МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1996

УДК 532.516.013.4:536.25

© 1996 г. Ю.К. БРАТУХИН, С.О. МАКАРОВ

О КАПИЛЛЯРНОЙ И ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В КАПЛЕ, ПОГРУЖЕННОЙ В НЕОДНОРОДНО НАГРЕТУЮ ЖИДКОСТЬ

Аналитически решена задача о конвекции в капле, погруженной в неоднородно нагретую жидкость в условиях техники Плато. Прослежено влияние на термокапиллярное течение гравитационной конвекции, определена форма капли и смещение ее центра масс в линейном по числам Марангони, Грасгофа и их произведению приближении.

1. Постановка задачи. Пусть сферическую кювету радиуса A заполняет жидкость (среда *1*), в которую погружена капля другой жидкости (среда *2*) той же плотности при нулевой температуре. На твердой поверхности кюветы задано косинусоидальное распределение температуры (подогрев сверху). В этих условиях из-за зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры на границе раздела жидкостей возникнут касательные напряжения, которые вызовут капиллярную конвекцию в обеих средах. Побочными эффектами этого процесса являются деформация капли, ее смещение в новое положение равновесия и развитие свободной гравитационной конвекции. Цель работы – аналитическое изучение этих эффектов.

При математической постановке задачи будем предполагать линейную зависимость поверхностного натяжения σ от температуры T: $\sigma = \sigma_0 - \sigma_1 T$, где σ_0 – поверхностное натяжение на границе раздела жидкостей при нулевой температуре, σ_1 – постоянная величина (для индивидуальных несмешивающихся жидкостей σ_1 больше нуля [1]). Жидкости взаимно насыщены только при $T = 0$ и потому, например в более нагретых областях кюветы, продолжают растворяться друг в друге. Этот неизбежный процесс должен приводить к добавочному изменению σ. Будем считать эту добавку также линейно меняющейся с температурой [2] и включим ее в эмпирический параметр σ_1.

Перечислим другие, обычные в этих задачах допущения [3]. Все параметры жидкостей – кинетические ν_i и динамические η_i вязкости, коэффициенты тепло- и температуропроводности $\varkappa_i$ и χ_i – постоянны (индекс $i = 1$ отмечает принадлежность функций к внешней по отношению к капле жидкости, индекс $i = 2$ – к капле). Жидкости термически деформируемы, так что их плотности при малых отклонениях температуры от нулевой $\rho_i = \rho(1 - \beta_i T)$. В рассматриваемых условиях техники Плато плотности жидкостей ρ при нулевой температуре одинаковы, коэффициенты теплового расширения β_i считаются алгебраическими величинами. Задача аксиально-симметрична. Движение установившееся, ламинарное. Жидкости механически несжимаемы [3]: $\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0$, $i = 1,2$. Эти уравнения непрерывности в дальнейшем выписывать не будем, имея в виду, что они выполняются всегда. Центр масс капли в исходном состоянии совпадает с центром кюветы.

Уравнения Навье – Стокса будем использовать в приближении Обербека – Буссинеска [4] (см. обсуждение вопроса о применимости этого приближения и библиографию к нему в [5]), в уравнениях теплопроводности пренебрежем перекрестными эффектами [3]. Запишем эти уравнения в безразмерном виде

$$(\mathbf{v}_i \nabla)\mathbf{v}_i = -\nabla p_i + \nu_i \Delta \mathbf{v}_i + \gamma\beta_i T_i \mathbf{k} \tag{1.1}$$

$$\Pi \mathbf{v}_i \nabla T_i = \chi_i \Delta T_i \quad (i = 1,2)$$

$$\beta_i = \frac{\beta_i}{\beta_1}; \quad \gamma = \frac{g\beta_1\theta a^3}{\nu_1^2}; \quad \Pi = \frac{\nu_1}{\chi_1}$$

$$\mu = \frac{a\sigma_1\theta\rho}{\eta_1^2}; \quad \chi_i = \frac{\chi_i}{\chi_1}$$

