

УДК 532.517.011:536.24

© 1996 г. В.А. БАШКИН, Д.В. ИВАНОВ, Г.И. МАЙКАПАР, А.В. СИДОРОВ

**ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ**

Исследованы течение и теплообмен несжимаемой жидкости в окрестности плоской критической точки. Во внутренней области течения поля скоростей и давления описываются полными уравнениями Навье – Стокса, а поле температуры – полным уравнением энергии. Для внешней области получено асимптотическое решение соответствующих уравнений с учетом двух членов разложения. Задача сводится к численному анализу обыкновенных дифференциальных уравнений. Обсуждаются результаты расчетов.

При движении летательного аппарата со сверх- и гиперзвуковыми скоростями появление «пиковых» тепловых потоков обусловлено сложной структурой поля течения и вызывается различными причинами: затупленными передними кромками крыльев и вершинами тел с малым радиусом затупления, взаимодействием скачков уплотнения с пограничным слоем, присоединением оторвавшегося потока к обтекаемой поверхности и т. п. Анализ показал, что «пиковые» тепловые потоки связаны с критическими точками и линиями растекания на обтекаемой поверхности.

В рамках классической постановки задачи (невязкое внешнее течение плюс пограничный слой) течение и теплообмен в окрестности критических точек и линий растекания представляют собой самостоятельную локальную задачу, т. е. она не связана с конкретной конфигурацией тела и имеет ряд определяющих параметров, значения которых изменяются в некотором интервале. Однако такой подход к решению задачи не позволяет вскрыть все закономерности теплообмена.

Наиболее полная информация о полях газодинамических переменных получается при использовании полных уравнений Навье – Стокса, однако в этом случае расчет течения и теплообмена в окрестности критических точек и линий растекания теряет локальный характер и необходимо решать глобальную задачу, связанную с конкретной конфигурацией обтекаемого тела. Это в свою очередь приводит к резкому возрастанию объема вычислительной работы и потере общности результатов.

В частном случае несжимаемой жидкости восстанавливается локальный характер течения в окрестности критических точек и линий растекания, при этом задача распадается на две последовательно решаемые задачи: динамическую, связанную с определением поля течения на основе уравнения неразрывности и уравнений импульсов (уравнений Навье – Стокса), и тепловую, связанную с определением поля температуры на основе полного уравнения энергии. Каждая из этих задач при определенных условиях сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (автомодельные или точные решения) и имеет свои определяющие параметры.

Классическим случаем является течение и теплообмен несжимаемой жидкости в окрестности плоской критической точки. Автомодельное решение динамической задачи для этого случая было получено в [1, 2] в предположении, что внешнее течение (на больших расстояниях от обтекаемой поверхности) является либо безвихревым, либо имеет постоянную завихренность. При этом внешнее течение задавалось только главными членами асимптотического разложения и не анализировалось поведение

членов последующего порядка малости. Вследствие этого полученное автомодельное решение уравнений Навье – Стокса не стыкуется с внешним решением, поскольку, в полученном решении при стремлении переменной подобия к бесконечности появляются дополнительные слагаемые, которых нет во внешнем заданном решении.

Кроме того, в прежних исследованиях совсем не рассматривалась тепловая задача, решение которой могло бы дать полезную информацию о закономерностях теплообмена в окрестности критической точки.

В настоящей работе рассмотрено течение и теплообмен несжимаемой жидкости в окрестности плоской критической точки. При изучении автомодельной задачи внешнее решение получено с учетом двух членов асимптотического разложения, а внутреннее решение представлено в виде функционального ряда по продольной координате и сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (точные решения уравнений Навье – Стокса и полного уравнения энергии).

1. Плоскопараллельное стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями неразрывности и Навье – Стокса, которые в декартовой системе координат x°, y° , имеют вид

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0, \quad (1.1)$$

$$u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} + v^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ} + \nu \left(\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial y^{\circ 2}} \right)$$

$$u^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial x^\circ} + v^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^\circ}{\partial y^\circ} + \nu \left(\frac{\partial^2 v^\circ}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial y^{\circ 2}} \right)$$

Здесь u°, v° – компоненты вектора скорости по осям координат x°, y° соответственно, p° – давление, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости. Решение системы уравнений (1.1) должно удовлетворять условиям непротекания и прилипания на обтекаемой поверхности и заданным условиям на больших расстояниях от нее.

Система уравнений (1.1) обычно интегрируется для конкретной конфигурации тела – глобальная задача, однако при определенных условиях возможно получение локального решения. Оно содержит ряд неопределенных постоянных, которые являются параметрами рассматриваемой задачи. Наличие свободных параметров позволяет связать локальное решение с глобальным; значения свободных параметров могут быть оценены также на основе экспериментальных данных.

В работе ставится задача о получении точного локального решения Навье – Стокса для окрестности плоской критической точки. Для этого сначала асимптотическим методом анализируется структура решения на больших расстояниях от обтекаемой поверхности (внешняя область). Это в свою очередь позволяет представить решение уравнений Навье – Стокса в виде функционального ряда по продольной координате и свести задачу к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для внешней области течения вводятся безразмерные переменные

$$x^\circ = xL, \quad y^\circ = yL, \quad u^\circ = uv_*, \quad v^\circ = vv_*, \quad p^\circ = p\rho\nu_*^2 \quad (1.2)$$

где L, v_* – характерные масштабы длины и скорости соответственно (обычно $v_* = aL$, где a – параметр внешней задачи). Решение преобразованной системы уравнений представляется в виде асимптотического разложения

$$q(x, y) = q_0(x, y) + \varepsilon q_1(x, y) + \dots$$

где $\varepsilon = (\nu_* L / \nu)^{-1/2}$ – малый параметр, $q(x, y)$ – любая из искомым функций.

