

УДК 532.517.3

© 1996 г. А.А. МОНАХОВ

**ГРАНИЦА УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВНОГО ТЕЧЕНИЯ  
В СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ**

В работе представлены результаты экспериментального исследования границы устойчивости основного течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя концентрическими коаксиально вращающимися сферами. В пространстве определяющих параметров построена трехмерная поверхность устойчивости основного течения.

Задача представляет интерес для понимания движений, форма и устойчивость которых существенным образом зависит от сферической геометрии и наличия вращения. Это относится к некоторым задачам гео- и астрофизики, а также к ряду инженерных задач, к которым можно отнести сферические гироскопы и подшипники.

В сферической системе координат  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\phi$  основное течение характеризуется тремя компонентами скорости:  $V_r$ ,  $V_\vartheta$  и  $V_\phi$ , зависит от двух координат:  $r$ ,  $\vartheta$  и определяется тремя параметрами подобия:  $Re_1 = r_1^2 \Omega_1 / \gamma$ ,  $Re_2 = r_2^2 \Omega_2 / \gamma$  – числами Рейнольдса,  $\delta(r_2 - r_1)/r_1$  – относительной толщиной сферического слоя. Здесь  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы внутренней и внешней сфер,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – соответственно угловые скорости вращения сфер,  $\gamma$  – кинематическая вязкость жидкости. Движение жидкости задается вращением границ слоя.

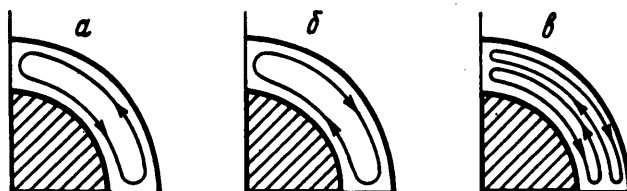
При малых числах  $Re$  течение представляет собой дифференциальное вращение жидкости вокруг оси [5]. С увеличением этого параметра на вращение накладывается меридиональная циркуляция и частица жидкости движется по спиральной траектории. Течение симметрично относительно оси вращения и плоскости экватора. Для различных значений отношения угловых скоростей сфер ( $\varepsilon = \Omega_2/\Omega_1$ ) возможны три вида меридиональной циркуляции. При вращении только внутренней сферы ( $\Omega_2 = 0$ ) циркуляция направлена от экватора вдоль внешней сферы к полюсу (фиг. 1, а). При вращении только внешней сферы ( $\Omega_1 = 0$ ) меридиональная циркуляция направлена от экватора вдоль внутренней сферы к полюсу (фиг. 1, б). При вращении сфер в разные стороны в некоторой области параметра  $\varepsilon$  наблюдается двухвихревая меридиональная циркуляция (фиг. 1, в).

Для малых чисел  $Re$  существует единственное стационарное решение уравнений Навье – Стокса, которое называется основным [1]. В дальнейшем рассматриваются только граница устойчивости основного течения и форма возмущения, приводящая к развитию вторичного режима.

Представленные результаты являются продолжением и некоторым обобщением данных цикла работ, начатых в Институте механики МГУ в 1975 г. Работа проводилась на установке с размерами внешней сферической оболочки  $r_2 = 150,08$  мм и сменными внутренними шарами, которые определяли относительную толщину сферического слоя  $\delta$  (0,1096; 0,1924; 0,2413). Значения чисел  $Re_1$  и  $Re_2$  изменялись в диапазоне от 0 до  $10^6$  за счет использования жидкостей с различными коэффициентами вязкости и изменения угловых ско-

ростей вращения сферических границ. Для регистрации потери устойчивости основным течением использовались различные методы визуализации, измерения момента вращения  $M$  и лазерная анемометрия. Так, добавление в малых количествах в жидкость алюминиевой пудры в сочетании со световым ножом дает возможность наблюдать изменение внутренней структуры течения. Кроме визуальной регистрации критическое значение  $Re^*$  определялось по излому в зависимости значения момента  $M$  от числа  $Re$ . С помощью лазерной анемометрии измерялись  $V_r$ - и  $V_\theta$ -компоненты скорости течения. При наличии трехмерного вторичного режима проводился фурье-анализ. Более подробное описание экспериментальной установки дано в [2, 3].