В качестве единиц измерения выбраны: длина – средний радиус капли a, скорость $\nu_1 a^{-1}$, давление $\rho\nu_1^2 a^{-2}$, температура θ в верхней точке кюветы. Кроме пяти безразмерных параметров в системе уравнений (1.1), в задачу через граничные условия войдут: безразмерный радиус кюветы $\alpha = Aa^{-1}$, $\varkappa = \varkappa_2\varkappa_1^{-1}$, $\sigma = \sigma_0 a\rho\eta_1^{-1}$, $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный против ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$: $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. (Отметим, что в условиях техники Плато $\nu_2 = \eta \equiv \eta_2\eta_1^{-1}$.) Далее $\nu_2 \equiv \nu$, $\chi_2 \equiv \chi$, $\beta_2 \equiv \beta$.

Запишем граничные условия на поверхности кюветы и на свободной поверхности раздела жидкостей в сферической системе координат (r, ϑ, φ), начало которой совместим с центром кюветы, а полярную ось z направим вдоль $\mathbf{k}$. Безразмерное уравнение поверхности капли имеет вид

$$r = R(\vartheta) = 1 + s(\vartheta), \quad |s(\vartheta)| \ll 1$$

На твердой поверхности заданы условия прилипания и косинусоидальное распределение температуры

$$r = \alpha: \quad \mathbf{v}_1 = 0, \quad T = \cos\vartheta \tag{1.2}$$

Граничные условия на свободной поверхности обсуждались в [6] и подробно выведены в [7]. Запишем их в принятых обозначениях (радиальные компоненты скорости будем обозначать $v_r = u$, меридиональные – $v_\theta = w$, штрихом – производные по ϑ)

$$r = R(\vartheta): \quad Ru_i = R'w_i; \quad R'(u_1 - u_2) = R(w_2 - w_1) \tag{1.3}$$

$$T_1 = T_2; \quad R^2\left(\frac{\partial T_1}{\partial r} - \varkappa\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) = R'(T_1' - \varkappa T_2') \tag{1.4}$$

$$\delta P = 2\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \eta\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) - \frac{R'}{R}(\sigma_1' - \sigma_2' + \delta T) \tag{1.5}$$

$$\frac{R'}{R}\left[\delta P - 2(w_1' + u_1) + 2\eta(w_2' + u_2)\right] = \delta T - \sigma_1' - \sigma_2' \tag{1.6}$$

$$\delta P \equiv p_1 - p_2 + \gamma R\cos\vartheta T(\beta - 1) + (\sigma - \mu T)2H$$

$$\delta T \equiv \frac{\mu}{\sqrt{R^2 + R'^2}}\left(T' + R'\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_i' \equiv \eta_i\left(\frac{u_i' - w_i}{R} + \frac{\partial w_i}{\partial r}\right) \quad (i = 1,2)$$

$$2H \equiv 2 - (1 - 2s)(s'' + \mathrm{ctg}\vartheta s' + 2s) + O(s^3)$$

Условия (1.3) выражают равенство нулю касательных составляющих скорости, (1.4) – равенство температур и нормальных составляющих теплопотоков, (1.5) и (1.6) – непрерывность нормальных и касательных напряжений. Задача (1.1)–(1.6), строго говоря, некорректна. Это связано с тем, что в приближении Обербека – Буссинеска тепловое расширение жидкостей учитывается только при вычислении архимедовой силы. Плотности же жидкостей считаются постоянными. Поэтому капля в этом приближении, будучи при нулевой температуре в состоянии нейтральной плавучести, останется невесомой и при любой другой температуре и будет дрейфовать, пока не достигнет крышки кюветы [6]. Между тем реальная капля, безразмерный коэффициент теплового расширения β которой, например, меньше единицы, будет подниматься вверх, в сторону менее плотных областей только до тех пор, пока не окажется в новом положении равновесия, при котором силы Архимеда и тяжести F_z в проекции на ось z не уравновесятся силами давления и вязкости. Это равенство для сферической капли единичного радиуса имеет вид [3]

$$F_2 = 2\pi\int_0^{\pi}\left[\left(p_1 - 2\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)\cos\vartheta + \sigma_1'\sin\vartheta\right]\sin\vartheta d\vartheta \qquad (1.7)$$

