и трехмерном течениях связаны с действием архимедовых сил, подавляющих пульсационное движение и вызывающих схлопывание следа [5, 6].

Ниже на основе уравнений пограничного слоя в линейном приближении и одно-точечных моментов второго порядка полей скорости и температуры выполнен расчет следа за осесимметричным телом, обтекаемым потоком при произвольной стратификации.

1. Рассмотрим развитое турбулентное стационарное течение в следе за осесимметричным телом в стратифицированной среде. Исходное уравнение движения в рамках теории пограничного слоя в линейном приближении имеет вид [7]

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \langle -uv \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle -uw \rangle \quad (1.1)$$

где x , y , z – продольная, вертикальная и горизонтальная координаты, U – дефект скорости. Уравнение записано в безразмерном виде, в качестве масштаба скорости и характерного размера выбраны скорость набегающего потока U_0 и поперечный размер d обтекаемого тела.

Для замыкания уравнения движения (1.1), как и в [5, 7], воспользуемся уравнениями для одноточечных моментов второго порядка полей скорости и температуры, пренебрегая в них диффузионными членами и замыкая их в свою очередь на основе гипотез Колмогорова – Ротта [7]. Пространственное течение будем считать чисто сдвиговым, т.е. предполагается наличие только продольной компоненты скорости,

зависящей от поперечных координат y и z ($u=u(y, z)$, $v=w=0$). Тогда моментные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_k} + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k \frac{\sqrt{E}}{L} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) + \\ & + \frac{2}{3} c \delta_{ij} \frac{E^{3/2}}{L} - \beta g (\delta_{2i} \langle t u_j \rangle + \delta_{2j} \langle t u_i \rangle) = 0 \\ & \langle t u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} + k_i \frac{\sqrt{E}}{L} \langle u_i t \rangle - \delta_{2i} \beta g \langle t^2 \rangle = 0 \\ & \langle t u_k \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} + c_i \frac{\langle t^2 \rangle \sqrt{E}}{L} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь k , k_p , c , c_i – эмпирические константы, остальные обозначения общепринятые.

В покомпонентной записи уравнения (1.2) имеют вид

$$\begin{aligned} & \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial Y} + \langle uw \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{k}{2} \frac{\sqrt{E}}{L} \left(\langle u^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) + c \frac{E^{3/2}}{L} = 0 \\ & \frac{k}{2} \frac{\sqrt{E}}{L} \left(\langle v^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) + \frac{c}{3} \frac{E^{3/2}}{L} - \beta g \langle tv \rangle = 0 \\ & \frac{k}{2} \frac{\sqrt{E}}{L} \left(\langle w^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) + \frac{c}{3} \frac{E^{3/2}}{L} = 0 \\ & \langle v^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial Y} + \langle vw \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + k \frac{\sqrt{E}}{L} \langle uv \rangle - \beta g \langle tu \rangle = 0 \\ & \langle vw \rangle \frac{\partial U}{\partial Y} + \langle w^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + k \frac{\sqrt{E}}{L} \langle uw \rangle = 0 \\ & k \frac{\sqrt{E}}{L} \langle uw \rangle - \beta g \langle tw \rangle = 0 \\ & \langle tv \rangle \frac{\partial U}{\partial Y} + \langle tw \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + \langle uv \rangle \frac{\partial T}{\partial Y} + k_i \frac{\sqrt{E}}{L} \langle tu \rangle = 0 \\ & \langle v^2 \rangle \frac{\partial T}{\partial Y} + k_i \frac{\sqrt{E}}{L} \langle tv \rangle - \beta g \langle t^2 \rangle = 0 \\ & \langle vw \rangle \frac{\partial T}{\partial Y} + k_i \frac{\sqrt{E}}{L} \langle tw \rangle = 0, \quad \langle tv \rangle \frac{\partial T}{\partial Y} + c_i \frac{\sqrt{E}}{L} \langle t^2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.3) – алгебраическая относительно моментов $\langle u_i u_j \rangle$, $\langle t u_i \rangle$, $\langle t^2 \rangle$ и величины L , имеющей размерность длины, что позволяет найти их как функции градиентов скорости ($\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$) и локального числа Ri

$$Ri = \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \left[\left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \right\}^2 \right]^{-1}$$

В известных авторам экспериментальных работах приводятся в основном данные по ширине следа в горизонтальном и вертикальном направлениях. Поэтому, ограничиваясь расчетом этих величин, приведем только выражения для касательных напряже-

ний трения

$$\begin{aligned} \langle -uv \rangle &= L^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \frac{\partial U}{\partial y} \Psi_y \\ \langle -uw \rangle &= L^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \frac{\partial U}{\partial z} \Psi_z \\ \Psi_y &= \Psi^{3/2} \frac{\Psi + b Ri}{(\Psi + a Ri)(\Psi + \frac{1}{\alpha} Ri)}, \quad \Psi_s = \sqrt{\Psi} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$a = 2 + \frac{k}{c}, \quad b = \frac{k}{c} - \frac{1}{\sigma_t}, \quad R' = \frac{Ri}{\sigma_t \alpha}, \quad \alpha = \frac{2}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right)$$

$$L^2 = \kappa(\delta_y^2 + \delta_z^2)$$

Эмпирическая константа κ оценивается из опытов по осесимметричному следу в однородной среде, оценка значений других констант была выполнена при расчете плоского следа за телом в стратифицированной среде [5]: $k/c=7$, $\sigma_t=k/k_f=0,75$, $c/c_f=1$.

