

УДК 532.5:536.25

©1996 г. С.А. НИКИТИН, Д.С. ПАВЛОВСКИЙ, В.И. ПОЛЕЖАЕВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА КОНВЕКЦИИ В ВЫТЯНУТЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СЛОЯХ ПРИ БОКОВОМ ПОДВОДЕ ТЕПЛА

Рассматривается тепловая гравитационная конвекция в удлиненном параллелепипеде, короткие грани которого поддерживаются при различных температурах, а другие грани теплоизолированы. На основе анализа устойчивости основного течения в бесконечном канале, а также численного решения трехмерных уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска в замкнутом канале исследуется пространственная структура конвекции при изменении числа Грасгофа, длины и ширины области.

Задача о тепловой гравитационной конвекции в горизонтальном слое при боковом подводе тепла, являющаяся одним из частных случаев задачи о конвекции в замкнутой области, в последние годы выделилась как одна из характерных задач наряду с такими известными случаями, как конвекция в горизонтальном слое при подогреве снизу (задача Рэлея – Бенара) и конвекция в вертикальном слое, подогреваемом сбоку. Наиболее интенсивно изучается случай малых чисел Прандтля  $Pr$ , что обусловлено потребностями выяснения причин макро- и микронеоднородностей в распределении примесей при выращивании кристаллов полупроводников методом горизонтальной направленной кристаллизации (метод Бриджмена), а также их устранения в земных условиях и в условиях невесомости.

Подходы к формулировке математических моделей, а также состояние теоретических и экспериментальных исследований конвекции в горизонтальных слоях представлены в последние годы во многих обзорах и монографиях (см., например, [1–7], где можно найти дополнительную библиографию).

Как следует из цитированной литературы, основные результаты по влиянию конвекции на макро- и микронеоднородности распределения примесей получены с помощью численного решения двумерных уравнений конвекции. Немногочисленные работы, в которых решаются трехмерные задачи, были ограничены в случае малых чисел  $Pr$  по числу Грасгофа  $Gr$  и удлинению слоя [4, 6, 8] и лишь в работах [9, 10] на основе трехмерных моделей (при  $L/H = 4$ ) достигнут диапазон чисел  $Gr$ , соответствующий колебательным режимам конвекции, которые нуждаются в интерпретации с позиций теории устойчивости.

При изучении конвективной устойчивости в горизонтальных слоях в качестве основного течения широко применяется аналитическое решение Бириха [11], которое предполагает зависимость скорости только от вертикальной координаты, что ограничивает изучение пространственной структуры, не дает возможности найти зависимость критических параметров от ширины слоя и затрудняет интерпретацию данных прямого численного решения трехмерных уравнений конвекции.

Вместе с тем рассмотрение пространственной структуры на основе трехмерных моделей необходимо для полного понимания механизма смешения путем конвекции и, в частности, должно дать объяснение как истинных причин температурных колебаний в расплавах жидких металлов в горизонтальных «лодочках» [12] и обусловленной ими полосчатой неоднородности кристаллов, так и аномальной микронеоднородности моно-

кристаллов, выращенных в условиях невесомости [13]. При этом особенно большой интерес представляют исследования при больших удлинениях, характерных для практики, где информация о структуре тепловой гравитационной конвекции в горизонтальном слое весьма ограничена. В частности, на основе трехмерной модели при  $L/H = 4$  в [8] получены данные о существенном изменении критического числа  $Gr$  при различных ширинах слоя, что показывает возможность управления конвективной неустойчивостью за счет изменения ширины. Однако при больших длинах такие данные отсутствуют.

В данной работе продолжаются исследования, относящиеся к конвекции в замкнутой области с боковым подогревом при малых числах  $Pr$ , начатые в [8], где объединены вместе метод анализа конвективной устойчивости и прямое численное моделирование на основе уравнений Навье – Стокса, что может быть эффективным в вытянутых слоях.

Исследуются структуры поля течения, а также критические числа  $Gr$ , при которых возникают вторичные структуры. Для случая  $Pr = 0$  найдена зависимость критического числа  $Gr$  и длины волны от относительной ширины слоя.

**1. Математическая модель.** Рассматривается тепловая гравитационная конвекция в прямоугольной области длиной  $L$ , шириной  $W$  и высотой  $H$ . На двух гранях, перпендикулярных длинной стороне области, заданы постоянные значения температуры  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 < T_2$ , средний градиент температуры  $A = (T_2 - T_1) / L$ ), остальные грани теплоизолированы. Начало декартовой системы координат  $x, y, z$  находится в углу области, ось  $x$  направлена вдоль длинной стороны, ось  $z$  противоположна направлению ускорения силы тяжести  $g$ .