Формулу (1.7) следует использовать для определения смещения капли вместо условия непрерывности нормальных составляющих напряжений (1.5) в том случае, если капля в ходе конвективных процессов не деформируется, оставаясь сферической. (Заметим, что предположение об отсутствии деформации капли физически эквивалентно допущению о бесконечно большом поверхностном натяжении σ в (1.5), по сравнению с которым остальные члены в этом уравнении становятся исчезающе малыми и должны быть отброшены. В этом случае уравнение (1.5), которое в конечном счете определяет форму капли, просто задает величину лапласовского давления в капле.)

Нужно, однако, иметь в виду, что капля не только увлекается течением, но и деформируется. Если деформация не сопровождается смещением ее центра масс (так будет, если в разложении функции $s(\vartheta)$ в ряд по полиномам Лежандра P_l будет отсутствовать член с $l = 1$), то условие (1.5) окажется выполненным, а сила F_z в (1.7) будет тождественно равной нулю. Если капля удерживается в центре кюветы внешними сторонними силами (например, электростатическими, как в [9]), то по формуле (1.7) можно оценить величину этих сил.

При замене уравнения (1.5) интегральным соотношением (1.7) в том случае, когда капля остается недеформированной, задача (1.1)–(1.7) становится самосогласованной и может быть использована для определения как смещения капли (по формуле (1.7)), так и деформации ее поверхности (по формуле (1.5)).

В систему уравнений (1.1)–(1.6) входят девять безразмерных параметров. Из них семь (α, β, $\varkappa$, $\nu = \eta$, Π, σ, χ) характеризуют геометрические и физико-химические свойства гетерогенной системы. Числа Марангони μ и Грасгофа γ определяют интенсивности капиллярного и гравитационного течений соответственно. Конвекция в этой задаче возникает бескризисно, при сколь угодно малых числах μ и γ.

При таком большом числе параметров предпочтение следует отдать аналитическому анализу, а не машинному счету. Полагая числа Марангони и Грасгофа малыми по сравнению с единицей, будем искать решение в виде ряда по степеням μ и γ. Все функции и постоянные интегрирования, относящиеся к первой (второй) среде, будем обозначать заглавными (строчными) буквами латинского алфавита, оставив греческие буквы для обозначения параметров системы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\gamma^n\mu^m\begin{pmatrix} Y_{nm} \\ y_{nm} \end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

где y_i – любая из функций $\mathbf{v}_i$, p_i, T_i и $s(\vartheta)$. Первый нижний индекс у функции соответствует степени γ, второй – степени μ.

Очевидно, что в нулевом приближении жидкости покоятся $\mathbf{V}_{00} = \boldsymbol{v}_{00} = 0$, форма капли остается сферической $s_{00} = 0$, а давления и температуры представим в следующей форме:

$$T_{00} = (E_{00}r + K_{00}r^{-2})P_1; \quad t_{00} = e_{00}rP_1 \tag{1.9}$$

$$E_{00} = \alpha^2(2+\varkappa)J; \quad K_{00} = \alpha^2(1-\varkappa)J$$

$$e_{00} = 3\alpha^2 J; \quad P_{00} - p_{00} = 2\sigma$$

$$J^{-1} \equiv 1 - \varkappa + \alpha^2(2+\varkappa)$$

Таким образом, в бесконвективном приближении изотермы в первой среде изогнуты в меру величины $\varkappa - 1$; в капле же они горизонтальны. Как следует из общей теории [3, 4], в этом случае равновесие невозможно и в жидкостях возникнет конвективное движение при любых числах γ, не равных нулю.