Функция Ψ определяется из уравнения

$$\frac{\Psi}{1+\omega} \frac{(\Psi + bR')}{(\Psi + aR')(\Psi + \bar{R})} + \frac{\omega}{1+\omega} - \frac{\Psi}{\Psi + a\bar{R}} R' = \Psi \quad (1.5)$$

$$\omega = \left(\frac{\partial U}{\partial z} / \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$$

2. Преобразуем выражения для касательных напряжений трения и числа Ричардсона. Так как приближенное решение рассматриваемой задачи будет выполнено на основе интегрального метода пограничного слоя конечной толщины, заменим локальные скорости их конечно-разностными соотношениями

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_m}{\delta_y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_m}{\delta_z}$$

где $U_m = U_m(x)$ – скорость на оси следа, $\delta_y = \delta_y(x)$, $\delta_z = \delta_z(x)$ – толщина следа в вертикальном и горизонтальном направлениях. В результате получим

$$\langle -uv \rangle = v_y \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \langle -uw \rangle = v_z \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$v_y = \delta_y \kappa U_m \frac{(1+\omega)^{3/2}}{\omega} \Psi_y, \quad v_z = \delta_z \kappa U_m \frac{(1+\omega)^{3/2}}{\omega} \Psi_z$$

$$Ri = R_0 \frac{\delta_y^2}{U_m^2} \frac{1}{(1+\omega)}, \quad R_0 = \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \frac{d^2}{U_0^2}, \quad \omega = \left(\frac{\delta_y}{\delta_z} \right)^2$$

где v_y и v_z – коэффициенты эффективной турбулентной вязкости вдоль соответствующих осей, R_0 – число Ричардсона, вычисленное по режимным параметрам (U_0 , d , dT/dy – градиент температуры внешней среды).

С учетом (2.1) уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} = v_y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + v_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

Граничные условия соответствуют симметрии профиля скорости относительно плоскостей, проходящих через ось x перпендикулярно осям y и z , и равенству нулю значения скорости и ее первой производной (вследствие ожидаемой "гладкости" решения) на границе следа

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (y = z = 0) \quad (2.3)$$

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \left(\frac{y^2}{\delta_y^2} + \frac{z^2}{\delta_z^2} = 1 \right)$$

Предполагается, что поперечное сечение следа имеет в общем случае форму эллипса.

Решение этого уравнения вдали от тела будем искать в виде

$$U = U_m F(\varphi, \eta), \quad \varphi = \frac{y}{\delta_y}, \quad \eta = \frac{z}{\delta_z}, \quad F = [1 - (\varphi^2 + \eta^2)]^2 \quad (2.4)$$

где $F(\varphi, \eta)$ – универсальный профиль скорости, удовлетворяющий граничным условиям (2.3).

Уравнение типа теплопроводности (2.2) с анизотропным коэффициентом имеет точное решение в виде интеграла по поперечному сечению следа, для численного расчета которого требуется знание начального распределения скорости [9]. Однако поскольку экспериментальные данные по пространственному распределению скорости непосредственно за телом отсутствуют, то упомянутое решение непригодно для анализа закономерности развития следа в стратифицированной среде.

При решении задач о струйных и следовых течениях, обладающих осевой симметрией, обычно для определения масштабных величин используются уравнение движения, записанное для оси следа, и интегральное условие сохранения импульса [7]. В рассматриваемом же случае этого недостаточно для определения трех величин – U_m , δ_y , δ_z . Поэтому воспользуемся методом, примененным в [10]. Проинтегрируем уравнение (2.2) по толщине следа

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_y} U dy = v_y \frac{\partial U}{\partial y} \int_0^{\delta_y} dy + v_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\delta_y} U dy$$

Перейдем к универсальным переменным и запишем последнее уравнение для плоскости $z=0$. Тогда с учетом граничных условий (2.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U_m \delta_y \int_0^{\delta_y} F d\varphi \right) = v_z \frac{U_m \delta_y}{\delta_z^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\int_0^1 F d\varphi \right] \quad (2.5)$$