Исходной является модель конвекции в приближении Буссинеска, которая записывается в переменных скорость, давление, температура в следующем безразмерном виде ( $H$  – масштаб длины,  $g\beta AH^3/\nu$  – масштаб скорости,  $AH$  – масштаб температуры,  $H^2/\nu$  – масштаб времени):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + Gr (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \Delta \mathbf{V} + Te$$

$$\text{div} (\mathbf{V}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr (\mathbf{V} \cdot \nabla T) = \frac{1}{Pr} \Delta T$$

Здесь  $\mathbf{V} = (U, V, W)$  – вектор скорости,  $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$  – единичный вектор, направленный против силы тяжести,  $Pr = \nu/\kappa$  – число Прандтля,  $Gr = g\beta AH^4/\nu^2$  – число Грасгофа,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения.

Граничные условия: границы области твердые и непроницаемые, торцевые стенки поддерживаются при заданных температурах, боковые стенки, верхнее и нижнее основания теплоизолированы.

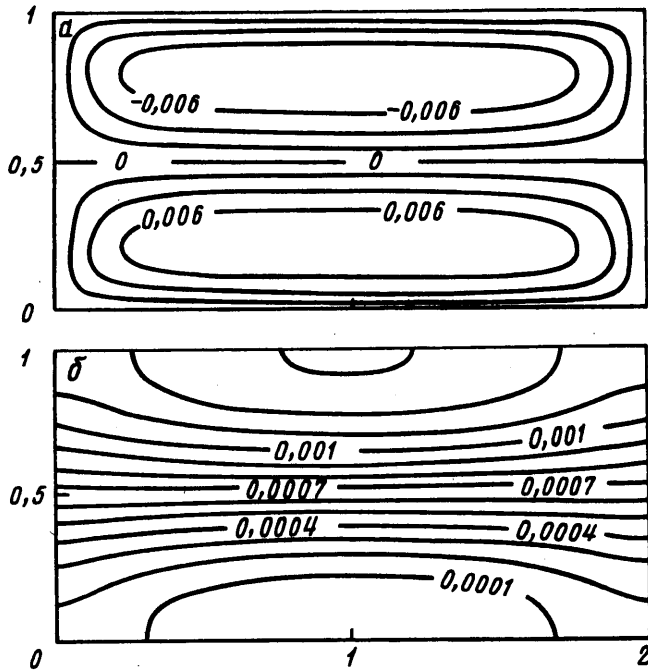
**2. Случай бесконечно длинной области. Основное течение.** Рассмотрим предельный случай  $L/H \rightarrow \infty$ . При этом должно выполняться условие замкнутости течения

$$\iint_{\Omega} U dy dz = 0 \tag{2.1}$$

где прямоугольник  $\Omega = \{(y, z): 0 \leq y \leq W/H, 0 \leq z \leq 1\}$  задает произвольное поперечное сечение области.

В случае бесконечно длинной области задача обладает решением, описывающим плоскопараллельное течение, для которого

$$U_0 = U_0(y, z), \quad V_0 = W_0 = 0, \quad T_0 = x + Gr Pr \theta_0(y, z) \tag{2.2}$$



Фиг. 1. Изолинии скорости (а) и температуры (б) основного течения при  $W/H = 2$

Подставляя формулы (2.2) в уравнения (1.1) и исключая давление, получаем, что искомые функции  $U_0$  и  $\theta_0$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \Delta U_0 = 1, \quad \Delta \theta_0 = \text{Gr Pr } U_0$$

в прямоугольнике  $\Omega$  с граничными условиями

$$U_0 = 0, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial n} = 0$$

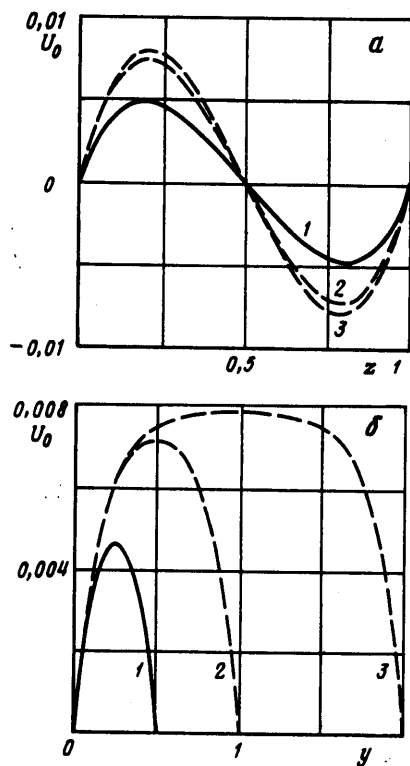
и условием замкнутости потока (2.1).