2. Линейные эффекты. Функции первого по числу Марангони и нулевого по числу Грасгофа приближения определяются из задачи

$$\nabla P_{01} = \Delta \mathbf{V}_{01}; \quad \nabla p_{01} = \nu \Delta \boldsymbol{v}_{01} \tag{2.1}$$

$$\Pi \mathbf{V}_{01} \nabla T_{00} = \Delta T_{01}; \quad \Pi \boldsymbol{v}_{01} \nabla t_{00} = \chi \Delta t_{01}$$

$$r = \alpha: \quad \mathbf{V}_{01} = 0; \quad T_{01} = 0$$

$$r = 1 + \mu s_{01}: \quad U_{01} = u_{01} = W_{01} - w_{01} = 0$$

$$T_{01} - t_{01} = 3K_{00}s_{01}P_1; \quad \frac{\partial T_{01}}{\partial r} - \varkappa \frac{\partial t_{01}}{\partial r} = 3K_{00}(s_{01}'P_1' - 2s_{01}P_1)$$

$$e_{00}P_1' = \left(\frac{\partial W_{01}}{\partial r} - W_{01}\right) - \eta\left(\frac{\partial w_{01}}{\partial r} - w_{01}\right)$$

В граничных условиях на поверхности раздела жидкостей функции следует вычислять при $r = 1$. Неоднородные члены в последних трех уравнениях появились из-за учета вкладов нулевого приближения. Так, равенство температур в (1.4) до преобразований должно быть записано следующим образом

$$T_{00}(1 + \mu s_{01}) + \mu T_{01}(1) = t_{00}(1 + \mu s_{01}) + \mu t_{01}(1)$$

Ограничившись в первых слагаемых обеих частей этого уравнения линейными по μ членами, получим приведенные в (2.1) выражения.

Решение уравнений Навье – Стокса в (2.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{01} \\ \boldsymbol{v}_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{01} \\ f_{01} \end{pmatrix} P_1 \mathbf{e}_r + \begin{pmatrix} G_{01} \\ g_{01} \end{pmatrix} r \nabla P_1; \quad \begin{pmatrix} P_{01} \\ p_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{01} \\ q_{01} \end{pmatrix} P_1 \tag{2.2}$$

Здесь P_l – полиномы Лежандра, а амплитуды при них – функции радиуса r. Выражения (2.2), будучи подставлены в уравнения Навье – Стокса в (2.1) и в уравнение непрерывности, приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд. Имея в виду дальнейшие вычисления, приведем здесь точные решения этих уравнений для функций, стоящих при P_l, записав их временно без индекса

$$f = Ar^{l+1} + Br^{-l} + Cr^{l-1} + Dr^{-l-2} \tag{2.3}$$

$$l(l+1)rg = \frac{d}{dr}(r^2 f); \quad q = \frac{4l+6}{l}Ar^l + \frac{4l-2}{l+1}\frac{B}{r^{l+1}} \tag{2.4}$$

В частности, радиальные функции в (2.2) таковы

$$F_{01} = A_{01}r^2 + \frac{B_{01}}{r} + C_{01} + \frac{D_{01}}{r^3}; \quad f_{01} = a_{01}r^2 + c_{01} \tag{2.5}$$

$$Q_{01} = 10A_{01}r + \frac{B_{01}}{r^2}; \quad q_{01} = 10a_{01}\eta r$$

Функции f_{01} и q_{01} записаны с учетом ограниченности в нуле, G_{01} и g_{01} не выписаны, поскольку они легко получаются простым дифференцированием из уравнений непрерывности (первое в (2.4)). Постоянные интегрирования $A_{01}, B_{01}, C_{01}, D_{01}, a_{01}$ и c_{01} нужно определить из граничных условий (2.1). Поскольку получающиеся при этом выражения достаточно громоздки, приведем лишь один коэффициент B_{01}, нужный для дальнейшего анализа