Нулевое приближение описывается системой уравнений Эйлера, которая решается в предположении, что поток имеет постоянную завихренность

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \omega = \text{const}, \quad \omega = \frac{\omega^0}{a}$$

С учетом того что обтекаемая поверхность непроницаема, а критическая точка располагается в центре системы координат, будем иметь

$$u_0(x, y) = x - \omega y, \quad v_0(x, y) = -y, \quad p_0(x, y) = C_0 - 0,5(x^2 + y^2)$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Система уравнений первого приближения интегрируется в предположении, что и в этом приближении поток имеет постоянную завихренность $\omega_1 = \text{const}$

$$u_1(x, y) = \alpha x + \gamma y + E_0, \quad v_1(x, y) = (\omega_1 + \gamma)x - \alpha y + E_1$$

$$p_1(x, y) = C_1 - 0,5[2\alpha - (\omega_1 + \gamma)\omega](x^2 + y^2) - (E_0 - \omega E_1)x + E_1 y$$

где $\alpha, \gamma, C_1, E_0, E_1$ – произвольные постоянные.

Для внутренней области течения вводятся безразмерные переменные

$$x^0 = \xi L_*, \quad y^0 = \eta L_*, \quad u^0 = U v^*, \quad v^0 = V v^* \quad (1.3)$$

$$p^0 = C_0 \rho v_*^2 + P \rho v_*^2, \quad L_* = \sqrt{v/a}, \quad v^* = \sqrt{a v}$$

где L_* и v^* – характерные масштабы длины и скорости соответственно. Анализ показал, что задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений в случае

$$U(\xi, \eta) = \xi f'(\eta) - \omega g(\eta), \quad V(\xi, \eta) = -f(\eta) \quad (1.4)$$

$$P(\xi, \eta) = F_0(\eta) + F_1 \xi - 0,5 \xi^2$$

где F_1 – некоторая постоянная. После подстановки (1.4) в преобразованные уравнения и учета граничных условий получим

$$F_0(\eta) = C_* - 0,5 f^2 - f', \quad f''' + f f'' - f'^2 = -1$$

$$g'' + f g' - f' g = -F_1 / \omega$$

$$f(0) = f'(0) = g(0) = 0, \quad f'(\infty) = g'(\infty) = 1$$

где C_* – постоянная интегрирования.

В силу линейности дифференциального уравнения функция $g(\eta)$ ищется в виде

$$g(\eta) = g_0(\eta) + F_1 g_1(\eta) / \omega$$

$$g_0'' + f g_0' - f' g_0 = 0, \quad g_1'' + f g_1' - f' g_1 = -1$$

$$g_0(0) = g_1(0) = g_1'(\infty) = 0, \quad g_0'(\infty) = 1$$

Можно видеть, что $g_1(\eta) = f'(\eta)$, и, следовательно, численным путем необходимо определить только поведение функции $f(\eta)$ и $g_0(\eta)$.

При $\eta \rightarrow \infty$ имеем

$$f(\eta) = \eta - \alpha_* + \phi_1(\eta), \quad g_0(\eta) = \eta - \alpha_* + \phi_2(\eta) \quad (1.5)$$

где $\phi_1(\eta), \phi_2(\eta)$ – экспоненциально затухающие функции, α_* – постоянная, значение которой определяется в результате численного анализа дифференциальных уравнений.

Сращивание решений проводится на основе принципа эквивалентности разложений. Для этого с помощью асимптотических решений (1.5) внутреннее решение записы-

вается в переменных внешнего решения и сопоставляется с внешним решением. Из условия эквивалентности выражений для нормального и продольного компонентов скорости и давления следуют соотношения

$$\omega_1 + \gamma = 0, \quad \alpha = \gamma = 0, \quad E_1 = \alpha_* \quad (1.6)$$

$$E_0 = \omega\alpha_* - F_1, \quad C_1 = 0$$

С учетом соотношений (1.6) решения для внешней и внутренней областей течения примут вид

$$u(x, y) = x - \omega y + \varepsilon E_0 + O(\varepsilon^2), \quad v(x, y) = -y + \varepsilon \alpha_* + O(\varepsilon^2) \quad (1.7)$$

$$p(x, y) = C_0 - 0,5(x^2 + y^2) + \varepsilon[(\omega\alpha_* - E_0)x + \alpha_*y] + O(\varepsilon^2)$$

$$U(\xi, \eta) = \xi f'(\eta) - \omega g_0(\eta) - (\omega\alpha_* - E_0)f'(\eta), \quad V(\xi, \eta) = -f(\eta) \quad (1.8)$$

$$P(\xi, \eta) = C_* - 0,5f^2 - f' + (\omega\alpha_* - E_0)\xi - 0,5\xi^2$$

Таким образом, в рассматриваемом внешнем течении с постоянной завихренностью возмущения компонентов скорости первого приближения являются постоянными величинами и, следовательно, возмущение завихренности равно нулю ($\gamma = \omega_1 = 0$). При этом возмущение нормального компонента скорости известно и обусловлено вытесняющим действием вязкого пристеночного слоя; возмущение продольного компонента скорости E_0 неизвестно и является параметром внешней задачи первого приближения. Постоянная C_* в членах внешнего разложения является величиной второго порядка малости и поэтому остается неопределенной; не нарушая общности, ее можно положить равной нулю, поскольку она связана с тонкими структурами натекающего потока.

В [1, 2] при решении динамической задачи внешнее решение задавалось в виде (1.7), в котором пренебрегалось членами порядка ε ; в соответствии с этим в вязком решении в выражении для $U(\xi, \eta)$ отсутствует член, пропорциональный $f'(\eta)$, а в выражении для $P(\xi, \eta)$ — член, пропорциональный ξ .