Поскольку сферическое течение зависит от трех параметров подобия, сначала рассматривается граница устойчивости основного течения для различных толщин слоя  $\delta$  в зависимости от числа  $Re_1$ , т. е. при вращении только внутренней сферы, затем граница устойчивости при вращении обеих сферических границ в одну и разные стороны для фиксированных значений  $\delta$  и в дальнейшем, обобщая эти данные, определяется трехмерная поверхность границы устойчивости основного течения в пространстве параметров  $Re_1, Re_2, \delta$ .



Фиг. 1. Направление меридиональной циркуляции при вращении границ слоя

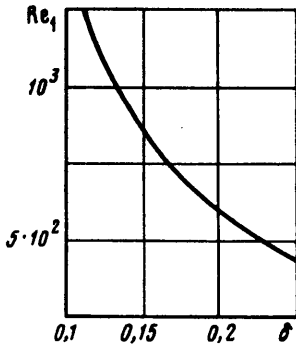
Течение жидкости в тонком сферическом слое ( $\delta = 0,1096$ ) при вращении только внутренней сферы из-за малой интенсивности меридиональной циркуляции в области экватора очень похоже на течение между вращающимися цилиндрами и вторичный режим в области экватора представляет собой два кольцевых вихря в виде двух тейлоровских колец. Для слоя  $\delta = 0,1096$  критическое число Рейнольдса составляет  $1225 \pm 12$ , что хорошо согласуется с расчетными данными [4]. Установлено, что образование тейлоровских колец и их распад при уменьшении числа Рейнольдса  $Re_1$  на основное течение в слоях с  $\delta \geq 0,1096$  происходит с гистерезисом, значение которого для  $\delta = 0,1096$  составляет 0,08% и растет с увеличением  $\delta$ . Зависимость значений  $Re^*$  от толщины слоя при вращении только внутренней сферы приведена на фиг. 2. Данная граница с хорошей степенью точности аппроксимируется формулой [5]

$$Re^* = 41,3(1 + C\delta)\delta^{-3/2}, \quad C \approx 1 \quad (1.1)$$

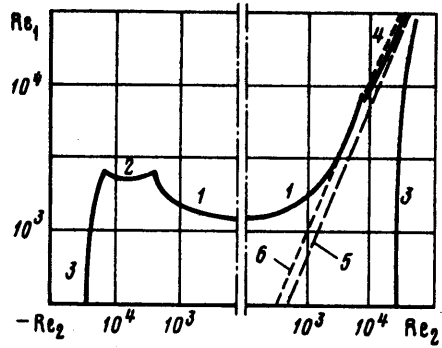
и хорошо согласуется с экспериментальными данными [7].

С увеличением толщины сферического слоя основное течение на пределе устойчивости все больше отличается от цилиндрического течения Куэтта. Так, в слое  $\delta = 0,1925$  на границе устойчивости основного течения при  $Re = 597$  в области экватора образуется спиральный режим. Режим также имеет гистерезис и переход на основное течение наблюдается при  $Re_1 = 596$  (шаг по числу  $Re$  составлял 0,03%).

Для более толстого слоя  $\delta = 0,2413$  меридиональная циркуляция вносит существенный вклад в основное течение, что проявляется в нестационарности вторичного режима. При значении  $Re_1 = 525$  основное течение теряет устойчивость в экваториальной области относительно трехмерных возмущений, имеющих вид спирали, замкнутой в области экватора. Однако этот режим не является стационарным и через некоторый промежуток времени без изменения числа  $Re_1$  он перестраивается на два



Фиг. 2. Граница устойчивости сферического слоя,  $\epsilon = 0$



Фиг. 3. Граница устойчивости сферического слоя,  $\delta = 0,1096$

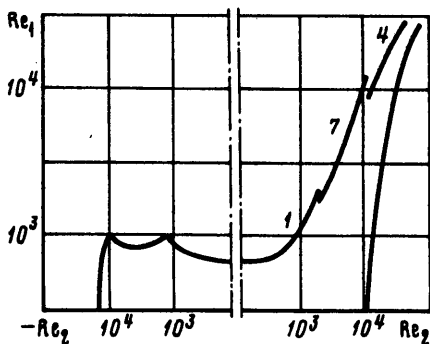
тейлоровских кольца в области экватора. Переход двухкольцевого режима на основное течение происходит при  $Re_1 = 463$ .

Как уже отмечалось, для сферического течения в области определяющих параметров  $Re_1, Re_2$  существует несколько областей с различной формой основного течения, что должно влиять на механизм устойчивости и вид вторичного течения.