$$B_{01} = \alpha^2 J x_0 \left[x_5 - x_7 \frac{x_1x_3 - x_0x_6}{x_1x_2 - x_0x_4} \right] \tag{2.6}$$

$$x_0 = \alpha^2 - 1; \quad x_1 = 2\alpha^2 - 1; \quad x_2 = \alpha^2 - \alpha^{-3}; \quad x_3 = \alpha^2 - \alpha^{-1}$$

$$x_4 = 2\alpha^2 + \frac{1}{2\alpha^3}; \quad x_5 = \eta\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}\right) + 1 - \frac{1}{\alpha}$$

$$x_6 = 2\alpha^2 - \frac{1}{2\alpha}; \quad x_7 = \eta\left(\frac{3}{2}\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^3} - \frac{5}{2}\right) + x_2$$

Параметр J определен в (1.9). Заметим, что B_{01} – отрицательно определенная величина при всех допустимых значениях параметров α, η и $\varkappa$. В частности, при $\alpha = 2$

$$B_{01} = -1128(17 + 2\varkappa)^{-1}(108 + 5\eta)^{-1} \tag{2.7}$$

Для фиксированного значения α B_{01} убывает с ростом $\varkappa$ и η. Физически это понятно: скорость течения, а на экваторе при $\alpha = 2$ она равна $w \approx -0{,}17B_{01}\mu$, должна ослабевать с ростом вязкости и теплопроводности и при $\varkappa \to \infty$ или $\eta \to \infty$ должна стремиться к нулю. В этих случаях теплоперенос осуществляется диффузионным способом.

При подстановке найденных выражений для скорости и давления в уравнение (1.5) можно определить и функцию $s_{01}(\vartheta)$, которая, как того требуют остальные члены этого уравнения, должна быть пропорциональна полиному Лежандра первой степени $s_{01} = l_{01}P_1$. Однако амплитуда l_{01} этим уравнением не определяется: поправка к кривизне с такой зависимостью от угла ϑ оказывается тождественно равной нулю при любом $l_{01} \neq \infty$. Геометрически это связано с тем, что «деформация» поверхности раздела жидкостей с такой зависимостью от меридионального угла означает малое смещение капли по оси z на μl_{01} без изменения сферической формы капли. Скорость этого дрейфа для внешней задачи определена в [6].

Такое смещение капли в приближении Обербека – Буссинеска не создает возвращающей силы и потому амплитуда l_{01} не может быть определена с помощью (1.5) даже при отличном от нуля значении γ и для ее определения следует воспользоваться формулой (1.7), по которой можно определить величину внешних сил F_z, которые должны закрепить каплю в новом положении равновесия. В данном случае $F_z = \frac{4}{3}\mu B_{01}\pi$. Уравновешивающая каплю сила F_z направлена, как и следовало ожидать, против возможного дрейфа капли в сторону нагретых областей, поскольку (для положительных σ_1) $B_{01} < 0$.

Новое положение равновесия с помощью вычисленной силы F_z можно найти следующим образом. Пусть капля, взвешенная в конвективном потоке, поднялась на высоту Δz, где оказалась при средней температуре $\langle T\rangle \approx E_{00}\Delta z$. При этом ее объем увеличился на $\frac{4}{3}\pi E_{00}\Delta z\beta$, в то время как для нулевой плавучести необходимо увеличение на $\frac{4}{3}\pi E_{00}\Delta z$. Поэтому капля, если ее коэффициент теплового расширения $\beta < 1$, будет всплывать далее, пока не окажется на высоте $\Delta z_* = l_{01}$, величина которой определится из условия равенства нулю вязких, гравитационных и архимедовых сил: $(\beta-1)E_{00}l_{01} = B_{01}$. Для случая $\beta > 1$ равновесие без сторонних сил невозможно – капля будет всплывать, пока не достигнет крышки кюветы. При дальнейшем анализе будем считать l_{01} известной величиной порядка единицы.