2. Функции $f(\eta)$ и $g_0(\eta)$ хорошо известны в теории пограничного слоя и приведены в виде таблиц и графиков в [1, 2]. Полученные в настоящих расчетах характерные величины, необходимые для определения местных характеристик на обтекаемой поверхности, имеют следующие значения:

$$f''(0) = 1,23256, \quad g'_0(0) = 0,60796, \quad \alpha_* = 0,64787$$

и хорошо согласуются с данными [1, 2].

Структура поля течения в окрестности критической точки определяется картиной линий тока. Уравнение линий тока представляет собой линейное неоднородное уравнение, решение которого записывается в квадратурах

$$\xi(\eta) = [C + (\omega\alpha_* - E_0)f(\eta) + \omega \int_0^\eta g_0(\eta) d\eta][f(\eta)]^{-1}$$

где C — постоянная интегрирования.

Линии тока образуют особую точку типа «седло». Особая линия тока ($C = 0$) приходит в «вязкую» критическую точку на обтекаемой поверхности

$$\xi(0) = \omega[\alpha_* + g'_0(0)/f''(0)] - E_0 = 1,1411\omega - E_0$$

по нормали к обтекаемой поверхности ($d\xi/d\eta \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$). Она совпадает с «невязкой» критической точкой ($\xi = 0$) при условии

$$E_0 = \omega[\alpha_* + g'_0(0)/f''(0)] = 1,1411\omega$$

Во всех остальных случаях они смещены относительно друг друга.

При $\omega = 0$ особая линия тока представляет собой прямую линию ($\xi = -E_0$) и, следовательно, влияние параметра E_0 на структуру поля течения сводится к сдвигу системы координат с сохранением симметрии течения относительно особой линии тока. При $\omega \neq 0$ особая линия тока является криволинейной; вследствие этого картина течения относительно особой линии становится существенно несимметричной.

Поведение возмущения давления определяется выражением (согласно (1.8)).

$$P(\xi, 0) - C_* = (\omega\alpha_* - E_0)\xi - 0,5\xi^2$$

с локальным экстремумом в точке $\xi = \omega\alpha_* - E_0$. При этом в случае $\omega = 0$ экстремум возмущения давления наблюдается в критической точке, а при $\omega \neq 0$ его положение не совпадает с ней. В полученном в [2] решении поведение возмущения давления в окрестности критической точки описывается четной функцией по продольной координате с экстремумом в «невязкой» критической точке, поскольку во внешнем решении пренебрегалось членами первого порядка малости.

3. Для несжимаемой жидкости уравнение энергии

$$u^\circ \frac{\partial h^\circ}{\partial x^\circ} + v^\circ \frac{\partial h^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{\partial^2 h^\circ}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 h^\circ}{\partial y^{\circ 2}} \right) + \nu \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{\partial v^\circ}{\partial x^\circ} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

решается по известному полю скоростей с удовлетворением заданных условий теплообмена на обтекаемой поверхности и на больших расстояниях от нее. Здесь h° – энтальпия, λ – коэффициент теплопроводности, C – удельная теплоемкость движущейся среды.

Для внешней области течения вводятся преобразования переменных (1.2) и $h^\circ = hh_* = h\nu_*^2$. Тогда уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (3.2)$$

где $\text{Pr} = \mu C / \lambda$ – число Прандтля.

Решение уравнения (3.2) представим в виде асимптотического разложения $h(x, y) = h_0(x, y) + \epsilon h_1(x, y) + \dots$

Уравнение нулевого приближения и его общее решение имеют вид

$$(x - \omega y) \frac{\partial h_0}{\partial x} - y \frac{\partial h_0}{\partial y} = 0, \quad h_0(x, y) = D_0 + \psi(\zeta), \quad \zeta = y(2x - \omega y)$$

где D_0 – постоянная, ψ – произвольная функция. Ограничимся рассмотрением линейной зависимости $\psi = D_2 \zeta$ и, следовательно,

$$h_0(x, y) = D_0 + D_2 y(2x - \omega y) \quad (3.3)$$

где D_2 – некоторая постоянная.

Для первого приближения с учетом (3.3) будем иметь

$$(x - \omega y) \frac{\partial h_1}{\partial x} - y \frac{\partial h_1}{\partial y} = - \left[E_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + \alpha_* \frac{\partial h_0}{\partial y} \right] = -D_2 [2E_0 y + 2\alpha_* (x - \omega y)]$$

$$h_1(x, y) = -2D_2 (\alpha_* x - E_0 y) + D_3 \quad (3.4)$$

где D_3 – произвольная постоянная.

i	G_i	$S_i(\eta)$	i	A_i	$-\Phi_i(\eta)$
0	θ_{w2}	0	0	θ_{w0}	0
1	1	$-f''^2$	1	1	$2(2f''^2 + \sigma_1 / \text{Pr})$
			2	ω^2	$(g_0'^2 + g_0\tau_1)$
i	C_i	$T_i(\eta)$	3	$\omega\theta_{w1}$	$g_0\tau_0$
			4	$\omega^2\theta_{w2}$	$g_0\tau_2$
0	θ_{w1}	0	5	θ_{w2}	$2\sigma_0 / \text{Pr}$
1	ω	$2(f''g_0' - g_0\sigma_1)$	6	$\omega(\omega\alpha_* - E_0)$	$2g_0' + g_0\tau_3 + f'\tau_1$
2	$\omega\theta_{w2}$	$-2g_0\sigma_0$	7	$A_6\theta_{w2}$	$g_0\tau_4 + f'\tau_2$
3	$\omega\alpha_* - E_0$	$2(f''^2 - f'\sigma_1)$	8	$(\omega\alpha_* - E_0)^2$	$f''^2 + f'\tau_3$
4	$C_3\theta_{w2}$	$-2f'\sigma_0$	9	$A_8\theta_{w2}$	$f'\tau_4$
			10	$(\omega\alpha_* - E_0)\theta_{w1}$	$f'\tau_0$

Для внутренней области течения вводятся преобразования (1.3) и $h^0 = D_0 \nu_*^2 + \theta \nu_*^2$.