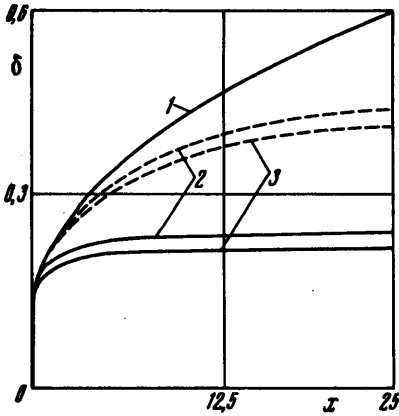
Перепишем уравнение (2.5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_m \delta_y) = \gamma v_z \frac{U_m \delta_y}{\delta_z^2} \quad (2.6)$$

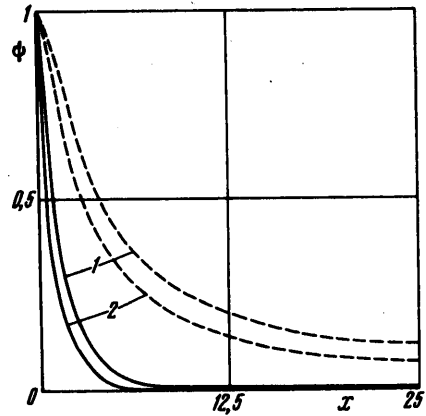
$$a = \left[\int_0^1 F d\varphi \right]_{\eta=0}, \quad b = \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2}, \quad \gamma = \frac{b}{a}$$

Интегрируя теперь уравнение (2.2) по ширине следа, аналогичным образом получим второе уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_m \delta_z) = \gamma v_y \frac{U_m \delta_z}{\delta_y^2} \quad (2.7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Ширина следа при устойчивой стратификации, $R_0=0; 50; 100$ (кривые 1–3). Толщина следа – сплошная линия, горизонтальная ширина – штриховая

Фиг. 2. Распределение функции ψ_y (сплошная) и ψ_z (штриховая) при устойчивой стратификации, $R_0=50; 100$ – кривые 1, 2

Третье уравнение соответствует условию сохранения импульса

$$\int_{-\delta_z}^{\delta_z} \int_{-\delta_y}^{\delta_y} U dy dz = \frac{\Pi}{4} C_x \quad (2.8)$$

которое в автомодельной области запишется в виде

$$U_m \delta_y \delta_z = \lambda \quad (\lambda = 3/4 C_x) \quad (2.9)$$

где C_x – коэффициент сопротивления.

Уравнения (2.6), (2.7) и (2.9) позволяют определить искомые величины U_m, δ_y, δ_z . После некоторых преобразований из этих уравнений получим

$$(\delta_z)'_x = C \frac{1}{\delta_z^2} \frac{(1+\omega)^{3/2}}{\omega} \psi_z, \quad (\delta_y)'_x = C \frac{1}{\delta_z \delta_y} \frac{(1+\omega)^{3/2}}{\omega} \psi_y \quad (2.10)$$

$$U_m = \frac{\lambda}{\delta_y \delta_z}, \quad C = \gamma \kappa \lambda$$

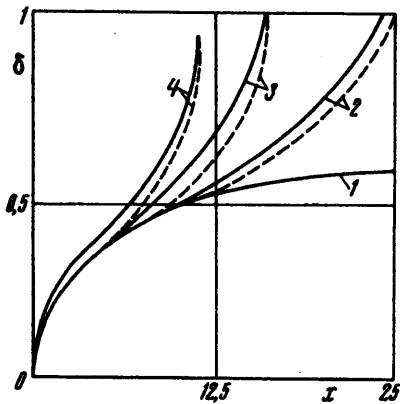
В рамках общепринятой схемы следа за точечным телом ширина следа в начале координат предполагается равной нулю: $\delta_y = \delta_z = 0$ ($x = 0$).

Практически при численном решении в области, примыкающей к точечному телу, ширина следа рассматривается как в однородной среде, поскольку влияние стратификации среды незначительно (при $x \rightarrow 0$ $Ri \rightarrow 0$). На расстоянии нескольких расчетных шагов по x соответствующее значение δ_y, δ_z принимается в качестве начальных условий для уравнений (2.10).