Для определения поля температур T_{01} и t_{01} заметим, что в уравнениях теплопроводности (2.1) неоднородные слагаемые $\mathbf{V}_{01}\nabla T_{00}$ и $\boldsymbol{v}_{01}\nabla t_{00}$ пропорциональны полиномам Лежандра P_0 и P_2. Поэтому поправки к температурам должны иметь вид

$$T_{01} = M_{01}P_0 + N_{01}P_2; \quad t_{01} = m_{01}P_0 + n_{01}P_2 \tag{2.8}$$

Подставив формулы (2.8) в уравнения теплопроводности (2.1) и собрав в них члены при одинаковых полиномах Лежандра, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных функций в (2.8), точное решение которой имеет вид

$$M_{01} = E_{01}^{(0)} + K_{01}^{(0)}r^{-1} + T_{01}^{(0)}; \quad m_{01} = e_{01}^{(0)} + t_{01}^{(0)} \tag{2.9}$$

$$N_{01} = E_{01}^{(2)}r^2 + K_{01}^{(2)}r^{-3} + T_{01}^{(2)}; \quad n_{01} = e_{01}^{(2)}r^2 + t_{01}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} T_{01}^{(0)} \\ T_{01}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{\Pi}{3}\Bigg[A_{01}E_{00}r^4\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/7 \end{pmatrix} + \frac{C_{01}E_{00}r^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{10}K_{00}r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{B_{01}E_{00}r^2}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2C_{01}K_{00} - D_{01}E_{00}}{2r}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{B_{01}K_{00}}{4r^2}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{D_{01}K_{00}}{4r^4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\Bigg]$$

$$\begin{pmatrix} t_{01}^{(0)} \\ t_{01}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{\Pi e_{00}}{6\chi}\left[\frac{a_{01}r^4}{14}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} + c_{01}r^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Выражения для функций $T_{01}^{(l)}$ и $t_{01}^{(l)}$ $(l = 0,2)$ представлены в матричной форме. Так, например, $t_{01}^{(2)} = -\Pi a_{01}e_{00}r^4(21\chi)^{-1}$.

Постоянные интегрирования $E_{01}^{(l)}$, $K_{01}^{(l)}$ и $e_{01}^{(l)}$ $(l = 0,2)$ легко определяются из граничных условий (2.1).

Функции первого по числу Грасгофа γ и нулевого по μ приближения определяются по той же схеме. За недостатком места приведем сразу точные выражения для скоростей и температур

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{10} \\ \boldsymbol{v}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{10} \\ f_{10} \end{pmatrix}P_2\mathbf{e}_r + \begin{pmatrix} G_{10} \\ g_{10} \end{pmatrix}r\nabla P_2; \quad \begin{pmatrix} T_{10} \\ t_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{10}^{(1)} \\ m_{10}^{(1)} \end{pmatrix}P_1 + \begin{pmatrix} M_{10}^{(3)} \\ m_{10}^{(3)} \end{pmatrix}P_3 \tag{2.10}$$

$$F_{10} = A_{10}r^3 + \frac{B_{10}}{r^2} + C_{10}r + \frac{D_{10}}{r^4} + \frac{K_{00}}{4}; \quad f_{10} = a_{10}r^3 + c_{10}r \tag{2.11}$$

$$M_{10}^{(l)} = E_{10}^{(l)}r^l + \frac{K_{10}^{(l)}}{r^{l+1}} + T_{10}^{(l)}; \quad m_{10}^{(l)} = e_{10}^{(l)}r^l + t_{10}^{(l)} \quad (l = 1,3)$$