С учетом (1.8) уравнение (3.1) запишется в таком виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - [\xi f' - \omega g_0 - (\omega \alpha_* - E_0) f'] \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \\ & = -[4f''^2 + \omega^2 g_0'^2 + (\omega \alpha_* - E_0)^2 f''^2 + 2\omega(\omega \alpha_* - E_0) g_0' f''] + \\ & + [2\omega f'' g_0' + 2(\omega \alpha_* - E_0) f''^2] \xi - f''^2 \xi^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

На поверхности тела искомое решение удовлетворяет граничному условию

$$\theta(\xi, 0) = \theta_{w0} + \theta_{w1} \xi + \theta_{w2} \xi^2$$

С учетом граничных условий и структуры уравнения (3.5) его решение представляется в виде

$$\theta(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{10} A_i \chi_i(\eta) + \xi \sum_{i=0}^4 C_i \tau_i(\eta) + \xi^2 \sum_{i=0}^1 G_i \sigma_i(\eta) \quad (3.6)$$

а введенные функции от η определяются уравнениями с граничными условиями на обтекаемой поверхности

$$\text{Pr}^{-1} \sigma_i'' + f \sigma_i' - 2f' \sigma_i = S_i(\eta) \quad (i = 0, 1) \quad (3.7)$$

$$\text{Pr}^{-1} \tau_i'' + f \tau_i' - f' \tau_i = T_i(\eta) \quad (i = 0, 1, \dots, 4) \quad (3.8)$$

$$\text{Pr}^{-1} \chi_i'' + f \chi_i' = \Phi_i(\eta) \quad (i = 0, 1, \dots, 10) \quad (3.9)$$

$$\sigma_0(0) = \tau_0(0) = \chi_0(0) = 1$$

$$\sigma_i(0) = \tau_i(0) = \chi_i(0) = 0 \quad (i \geq 1)$$

Выражения для постоянных A_i , C_i , G_i и правых частей уравнений (3.7)–(3.9) приведены в таблице.

Все искомые функции разбиваются на две группы.

К первой группе относятся функции, связанные с параметрами на обтекаемой поверхности. Поскольку эти параметры не должны влиять на главные члены внешнего разложения, то эти возмущения должны затухать при $\eta \rightarrow \infty$. К этой группе относятся функции $\sigma_i(\eta)$ ($i = 0, 1$), $\tau_i(\eta)$ ($i = 0, 2, 4$), $\chi_i(\eta)$ ($i = 0, 3, 4, 5, 7, 9, 10$).

Ко второй группе относятся функции, связанные с параметрами внешнего течения и обеспечивающие сращивание внутреннего решения с внешним. Поскольку выше анализ внешней задачи был ограничен рассмотрением линейного по ζ решения, то при изучении асимптотического поведения искомых функций необходимо учитывать только наиболее медленно нарастающие возмущения. Этому требованию удовлетворяют функции $\tau_i(\eta)$ ($i = 1, 3$), $\chi_i(\eta)$ ($i = 1, 2, 6, 8$).

Поскольку функции $\tau_1(\eta)$ и $\tau_3(\eta)$ должны иметь на бесконечности незатухающую составляющую, то их удобно представить в виде суммы двух решений

$$\tau_i(\eta) = \tau_{i1}(\eta) + \tau_{i2}(\eta) \quad (i = 1, 3)$$

При этом функции $\tau_{11}(\eta)$ и $\tau_{31}(\eta)$ затухают на бесконечности и удовлетворяют неоднородному уравнению (3.8) с соответствующей правой частью. Функции $\tau_{12}(\eta)$ и $\tau_{32}(\eta)$ удовлетворяют однородному уравнению (3.8), не затухают на бесконечности и пропорциональны собственному решению $\tau_s(\eta)$ уравнения (3.8)

$$\tau_{i2}(\eta) = B_{i2}\tau_s(\eta) = B_{i2}[\eta - \alpha_* + t(\eta)] \quad (i = 1, 3)$$

Функция $t(\eta)$ есть решение задачи

$$\text{Pr}^{-1} t'' + ft' - ft = -[f - (\eta - \alpha_*)f']$$

$$t(0) = \alpha_*, \quad t(\infty) = 0$$

Аналогичным образом представляются функции $\chi_i(\eta)$ ($i = 1, 2, 6, 8$)

$$\chi_1(\eta) = \chi_{11}(\eta) + \chi_{12}(\eta)$$

$$\chi_2(\eta) = \chi_{21}(\eta) + \chi_{22}(\eta) + B_{12}\chi_{23}(\eta)$$

$$\chi_6(\eta) = \chi_{61}(\eta) + B_{32}\chi_{62}(\eta) + B_{12}\chi_{63}(\eta) \quad (3.10)$$

$$\chi_8(\eta) = \chi_{81}(\eta) + B_{32}\chi_{82}(\eta)$$

Соответствующим образом разбиваются правые части уравнения (3.9) с учетом того, что первые слагаемые (3.10) представляют собой затухающие на бесконечности функции.

Для численного анализа полученных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо изучить асимптотический характер поведения искомых функций, что позволит корректно сформулировать внешние граничные условия.