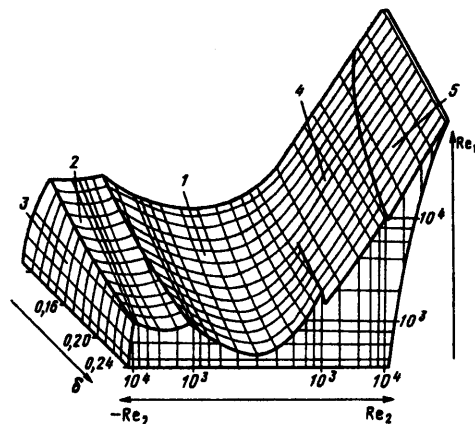
Для слоя  $\delta = 0,1096$  граница устойчивости основного течения представлена на фиг. 3. Правая половина графика соответствует вращению сфер в одну сторону, левая – в разные стороны. Линия 5 ( $\Omega_1 = \Omega_2$ ) определяет твердотельное вращение жидкости, а линия 6 ( $Re_1 = Re_2$ ) – границу невязкой центробежной неустойчивости. Центробежная неустойчивость проявляется как при вращении сферических границ в одну сторону, так и в разные (граница 1). Однако образованием двух стационарных тейлоровских колец в области экватора наблюдается только в диапазоне  $-500 < Re_2 < 1320$ . При числах  $Re_2 > 1320$  основное течение неустойчиво относительно трехмерных возмущений. В экваториальной области образуется режим в виде множества спиралей, замкнутых на экваторе в одно кольцо (режим «елочка»). С увеличением значения  $Re_2$  наблюдается дробление масштаба вторичного течения в азимутальном направлении. Такое изменение вида вторичного течения, по-видимому, связано с возрастанием силы Кориолиса. Динамика возмущений здесь начинает подчиняться теореме Тейлора – Праудмена [6]. Поскольку скорость в направлении оси вращения не должна меняться, возмущения преодолевают эти ограничения путем дробления азимутального масштаба.

При значениях чисел  $Re_2 > 4 \cdot 10^4$  (кривая 4) граница устойчивости основного течения оказывается ниже прямой  $Re_1 = Re_2$ . Такое смещение границы устойчивости связано с формированием в основном течении сдвигового стюартсоновского слоя, неустойчивость которого возникает раньше центробежной. Вторичное течение представляется в виде эллипсоидальных возмущений с вертикальным размером, равным высоте образующей цилиндра, вписанного в сферический слой. Формирование стюартсоновского слоя происходит также и при  $\Omega_1 < \Omega_2$ , однако потеря устойчивости в этом случае не обнаружена. Образование стюартсоновского слоя и его неустойчивость наблюдались до чисел  $Re \approx 10^5$ .

При вращении границ слоя в разные стороны и значениях  $Re_2 > -500$  вторичное течение состоит из двух тейлоровских колец в области экватора. При меньших значениях  $Re_2$  на пределе устойчивости образуется стационарный спиральный режим. Переход этот происходит мягко, без гистерезиса. При небольшой закритичности ( $\sim 3\%$ ) спиральный режим перестраивается на режим с двумя кольцами, который уже имеет гистерезис. Так, при  $Re_2 = -1064$  он равен 1,2% и с уменьшением  $Re_2$  гистерезис увеличивается.



Фиг. 4. Граница устойчивости сферического слоя,  $\delta = 0,2413$



Фиг. 5. Граница устойчивости сферического течения в пространстве определяющих параметров

Наличие излома на кривой устойчивости основного течения указывает на смену механизма образования вторичного течения. Такой излом на кривой устойчивости (фиг. 3) наблюдается при  $Re_2 = -3350$ . В этой области чисел  $Re_2$  меридиональная циркуляция, определяемая вращением внешней сферы, вытесняет в области экватора меридиональную циркуляцию внутренней сферы. Центробежная неустойчивость здесь уже проявиться не может и, согласно экспериментальным данным, при числах  $Re_2 = -3350$  первая неустойчивость развивается в области полюсов (граница 2). Вторичное течение имеет вид спиралей вблизи внутренней сферы. С увеличением  $Re_1$  при  $Re_2 = \text{const}$  область циркуляции, определяемая внутренней сферой, увеличивается и спирали достигают области экватора. Сферическое течение в области полюсов сходно с течением между вращающимися дисками и неустойчивость аналогична экмановской погранслойной неустойчивости, наблюдаемой при течении между вращающимися дисками [6].