$$\begin{pmatrix} T_{10}^{(1)} \\ T_{10}^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{\Pi}{5}\left[\frac{A_{10}E_{00}r^5}{36}\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{C_{10}E_{00}r^3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{K_{00}E_{00}r^2}{24}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{A_{10}K_{10}r^2}{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{10}K_{00}}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{B_{10}E_{00}}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{K_{00}^2}{12r}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{D_{01}E_{00}}{2r^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{B_{10}K_{00}}{r^3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{D_{10}K_{00}}{6r^5}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} t_{10}^{(1)} \\ t_{10}^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{\Pi e_{00}}{10\chi}\left[\frac{a_{10}r^5}{18}\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} + c_{10}r^3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Капля в этом приближении принимает эллипсоидальную форму $r = 1 + \gamma l_{10} P_2$

$$l_{10} = I_0 + \frac{1}{4\sigma}(I_2 I_7 - I_3 I_5)(I_1 I_7 - I_3 I_4)^{-1} \tag{2.12}$$

$$I_1 = \frac{3}{8}(\eta I_8 - \alpha I_6); \qquad I_2 = \frac{K_{00}}{4}\left[I_8\left(\frac{\eta}{40} - \frac{2}{5}\right) + I_6\left(2 + \frac{81\alpha}{40}\right)\right]$$

$$I_3 = I_6\left(\frac{2}{\alpha^4} + \frac{3\alpha}{8}\right) - I_8\left(2 + \frac{19\eta}{8}\right); \qquad I_4 = \frac{3}{8}\left[I_6\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha\right) - \eta I_9\right]$$

$$I_5 = \frac{K_{00}}{4}\left[I_9\left(\frac{2}{5} - \frac{\eta}{40}\right) + I_6\left(3 - \frac{39}{40\alpha^2} - \frac{81\alpha}{40}\right)\right]$$

$$I_6 = \eta - 1; \qquad I_7 = I_9\left(2 + \frac{19}{8}\eta\right) - I_6\left(\frac{3}{\alpha^4} - \frac{21}{8\alpha^2} - \frac{3\alpha}{8}\right)$$

$$I_8 = \frac{5\alpha^3 - 3\alpha}{2}; \qquad I_9 = \frac{3}{2}(\alpha - \alpha^3); \qquad I_0 = \frac{e_{00}}{12\sigma}(1 - \beta)$$

Формула для определения эксцентриситета эллипсоидальной в этом приближении капли (2.12) содержит два разнородных слагаемых: первое связано с термической деформацией жидкостей, второе – с конвективным движением. При $\varkappa = 1$ течение отсутствует, форма капли $r = 1 + \gamma I_0 P_2$. Поскольку $e_{00} > 0$ (см. (1.9)), то капля приобретает форму сплющенного эллипсоида вращения, если $\beta > 1$. Физически такое поведение можно понять так. Капля, которая расширяется при нагреве сильнее, чем окружающая жидкость, должна, чтобы остаться в равновесии, сосредоточиться большей частью в своем прежнем положении безразличного равновесия вблизи $z = 0$ и тем уменьшить по возможности объемы своих относительно более легких северных областей и более тяжелых южных. При $\beta < 1$ капля вытягивается вдоль z.

Второе слагаемое в (2.12) определяет величину деформации капли вследствие свободного конвективного движения. При $\beta = 1$ и $\alpha = 2$ форма капли такова

$$r = 1 + \gamma\frac{K_{00}}{80\sigma}\,\frac{12111\eta + 13899}{511\eta + 723}; \qquad K_{00}(\alpha = 2) = \frac{4(1 - \varkappa)}{17 + 7\varkappa}$$

Таким образом, вытянутость или сплюснутость капли определяется только знаком K_{00} и не зависит от вязкости η. Например, при $\varkappa > 1$, когда изотермы как бы охватывают каплю, а течение вблизи поверхности направлено вдоль меридианов от полюсов к экватору, капля приобретает сплющенную форму. Наоборот, при $\varkappa < 1$ капля вытягивается вдоль оси z, растягиваясь конвективным движением.

