МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1996

УДК 532.51:517.95

© 1996 г. С.Ю. ДОБРОХОТОВ, А.И. ШАФАРЕВИЧ

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Получены интегральные тождества, которым удовлетворяет поле скоростей несжимаемой жидкости в неограниченной области. При помощи этих тождеств получены оценки на скорость затухания на бесконечности потока жидкости и установлено свойство мгновенного "расплывания" локализованного потока.

Вопрос о поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный объем, обсуждался во многих работах (см., например, [1–4]). Для ряда конкретных задач (например, для классической задачи обтекания тела внешним однородным стационарным потоком) этот вопрос детально изучен. В настоящей заметке приводится простой способ получения оценок сверху на скорость затухания на бесконечности убывающего поля скоростей общего вида, т.е. оценок снизу на само поле. Этот способ основан на использовании простых интегральных тождеств, которым обязаны удовлетворять решения уравнений Навье – Стокса во внешней области, затухающие на бесконечности достаточно быстро. При этом чем быстрее убывание, тем больше тождеств, т.е. условий на поле скоростей. Для уравнений во всем пространстве некоторые из этих тождеств были получены в [5]. Обсуждаемое ниже свойство "медленного убывания" или "расплывания" локализованного потока жидкости есть следствие несжимаемости и не связано только с вязкостью (в отличие, например, от ситуации, описанной в [2]) – оно остается справедливым и для идеальной жидкости.

Поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ несжимаемой вязкой жидкости удовлетворяет уравнениям Навье – Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u},\ \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}; \quad (\nabla,\ \mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ – трехмерная пространственная переменная, t – время, p – давление в жидкости, ν – коэффициент вязкости ($\nu = 1/\mathrm{Re}$, где Re – число Рейнольдса).

Рассмотрим поток, заполняющий неограниченный объем Ω – внешность некоторой ограниченной области в трехмерном пространстве с гладкой границей Γ. На границе вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет краевому условию прилипания. Приводимые ниже результаты сохраняют силу и для идеальной жидкости, поле скоростей которой удовлетворяет уравнению Эйлера, получающемуся из (1) при $\nu = 0$, и краевому условию непротекания. Таким образом, в области Ω рассматривается уравнение (1), в котором ν, в частности, может быть равным 0, дополненное краевым условием

$$\mathbf{u}\big|_\Gamma = 0, \quad \nu \neq 0; \quad (\mathbf{u},\ \mathbf{n})\big|_\Gamma = 0, \quad \nu = 0 \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – единый вектор нормали к Γ. Выведем интегральные условия на поток $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Умножим первое (векторное) уравнение в (1) скалярно на градиент некоторой гладкой функции $f(\mathbf{x})$ и проинтегрируем по некоторой достаточно большой, но ограниченной области, которая целиком охватывает границу Γ и содержится в Ω. Другими словами, эта область (обозначим ее через D) получается из некоторой области D', целиком содержащей дополнение к Ω в $\mathbb{R}^3$ выбрасыванием этого дополнения (например, в качестве D можно взять $S \cap \Omega$, где S – шар достаточно большого радиуса). Получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D (\mathbf{u},\ \nabla f)d^3x + \int_D (\nabla f,\ (\mathbf{u},\ \nabla)\mathbf{u})d^3x = -\int_D (\nabla p,\ \nabla f)d^3x + \nu\int_D (\nabla f,\ \Delta\mathbf{u})d^3x \tag{3}$$

Из равенства $(\nabla,\ \mathbf{u}) = 0$ следуют соотношения

$$(\mathbf{u},\ \nabla f) = (\nabla,\ \mathbf{u}f)$$

$$(\nabla f,\ (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}) = (\nabla, (\mathbf{u}, \nabla f)\mathbf{u}) - (\mathbf{u}, (\partial^2 f / \partial x^2)\mathbf{u})$$

$$(\nabla f, \nabla p) = (\nabla, p\nabla f) - p\Delta f$$

$$(\nabla f, \Delta\mathbf{u}) = (\nabla, (\partial u / \partial x)^* \nabla f) - (\nabla, (\partial^2 f / \partial x^2)\mathbf{u}) + (\nabla, \mathbf{u}\Delta f)$$

где $(\partial^2 f/\partial x^2)$ – 3×3-матрица вторых производных f, $(\partial u/\partial x)^*$ – матрица, транспортированная к матрице $(\partial u/\partial x)$ производных поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)((\partial u/\partial x)^*)_{ij} = \partial u_j/\partial x_i$. Подставляя эти равенства в (3) и применяя формулу Остроградского – Гаусса, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G f(\mathbf{u}, \mathbf{m})d\tau + \int_G (\mathbf{u}, \mathbf{m})(\mathbf{u}, \nabla f)d\tau + \nu\int_G \left(\mathbf{m}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u}\right)d\tau - \nu\int_G \Delta f(u, \mathbf{m})d\tau - \tag{4}$$

$$-\nu\int_G \left(\nabla f, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{m}}\right)d\tau + \int_D \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u}\right)d^3x = \int_D p\Delta f d^3x - \int_G p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{m}}d\tau$$

Здесь G – граница области D, она состоит из двух частей – внутренней Γ и внешней, $\mathbf{m}$ – единичный вектор нормали к G, $d\tau$ – элемент площади на G.