При уменьшении значения  $Re_2$  следующий излом на кривой устойчивости основного течения наблюдается при числах  $Re_2 \approx -25000$ . Здесь основное течение состоит из меридиональной циркуляции, определяемой внешней сферой, с вертикальным сдвиговым слоем. Возможно, что неустойчивость меридиональной циркуляции приводит к образованию вторичного режима в виде синусообразной широкой ленты в области экватора. Неустойчивость основного течения при вращения только внешней сферы наблюдается при несколько больших числах  $|Re_2|$  ( $Re_2 \approx -35000$ ). Вторичное течение здесь аналогично описанному выше. Граница устойчивости этого режима как для случая вращения сфер в одну сторону, так и в разные представлена на фиг. 4 кривыми 2.

Для течения жидкости в более толстых слоях ( $\delta = 0,1925$  и  $0,2413$ ) были получены аналогичные кривые предела устойчивости основного течения. Для слоя  $\delta = 0,2413$  граница устойчивости представлена на фиг. 4. Для этого слоя при вращении сферических границ в одну сторону отчетливо наблюдается два излома при  $Re_2 = 1070$  и  $11600$ . При этих значениях происходит смена вида неустойчивости основного течения: «два тейлоровских кольца»  $\rightarrow$  «елочка»  $\rightarrow$  «неустойчивость стюартсоновского слоя» (кривые 1, 7, 4). С увеличением толщины сферического слоя характерный вид неустойчивости наблюдается при меньших значениях чисел  $Re$ . Так, неустойчивость, определяемая вращением только внешней сферы, для слоя  $\delta = 0,1925$ , возникает при  $Re_2 \approx 1,68 \cdot 10^4$ , а для слоя  $\delta = 0,2413$  — при  $Re_2 \approx 10^4$ . Развитие экмановской погранслойной неустойчивости для слоя  $\delta = 0,2413$  наблюдается уже при числах  $Re_2 < 1,3 \cdot 10^4$ .

Для слоев  $\delta = 0,1096; 0,1925; 0,2413$  была построена трехмерная граница предела устойчивости основного течения в области параметров  $Re_1, Re_2$  и  $\delta$ . Топография такой поверхности представлена на фиг. 5. Значения чисел  $Re$  представлены в логарифмическом масштабе. «Сшивание» поверхностей проводилось при значениях  $Re_2 = \pm 100$ . Внутри этой поверхности основное течение устойчиво относительно возмущений конечной амплитуды. Эта сложная поверхность состоит из отдельных поверхностей, которым соответствует определенный вид неустойчивости. Так, на поверхности 1 проявляется тейлоровская неустойчивость. Поверхность 2 определяет экмановскую неустойчивость и возмущения при этом впервые развиваются в области полюсов. Поверхностям 3 соответствуют неустойчивость, определяемая вращением только сферы. При вращении сферических границ в одну сторону еще две поверхности, 4 и 5, определяют так называемый режим «елочка» и неустойчивость стюартсоновского слоя соответственно. Можно отметить, что если в сферическом слое  $\delta = 0,1096$  переход от поверхностей 1 к 4 и 5 происходит плавно, то в более толстом сферическом слое ( $\delta = 0,2413$ ) такой плавности уже нет, что указывает на различие в механизмах неустойчивости вторичных режимов.

**Заключение.** В пространстве определяющих параметров определена граница устойчивости основного течения для тонких сферических слоев ( $0,1096 \leq \delta \leq 0,2413$ ). С увеличением толщины слоя граница устойчивости основного течения уменьшается. Представляет интерес получить трехмерную границу устойчивости для более толстых слоев. По предварительным данным, ввиду изменения механизма неустойчивости область существования основного течения здесь должна резко возрасти.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
2. Петров Г.И., Яворская И.М., Беляев Ю.Н., Монахов А.А. и др. Моделирование динамических процессов в атмосферах планет: Препринт № 255. М.: ИКИ АН СССР, 1975.
3. Монахов А.А. Экспериментальное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в сферических слоях: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., МГУ. 1987. 127 с.
4. Яворская И.М., Астафьева Н.М., Введенская Н.Д. Об устойчивости и неединственности течения вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 1. С. 52–55.
5. Беляев Ю.Н., Монахов А.А., Хлебутин Г.Н., Яворская И.М. Исследование устойчивости и неединственности течений во вращающихся сферических слоях: Препринт № 567. М.: ИКИ АН СССР, 1980.
6. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеониздат, 1975. 304 с.
7. Nakabayashi K. Transition of Taylor – Gortler vortex flow in sperical Couette flow // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 209–230.

Москва

Поступила в редакцию  
30.VI.1995