3. Перекрестный эффект. Из квадратичных членов в разложении (1.8) вычислим только линейное по произведению $\gamma\mu$ приближение, которое определяет перекрестный (капиллярный и гравитационный) эффект. Только этот член приводит к грушевидной деформации капли ($r = 1 + \gamma l_{10} P_2 + \gamma\mu l_{11} P_3$), легко фиксируемой в эксперименте. Члены же, пропорциональные γ^2 и μ^2, вызывают зеркально-симметричную деформацию капли: $r = 1 + \gamma l_{10} P_2 + \gamma^2 l_{20} P_4$, незаметную на фоне подобной деформации в первом порядке. (Раздельное вычисление всех трех квадратичных членов оказывается возможным из-за их независимости).

Собрав в системе уравнений (1.1)–(1.7) члены, пропорциональные $\gamma\mu$, по приведенной выше методике получим точные выражения для скоростей, давлений и температур. В частности

$$\mathbf{v}_{11} = \sum_{l=1,3} f_{11}^{(l)} P_l \mathbf{e}_r + g_{11}^{(l)} r \nabla P_l \tag{3.1}$$

$$s_{11} = l_{11}^{(1)} P_1 + l_{11}^{(3)} P_3$$

Не выписывая здесь из-за громоздкости выражения для радиальных функций, ограничимся качественным анализом полученных на этом этапе результатов. Влияние гравитационных эффектов на интенсивность течения и форму капли очень сильно зависит от параметров $\varkappa$ и β. Так, при $\varkappa = 1$ в первом по γ приближении движение вообще не возникает, а при $\varkappa = \beta = 1$ исчезает и деформация капли – она остается сферической. Капиллярные эффекты менее чувствительны к параметрам системы и не исчезают ни при каких их конечных значениях.

В линейном по $\gamma\mu$ приближении капля приобретает, как это видно из формулы (3.1): $s_{11} \sim l_{11}^{(3)} P_3$, грушевидную форму, причем амплитуда $l_{11}^{(3)}$ в зависимости от игры параметров может менять знак. Для гипотетической системы, у которой все параметры единичные, кроме β, утолщение капли расположено внизу при $\beta > 1$ и в верхней части при $\beta < 1$.

Такое различие можно пояснить следующими наглядными рассуждениями. При $\beta > 1$ в жидкостях возникает адекватное течение в виде двух тороидальных вихрей в северном и южном полушариях. Причем частицы внешней жидкости вблизи оси симметрии в верхней половине кюветы опускаются вниз к капле, нагревая ее северные участки, а внизу, поднимаясь, охлаждают «Антарктиду» капли. А поскольку при $\beta > 1$ жидкость капли расширяется сильнее окружающей среды, то ее северные области становятся относительно более легкими и для равновесия должны уменьшиться в объеме. Противоположный процесс в южном полушарии приводит к тому, что капля приобретает вид висящей груши.

Поправка к смещению капли по оси z $\gamma\mu l_{11}^{(1)}$ определяется интегральным условием (1.7).

Полученные результаты можно применить, используя метод усреднения Эйнштейна [3, п. 22], для оценки интенсивности конвективного движения в эмульсиях малых концентраций, подобно тому, как это сделано в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Русанов А.И., Прохоров В.А.* Межфазная тензиометрия. СПб: Химия, 1994. 398 с.
2. Краткий курс физической химии / Под ред. С.Н. Кондратьева. М.: Высш. шк., 1978. 312 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. *Пухначев В.В.* Микроконвекция в вертикальном слое // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 76–84.

6. *Братухин Ю.К.* Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 156–161.
7. *Братухин Ю.К., Макаров С.О.* Межфазная конвекция. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1994. 327 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.
9. *Братухин Ю.К., Семенов В.А.* Об условиях устойчивого равновесия диэлектрических шаров в электростатическом поле // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 6. С. 2170–2175.
10. *Братухин Ю.К., Путин Г.Ф.* О внутрипоровой конвекции при вертикальной ориентации осредненного градиента температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 93–98.

Пермь

Поступила в редакцию
9.III.1995