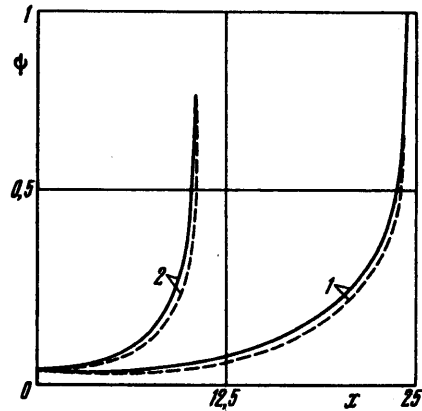
Для оценки постоянной C рассмотрим течение в однородной среде ($Ri=0$), когда $\delta_y = \delta_z = \delta$. Из уравнения $\delta' = (2\sqrt{2} / \delta^2) = C$ определим толщину следа

$$\delta = \sqrt[3]{6\sqrt{2} C x^{1/3}} \quad (2.11)$$

По опытным данным [11], $\delta = 0,2x^{1/3}$, откуда получим $C=10^{-3}$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Ширина следа при неустойчивой стратификации, $R_0=0; -0,1; -0,25; -0,5$ (кривые 1–4), толщина следа – сплошная, горизонтальная ширина – штриховая линия

Фиг. 4. Распределение функции ψ_1 (сплошная) и ψ_2 (штриховая) при неустойчивой стратификации, $R_0= -0,1; -0,5$ (кривые 1, 2)

3. Результаты численного расчета представлены на фиг. 1 ($R_0=0; 50; 100$ – кривые 1–3). Как и в опытных данных [1, 2], непосредственно вблизи тела утолщение следа происходит с одинаковой скоростью во всех направлениях. Затем толщина следа достигает некоторого максимального предельного значения и далее не изменяется (сплошная линия), в то же время горизонтальная ширина следа неограниченно увеличивается (штриховая линия). Эта особенность развития следа в стратифицированной среде связана с тем, что устойчивая вертикальная стратификация по температуре подавляет непосредственно пульсационное движение в вертикальном направлении и только вследствие обмена энергией пульсации по различным осям уменьшаются пульсации скорости в горизонтальном направлении. Это обстоятельство находит отражение в уравнениях баланса пульсационной энергии (1.5) и приводит в конечном счете к тому, что касательные напряжения трения по вертикали уменьшаются значительно сильнее, чем по горизонтали. Это видно на фиг. 2 ($R_0=50; 100$ – кривые 1, 2), где показаны изменения ψ_1 (сплошная линия) и ψ_2 (штриховая линия) вдоль оси следа.

Иная картина течения имеет место в неустойчиво стратифицированной среде. На некотором расстоянии от тела происходит резкое увеличение области следового течения, причем вертикальный размер следа превышает горизонтальный (фиг. 3, $R_0=0; -0,1; -0,25; -0,5$ – кривые 1–4), при этом скорость уменьшается до нуля. Это связано с тем, что при неустойчивой стратификации происходит генерация энергии пульсации, а поскольку архимедовы силы действуют непосредственно в вертикальном направлении, то ψ_1 (сплошная линия) превышает ψ_2 (фиг. 4, $R_0=-0,1; 0,5$ – кривые 1, 2).

Указанные эффекты усиливаются с ростом числа Ричардсона R_0 . При устойчивой стратификации вертикальный размер следа уменьшается, при неустойчивой – точка аннигиляции течения приближается к обтекаемому телу.

Заключение. При устойчивой стратификации среды ширина следа в горизонтальной плоскости с удалением от тела растет по степенному закону, в то время как значение толщины следа по вертикали принимает конечное значение. При неустойчивой стратификации среды ширина следа резко расширяется в обеих плоскостях и на некотором расстоянии от тела происходит размывание направленного течения в следе – размер области смешения стремится к бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schooley A.H., Stewart R.W.* Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with a vertical density gradient // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 15. Pt. 1. P. 83–96.
2. *Monroe H., Mei C.C.* The shape of two-dimensional turbulent wakes in density-stratified fluids // Report. Hydrodynamic Laboratory, M.I.T., Cambridge, Mass, 1968. № 110. 90 p.
3. *Merritt G.E.* Wake growth and collapse in stratified flow. // *Journal AIAA.* 1974. V. 12. № 7. P. 940–949.
4. *Чашечкин Ю.Д.* О характеристиках затопленных турбулентных струй в неоднородных жидкостях // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1974. Т. 10. № 12. С. 1331–1333.
5. *Джаугаштин К.Е.* Двумерный свободный пограничный слой в стратифицированной среде // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1977. № 3. С. 71–79.
6. *Онуфриев А.Т.* Турбулентный след в стратифицированной среде // *ПМТФ.* 1970. № 5. С. 68–72.
7. *Rotta J.C.* Statische theorie nichthomogener turbulenz // *Z. Phys.* 1951. V. 129. № 6. S. 547–572.
8. Турбулентные сдвиговые течения. Т. 1 // Под ред. А.С. Гиневского, М.: Машиностроение, 1982. 432 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
10. *Гнатюк В.В., Гнатюк Т.А., Джаугаштин К.Е.* Струи проводящей жидкости в поперечном магнитном поле // *Магнитная гидродинамика.* 1973. № 2. С. 41–48.
11. *Чеверей Р.* Турбулентный след за телом вращения // *Теоретические основы инженерных расчетов.* 1968. № 3. С. 164–173.

Алматы

Поступила в редакцию
11.ИИ.1994