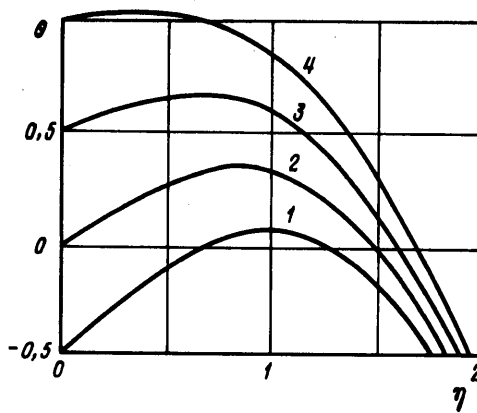
С учетом асимптотики функций $f(\eta)$ и $g_0(\eta)$ (см. (1.5)) устанавливается асимптотическая форма уравнений (3.7)–(3.9), при этом для удобства анализа вводится новая переменная $\eta_* = \eta - \alpha_*$. Однородные уравнения второго порядка имеют по два линейно независимых решения

$$\sigma^{(1)} = \frac{1}{\eta_*^3} \left(1 - \frac{6}{\text{Pr} \eta_*^2} + \dots \right) \exp \left(-\frac{\text{Pr} \eta_*^2}{2} \right), \quad \sigma^{(2)} = \eta_*^2 + \text{Pr}^{-1} \quad (3.11)$$

$$\tau^{(1)}(\eta_*) = \frac{1}{\eta_*^2} \left(1 - \frac{3}{\text{Pr} \eta_*^2} + \dots \right) \exp \left(-\frac{\text{Pr} \eta_*^2}{2} \right), \quad \tau^{(2)}(\eta_*) = \eta_* \quad (3.12)$$

$$k^{(1)}(\eta_*) = -\frac{1}{\text{Pr} \eta_*} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr} \eta_*^2} + \dots \right) \exp \left(-\frac{\text{Pr} \eta_*^2}{2} \right), \quad k^{(2)}(\eta_*) = \text{const} = 1 \quad (3.13)$$

На основе (3.11)–(3.13) установлены асимптотическое поведение искомых функций и асимптотические соотношения, которые использовались в качестве внешних гранич-



Фиг. 1. Влияние температуры поверхности на профиль возмущения температуры (кривые 1–3 – соответствуют $\theta_{w0} = -0.5; 0; 1$)

ных условий при численном интегрировании уравнений (3.7)–(3.9). Конкретный вид этих соотношений здесь не приводится.

Полученные асимптотические решения позволяют провести сравнение решений для внутренней и внешней областей течения на основе принципа эквивалентности разложений. Для этого внутреннее решение при $\eta \rightarrow \infty$ записывается в переменных внешнего разложения, в него подставляются асимптотические выражения для соответствующих функций и совершается переход к переменным внешнего разложения с сохранением членов нулевого и первого порядков малости; в результате получаются алгебраические уравнения, решение которых позволяет определить неизвестные постоянные внутреннего решения

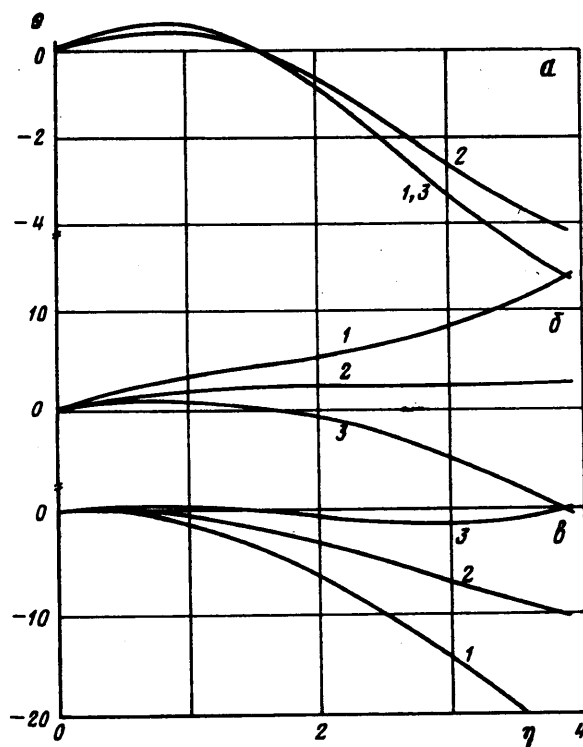
$$B_{12} = 2\alpha_* D_2 / E_0 = -\alpha_* B_{32}, \quad B_{32} = -2D_2 / E_0, \quad D_3 = 0$$

Сформулированные выше краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений были численно решены для числа Прандтля $Pr = 0.7$, а результаты расчетов искомых функций и их производных были затабулированы. Полученный расчетный материал позволяет определить профили возмущения энтальпии (температуры) в переменных внутренней области, влияющие на них определяющих параметров задачи, а также изучить особенности теплообмена.

4. В качестве примера рассмотрим профиль возмущения температуры в «невязкой» критической точке ($\xi = 0$).

На изотермической поверхности ($\theta_{w1} = \theta_{w2} = 0$) при внешнем безвихревом течении ($\omega = E_0 = D_2 = 0$) влияние θ_{w0} на профиль возмущения температуры проявляется только в пристеночной области и при $\eta = 3$ все зависимости практически сливаются в одну (фиг. 1, кривые 1–4 соответствуют $\theta_{w0} = -0.5; 0; 0.5; 1$). Аналогичная картина наблюдается в рамках уравнений пограничного слоя. Однако учет диссипативных членов приводит к тому, что при $\eta \rightarrow \infty$ функция $\theta(\eta) \rightarrow \infty$, в то время как в пограничном слое она стремится к нулю.

Влияние завихренности на профиль возмущения температуры для частного случая изотермической поверхности ($\theta_{w0} = 0$) показано на фиг. 2 (кривые 1–3 соответствуют $\omega = -1; 0; 1$). При отсутствии возмущения первого порядка для продольного компонента скорости ($E_0 = 0$) влияние параметра ω на профиль возмущения температуры относительно невелико даже на больших расстояниях от обтекаемой поверхности (фиг. 2, а), однако его влияние усиливается при наличии возмущения первого порядка продольного компонента скорости и неизотермичности внешнего потока (фиг. 2, б, $E_0 = D_2 = 1$ и фиг. 2, в, $E_0 = -D_2 = 1$).