Тождеству (4) удовлетворяет любое (дважды дифференцируемое) решение уравнений Навье – Стокса (1). Получим теперь следствия этих тождеств, которые позволяют получать оценки на скорость убывания на бесконечности поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Возьмем в качестве D область $S_R \cap \Omega$, где S_R – шар радиуса R и устремим R к бесконечности. Предположим, что функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и все ее производные убывают при $|\mathbf{x}| \to \infty$ быстрее, чем $|f(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^2|^{-1}$. Тогда все интегралы по сфере радиуса R стремятся к нулю при $R \to \infty$, и в пределе получаем, с учетом краевых условий (2), равенства

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u}\right)d^3x - \nu\int_\Gamma \left(\nabla f, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}\right)d\tau = \int_\Omega p\Delta f d^3x - \int_\Gamma p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}d\tau \tag{5}$$

Налагая дополнительные условия на функцию f, можно занулить правую часть в (5). Именно, будем считать, что f удовлетворяет в Ω уравнению Лапласа с краевым условием Неймана на Γ:

$$\Delta f = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\right|_\Gamma = 0. \tag{6}$$

Таких функций, конечно, очень много: можно взять любую гармоническую в R^3 функцию $f_0(\mathbf{x})$ и положить $f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})$, где $\varphi(\mathbf{x})$ – решение внешней задачи Неймана

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{ в } \ \Omega; \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = -\left.\frac{\partial f_0}{\partial n}\right|_\Gamma; \quad \lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} \varphi(x) = 0$$

которое существует и единственно.

С учетом (6) из (5) получаем

$$\int_{\Omega}\left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u}\right)d^3x = \nu\int_{\Gamma}\left(\nabla f, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)d\tau \tag{7}$$

Таким образом, каждое дважды дифференцируемое поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющее в области Ω уравнению (1) с краевым условием (2) и убывающее при $|\mathbf{x}| \to \infty$ быстрее, чем $(f(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^2)^{-1}$, удовлетворяет дополнительному условию (7). В частности, если в начальный момент времени поле скоростей локализовано, но не удовлетворяет равенствам (7), то это поле должно либо мгновенно распыляться в поток, убывающий не быстрее, чем $(f|\mathbf{x}|^2)^{-1}$, либо потерять гладкость.

Обсудим некоторые следствия и обобщения тождеств в (7), а также сформулируем ряд вопросов.

1. Чем более быстрое убывание потока $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ требовать, тем более жесткие условия следуют из тождеств (7). Действительно, если рассматривать потоки, убывающие быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-N}$, $N > 0$, то в (7) в качестве функции f можно брать любое решение задачи (6), растущее на бесконечности не быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{N-2}$: таких функций тем больше, чем больше N. В частности, если рассматривать потоки, убывающие вместе с производными быстрее любой степени $1/|\mathbf{x}|$, то равенство (7) должно быть выполнено для любого решения (6), растущего не быстрее, чем некоторая степень $|\mathbf{x}|$. Представляется интересным следующий вопрос: как описать (классифицировать) множество всех потоков $\mathbf{u}$, удовлетворяющих тождествам (7), в которых f удовлетворяет (6) и растет на бесконечности не быстрее чем $|\mathbf{x}|^{-N}$ (N – фиксированное число)? В частности, как описать поля скоростей, убывающие быстрее любой степени, т.е. такие потоки $\mathbf{u}$, которые удовлетворяют (7) для любого растущего не быстрее степени решения (6). Авторам не удалось найти в литературе ни одного примера таких потоков.

2. Тождества (5) и (7) выводятся точно также и в двумерном случае, т.е. когда $\mathbf{x}$ двумерно и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – двумерный вектор. Однако условия (7) в двумерном случае "менее жесткие", чем в трехмерном. В частности, любая функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$, такая, что ее функция тока ψ зависит только от $r = |\mathbf{x}|$ (радиально симметричные поля) удовлетворяет (7) независимо от того, как быстро убывает ψ, т.е. как быстро растет f. Например, в двумерном случае существуют финитные потоки, т.е. такие потоки, которые равны нулю вне некоторой ограниченной области. Сформулированные выше вопросы интересны и для двумерных полей; в частности, как описать все финитные потоки?