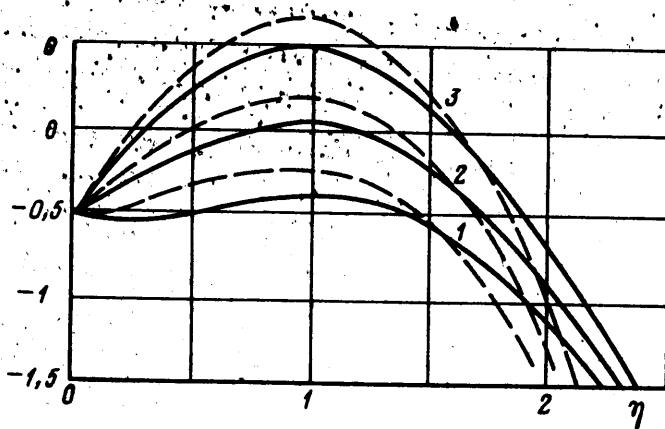
Фиг. 2. Влияние завихренности на профиль возмущения температуры (кривые 1-3 соответствуют $\omega = -1; 0; 1$; а - $E_0 = D_2 = 0$; б - $E_0 = D_2 = 1$; в - $E_0 = -D_2 = 1$)

В рамках теории пограничного слоя профиль температуры в критической точке ($\xi = 0$) определяется значением температуры в рассматриваемой точке и не зависит от характера изменения температуры по обтекаемой поверхности вниз по потоку, поскольку уравнения Прандтля являются уравнениями параболического типа. Уравнения Навье – Стокса имеют эллиптический характер и вследствие этого профиль температуры будет зависеть от распределения температуры по поверхности стенки. Этим свойством обладает и полученное выше решение. Для иллюстрации этого влияния было рассмотрено два случая: симметричный $\theta(\xi, 0) = \theta_{w0} + \theta_{w2}\xi^2$ и антисимметричный $\theta(\xi, 0) = \theta_{w0} + \theta_{w1}\xi$. Иллюстративный материал для частного случая $\theta_{w0} = -0,5$ приведен на фиг. 3 (кривые 1-3 соответствуют $\theta_{w2} = -1; 0; 1$).

Для безвихревого внешнего течения ($\omega = E_0 = D_2 = 0$) в симметричном случае наблюдается довольно заметное влияние параметра θ_{w2} на профиль возмущения температуры (фиг. 3, сплошные кривые), в антисимметричном случае влияние параметра θ_{w1} отсутствует (в полученное решение он входит в виде произведения $\omega\theta_{w1}$).

Наличие завихренности и неизотермичности внешнего потока ($\omega = E_0 = D_2 = 1$) вызывает общую деформацию профиля возмущения температуры, но при этом сохраняется степень влияния параметра θ_{w2} на него (фиг. 3, штриховые кривые): максимальное различие между кривыми 1 и 3 примерно то же и равно 0,9. В антисимметричном случае влияние параметра θ_{w1} на профиль возмущения температуры практически отсутствует.

5. Местный тепловой поток q_w° к обтекаемой поверхности определяется согласно закону Фурье. Если его обезразмерить с помощью параметров внутреннего течения,



Фиг. 3. Влияние распределения температуры по обтекаемой поверхности на профиль возмущения температуры в «невязкой» критической точке (кривые 1–3 соответствуют $\theta_{w2} = -1; 0; 1$; сплошная линия – безвихревое изотермическое внешнее течение, штриховая – завихренное неизотермическое внешнее течение)

то получим

$$q_w = \frac{q_w^\circ}{\rho^\circ v_*^3} = A + I \quad (5.1)$$

где A зависит от параметров внешнего течения, а I – от характера распределения энтальпии (температуры) по обтекаемой поверхности. Согласно результатам расчетов, для числа Прандтля $Pr = 0,7$ будем иметь

$$\begin{aligned} A = & 0,8547 + 0,9441\omega^2 - (1,7846\omega - 0,5085E_0)E_0 + \\ & + (0,6671\omega - 0,8167E_0)E_0B_{32} + [1,0173E_0 - \\ & - 1,4267\omega - 0,9194E_0B_{32}]\xi + 0,5087\xi^2 \\ I = & -0,7084\theta_{w0} + 1,6878\theta_{w2} + (0,4441\omega - 0,3044E_0)\theta_{w1} + \\ & + [0,2683\omega^2 - (0,3242\omega - 0,1002E_0)\theta_{w2} + [-1,0128\theta_{w1} + \\ & + (0,5639\omega - 0,4084E_0)\theta_{w2}]\xi - 1,2170\theta_{w2}\xi^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

В характерных масштабах внешней области течения местный тепловой поток примет вид

$$Q_w = \frac{q_w^\circ}{\rho^\circ v_*^3} = \left(\frac{v_*}{v_*} \right)^3 q_w = \epsilon^3 q_w \quad (5.3)$$

Если принять, что все параметры, входящие в (5.2), имеют один и тот же порядок, то на тепловой поток примерно в равной степени влияют как завихренность, так и неизотермичность внешнего течения, причем влияние последнего фактора зависит от завихренности потока.

Однако параметры, входящие в (5.2), в физической плоскости или в масштабах внешней области имеют разный порядок. Пусть распределение энтальпии (температуры) на обтекаемой поверхности задано полиномом

$$h_w^\circ = h_{w0}^\circ + h_{w1}^\circ x^\circ + h_{w2}^\circ x^{\circ 2} = v_*^2 (h_{w0} + h_{w1}x + h_{w2}x^2)$$

$$h_{w0}^\circ = a^2 L^2 h_{w0}, \quad h_{w1}^\circ = a^2 L h_{w1}, \quad h_{w2}^\circ = a^2 h_{w2}$$

С другой стороны, в переменных внутреннего решения имеем

$$h_w^0 = \nu_*^2 [D_0 + \varepsilon^2 (\theta_{w0} + \theta_{w1} \xi + \theta_{w2} \xi^2)]$$

Из эквивалентности этих разложений с учетом $x = \varepsilon \xi$ следует

$$\theta_{w0} = \frac{h_{w0} - D_0}{\varepsilon^2}, \quad \theta_{w1} = \frac{h_{w1}}{\varepsilon}, \quad \theta_{w2} = h_{w2} \quad (5.4)$$

С учетом (5.4) выражения для коэффициентов A и I запишутся в виде

$$A = \varepsilon^{-2} [A_0 - \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2], \quad I = \varepsilon^{-2} [I_0 + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2]$$

Полученные результаты позволяют местный тепловой поток (5.3) записать в виде ($Pr = 0,7$)

$$\begin{aligned} Q_w &= 0,7084\varepsilon [h_{R*} - h_{w*}] \\ h_{R*} &= D_0 + 0,7181x^2 - \varepsilon [2,0141\omega - 1,4362E_0 + 1,2980E_0 B_{32}]x + \\ &+ \varepsilon^2 [1,2067 + 1,3328\omega^2 - (2,5194\omega - 0,7179E_0)E_0 + (0,9417\omega - 1,1530E_0)E_0 B_{32}] \\ h_{w*} &= h_{w0} + 1,4298h_{w1}x + 1,7181h_{w2}x^2 - \\ &- \varepsilon [(0,6269\omega - 0,4298E_0)h_{w1} + (0,7961\omega - 0,5766E_0)h_{w2}x] - \\ &- \varepsilon^2 [2,3828 + 0,3787\omega^2 + E_0(0,1415E_0 - 0,4576\omega)]h_{w2} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что распределение теплового потока в окрестности критической точки носит немонотонный характер с локальным экстремумом (минимумом) в точке

$$\begin{aligned} x &= (1 - 2,3926h_{w2})^{-1} \{0,9955h_{w1} + \varepsilon [1,4024\omega - E_0 + \\ &+ 0,9038E_0 B_{32} - (0,5543\omega - 0,4015E_0)h_{w2}]\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

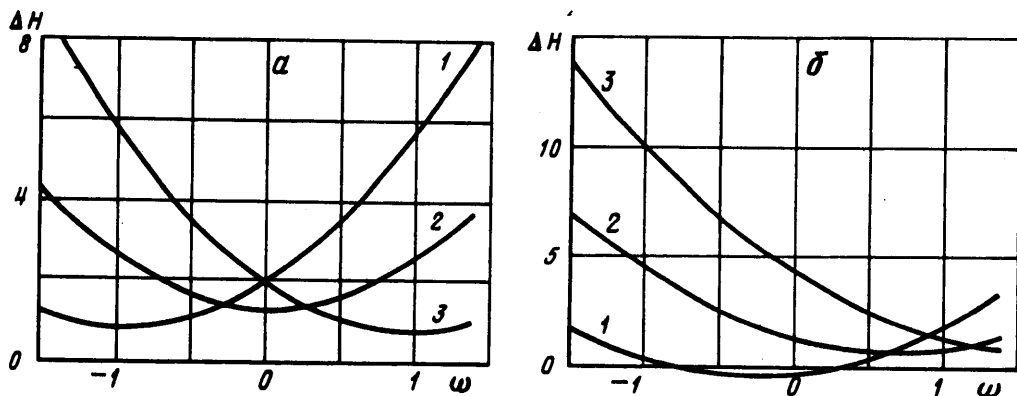
При этом положение экстремума теплового потока в общем случае не совпадает с положением экстремума возмущения давления и «вязкой» критической точки.

Таким образом, структура теплового потока в окрестности критической точки такая же, как и в рамках теории классического пограничного слоя [3]; коэффициент пропорциональности – число Стантона $C_h = Q_w / (h_{R*} - h_{w*})$ – в точности соответствует решению уравнения энергии в приближении пограничного слоя.

Эффективная энтальпия восстановления h_{R*} в главном члене соответствует значению температуры изотермической жидкости во внешнем невязком потоке. Отличие от нее имеет место в членах второго порядка малости. При этом наибольшее влияние на эффективную энтальпию восстановления оказывает вязкая диссипация и завихренность потока в нулевом приближении; поскольку соответствующие члены являются положительными величинами, то они приводят к возрастанию h_{R*} и, следовательно, к увеличению теплового потока. Завихренность внешнего потока в первом приближении (параметр E_0) и его неизотермичность (параметр $D_2 \sim E_0 B_{32}$) оказывают меньшее влияние и их эффект зависит от знака указанных параметров.

Эффективная энтальпия поверхности определяется только характером распределения энтальпии (температуры) в окрестности критической точки. Для изотермической поверхности она просто совпадает с энтальпией обтекаемой поверхности. Для неизотермической поверхности главный член есть энтальпия поверхности в критической точке, а градиенты температуры проявляют свое влияние в членах первого и второго порядков малости.

В рамках теории пограничного слоя экстремум теплового потока имеет место в критической точке ($x = 0$) и определяется выражением $Q_{wbl} = 0,7084\varepsilon(D_0 - h_{w0})$ и,



Фиг. 4. Соотношение тепловых потоков в «невязкой» критической точке (кривые 1-3 соответствуют $E_0 = -1; 0; 1$; а - $D_2 = 0$, б - $D_2 = 1$)