3. В частном случае $\Omega = R^3$ (поток во всем пространстве), тождества (7) принимают вид

$$\int_{R^3}\left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u}\right)d^3x = 0$$

где f – гармоническая функция. Например, выбирая $f = x_i x_j$ ($i \neq j$) и $f = x_i^2 - x_j^2$, получим тождества из работы [5]:

$$\int_{R^3} u_i u_j d^3x = 0, \quad i \neq j, \quad \int_{R^3} u_1^2 d^3x = \int_{R^3} u_2^2 d^3x = \int_{R^3} u_3^2 d^3x$$

4. Рассмотрим еще один частный случай $\Omega = R^2 / S^1$, где S^1 – единичная окружность: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и положим

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2\left(1 - \frac{2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right)$$

Легко проверить, что f удовлетворяет условиям (6). Тождество (7) в этом случае принимает вид

$$\int_1^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{6}{r^4}(\cos 4\varphi u_1 u_2 + \sin 4\varphi (u_2^2 - u_1^2)) + 2u_1 u_2 \right\} =$$

$$= \nu \int_0^{2\pi} d\varphi \left(4\sin 2\varphi \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial u_2}{\partial r}\sin\varphi \right) - \frac{\partial u_1}{\partial r}\sin\varphi - \frac{\partial u_2}{\partial r}\cos\varphi \right)\Bigg|_{r=1}$$

5. Приведем одно обобщение тождеств (5) и (7). Рассмотрим возмущение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ некоторого гладкого потока $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, который считается известным. Векторное поле $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}; \quad (\nabla, \mathbf{u}) = 0$$

Совершенно аналогично (5) получаем в этом случае

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{v} \right) d^3x + \int_\Omega \left(\mathbf{v}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u} \right) d^3x + \int_\Omega \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u} \right) d^3x - \nu \int_\Gamma \left(\nabla f, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) d\tau =$$

$$= \int_\Omega p\Delta f d^3x - \int_\Gamma p \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\tau$$

Если функция f удовлетворяет (6), получаем обобщение тождеств (7):

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{u} \right) d^3x + 2\int_\Omega \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{v} \right) d^3x = \nu \int_\Gamma \left(\nabla f, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\tau$$

Эти тождества, конечно, позволяют делать аналогичные выводы о расплывании и медленном убывании возмущения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ внешнего течения $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. В частности, для линеаризованных уравнений, описывающих эволюцию очень маленького начального возмущения $|\mathbf{u}_0| \ll |\mathbf{v}|$, полученного тождества

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{v} \right) d^3x = \frac{\nu}{2} \int_\Gamma \left(\nabla f, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) d\tau \tag{8}$$

также приводящие к расплыванию возмущения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Эти тождества содержат два слагаемых, одно из которых зависит от течения $\mathbf{v}$ и обращается в ноль при $\mathbf{v} = 0$, а другое зависит от коэффициента вязкости ν и вида границы Γ и обращается в ноль при $\nu = 0$ (идеальная жидкость) и при $\Gamma = 0$ (т.е. когда область течения – все пространство). Эти два слагаемых отвечают двум механизмам расплывания возмущения $\mathbf{u}_0$. Первый механизм связан с наличием невозмущенного течения, а второй – с наличием вязкости и границы (т.е. обтекаемого тела). При этом действие вязкости при наличии тела существенно отличается от случая свободного течения. Действительно, если $\Omega = \mathbb{R}^3$ и $\nu = 0$, то решение линеаризованного уравнения Навье – Стокса с начальным условием $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x)$ имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{3/2}} \int_{R^3} \mathbf{u}_0(\mathbf{y}) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\nu t} \right] d^3y$$

откуда следует, что если начальное возмущение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ локализовано, т.е. отлично от нуля только в ограниченной области, то при $t > 0$ оно становится отличным от нуля в неограниченной области, однако экспоненциально убывающим при $|\mathbf{x}| \to \infty$. В то же время из тождеств (8), как отмечалось выше, следует, что $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ затухает не быстрее некоторой степени $|\mathbf{x}|^{-1}$. Таким образом, вязкость в случае свободного потока во всем пространстве приводит к "экспоненциальному расплыванию", а в случае обтекания тела – к степенному.

Заключение. Основной результат настоящей работы состоит в предъявлении серии простых интегральных тождеств для поля скоростей убывающего на бесконечности потока несжимаемой жидкости. Из этих тождеств следует, что локализованный начальный поток общего вида (или локализованное возмущение внешнего потока) мгновенно расплывается, т.е. становится убывающим на бесконечности не быстрее, чем некоторая степень $|\mathbf{x}|$. Полученные тождества позволяют оценивать снизу эту степень; кроме того, они указывают на различные причины расплывания (вязкость, неоднородный внешний поток, нелинейность).

Эта работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 013-17702).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. *Serrin J.* Mathematical principles of classical fluid mechanics // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1959, Bd 8/1. P. 125–262. 1959 (Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.).
3. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
4. *Солонников В.А.* Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 1964. Т. 70.
5. *Dobrokhotov S.Yu., Shafarevich A.I.* Some integral identities and remarks on decay at infinity of the solutions to the Navier – Stokes equations in the entire space // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 1. P. 133–136.

Москва

Поступила в редакцию
30.V.1995