следовательно, отношение тепловых потоков будет рассчитываться по формуле

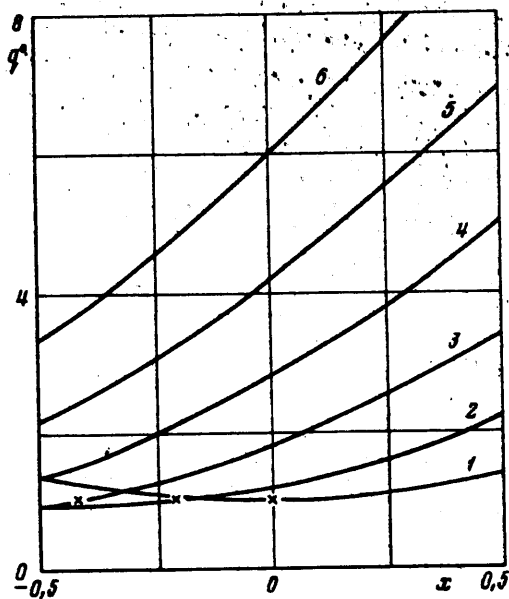
$$\frac{Q_w}{Q_{wbl}} = \frac{h_{R*} - h_{w*}}{D_0 - h_{w0}} = 1 + \frac{(h_{R*} - D_0) - (h_{w*} - h_0)}{D_0 - h_{w0}}$$

Для иллюстрации сказанного рассмотрим соотношение тепловых потоков в «невязкой» критической точке ($x = 0$) на изотермической поверхности ($h_{w1} = h_{w2} = 0$); результаты расчетов представлены на фиг. 4 (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям параметра $E_0 = -1, 0, 1$) в виде зависимости величины

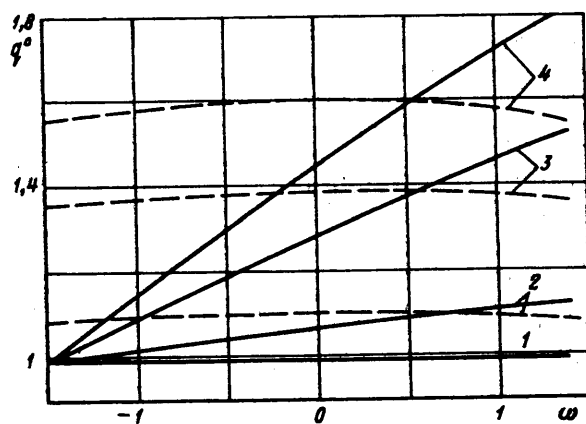
$$\Delta H = \left(\frac{Q_w}{Q_{wbl}} - 1 \right) \frac{D_0 - h_{w0}}{\epsilon^2}$$

от параметра ω для изотермического (фиг 4, а, $D_2 = 0$) и неизоатермического (фиг. 4, б, $D_2 = 1$) внешнего потока. В целом учет рассматриваемых эффектов приводит к заметному увеличению теплового потока ($\Delta H > 0$) по сравнению с его значением согласно теории пограничного слоя и лишь при определенных условиях наблюдается его незначительное уменьшение ($\Delta H < 0$). Это различие еще более возрастает по мере ослабления теплообмена ($D_0 - h_{w0} \rightarrow 0$); это важный общий вывод, поскольку в аэродинамических установках экспериментальные исследования часто проводятся при наличии умеренного и слабого теплообмена.

Распределение теплового потока в окрестности критической точки зависит от многих параметров, поэтому в качестве примера рассмотрим частный случай изотермической поверхности при следующих условиях: $\omega = -1$, $E_0 = D_2 = 1$, $D_0 - h_{w0} = 0,5$ (умеренно охлажденная стенка). Распределение относительного теплового потока $q^0 = Q_w/Q_{wbl}$ по обтекаемой поверхности для различных значений параметра ϵ показано на фиг. 5 (кривые 1-6 соответствуют значениям параметра $\epsilon = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$). Распределение тепловых потоков в окрестности критической точки является немонотонным с минимумом в точке $x = -4,21\epsilon$ (согласно (5.5) для указанных выше условий) и в качественном отношении согласуется с распределением теплового потока по поверхности плоского торца. На фиг. 5 на кривых звездочками отмечены точки, соответствующие положению вязкой критической точки ($x = -2,141\epsilon$, согласно (2.2)). Для данных условий тепловой поток в вязкой критической точке возрастает незначительно, всего на несколько процентов, в то время как в «невязкой» критической точке он возрастает весьма существенно, на десятки и сотни процентов. При этом с возрастанием параметра ϵ (уменьшением числа Рейнольдса) вязкая критическая точка все больше удаляется от невязкой.



Фиг. 5. Распределение теплового потока по обтекаемой поверхности (кривые 1–6 соответствуют $\epsilon = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$)



Фиг. 6. Соотношение тепловых потоков в «вязкой» критической точке (кривые 1–4 соответствуют $\epsilon = 0; 0,2; 0,4; 0,5$; штриховые линии – $E_0 = D_2 = 0$; сплошные – $E_0 = D_2 = 1$)

Более полная информация о поведении теплового потока в вязкой критической точке на изотермической поверхности ($D_0 - h_{\infty} = 0,5$) приведена на фиг. 6 (кривые 1–4 соответствуют значениям параметра $\epsilon = 0; 0,2; 0,4; 0,5$; штриховые кривые соответствуют условиям: $E_0 = D_2 = 0$, сплошные кривые $E_0 = D_2 = 1$). При определенных условиях учет рассматриваемых эффектов может приводить к заметному возрастанию теплового потока.

Анализ течения и теплообмена в окрестности плоской критической точки на основе полных уравнений Навье – Стокса и уравнения энергии показал, что возмущение продольного компонента скорости, завихренность и неизотермичность внешнего

потока при определенных условиях могут приводить к существенному возрастанию теплового потока по сравнению с его значением, согласно теории пограничного слоя первого приближения. Следовательно, эти эффекты необходимо учитывать при анализе результатов экспериментальных исследований и перенесении их на натуральные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
2. Stuart J.T. The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity // J. Aero/Space Sci. 1959. V. 26. № 2. P. 124–125.
3. Башкин В.А., Солодкин Е.Е. Об определении коэффициента теплопередачи // ПМТФ. 1961. № 3. С. 16–24.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.1995