В пределе  $W/H \rightarrow \infty$  искомое течение соответствует основному течению в бесконечном слое [11], имеющему вид

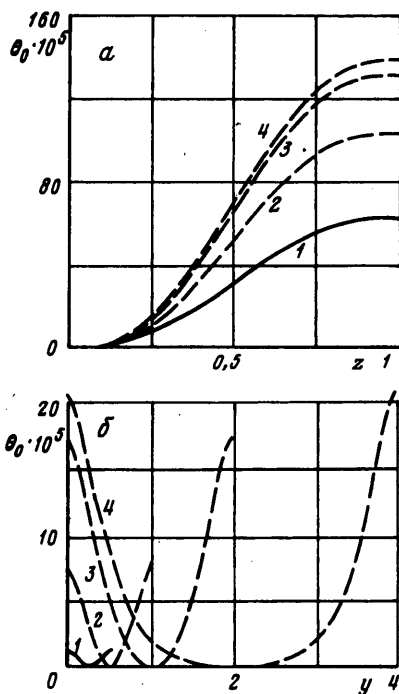
$$U_0(z) = \frac{1}{12}(2z^3 - 3z^2 + z), \quad \theta_0(z) = \frac{1}{720}(6z^5 - 15z^4 + 10z^3) \quad (2.3)$$

Для численного получения основного течения использовались аппроксимация искомых функций многочленами и метод коллокаций в нулях многочлена Чебышева. Этот численный метод подробно описан в [14]. На фиг. 1 приведены изолинии скорости и температуры, описывающие основное течение при  $W/H = 2$ .

На фиг. 2, а приведены вертикальные профили скорости основного течения; при  $W/H = 2$  профиль скорости основного течения неотличим на графике от предельного (2.3). Фигура 2, б, на которой приведены горизонтальные профили скорости основного течения, показывает наличие ядра при больших относительных ширинах. На фиг. 3 приведены аналогичные сечения профиля температуры  $\theta_0(y, z)$ , при этом профиль температуры неотличим на графике (а) от предельного (2.3) при  $W/H = 4$ , для которого заметно ядро в середине области (б).



Фиг. 2. Профили скорости основного течения при  $W/H = 0,5(1), 1(2)$  и  $2(3)$  ( $a-y = W/2H, b-z = 0,25$ )



Фиг. 3. Профили температуры для основного течения при  $W/H = 0,5(1), 1(2), 2(3), 4(4)$  ( $a-y = W/2H, b-z = 0$ )

**3. Устойчивость основного течения.** Основное течение (2.2) устойчиво при малых  $Gr$ . Для определения критического значения параметров надо линеаризовать систему (1.1) около основного течения и искать возмущения в виде гармонических волн, пропорциональных  $e^{i\alpha x + \lambda t}$ , с амплитудными функциями, зависящими от координат  $y$  и  $z$ . Обозначая амплитудные функции для компонент скорости, давления и температуры через  $u, v, w, p, \theta$  получаем задачу на собственные значения в прямоугольнике  $\Omega$

$$\lambda u = -Gr \left( i\alpha U_0 u + \frac{\partial U_0}{\partial y} v + \frac{\partial U_0}{\partial z} w \right) + \Delta u - \alpha^2 u - i\alpha p \quad (3.1)$$

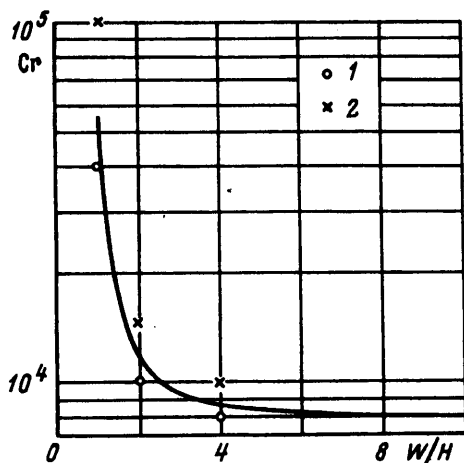
$$\lambda v = -Gr (i\alpha U_0 v) + \Delta v - \alpha^2 v - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\lambda w = -Gr (i\alpha U_0 w) + \Delta w - \alpha^2 w + \theta - \frac{\partial p}{\partial z}$$

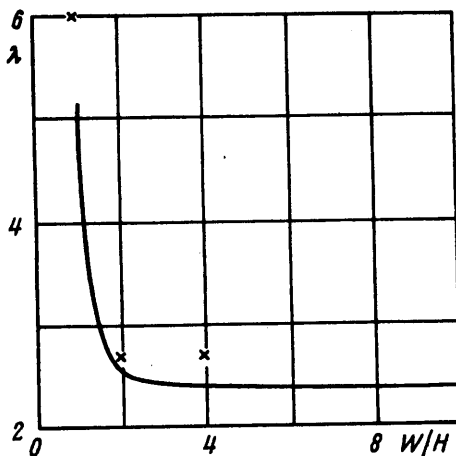
$$\lambda \theta = -Gr \left( i\alpha U_0 \theta + u + Gr Pr \frac{\partial \theta_0}{\partial y} v + Gr Pr \frac{\partial \theta_0}{\partial z} w \right) + \frac{1}{Pr} (\Delta \theta - \alpha^2 \theta)$$

при условии

$$i\alpha u + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимость  $Gr_c$  от  $W/H$  (теория устойчивости – сплошная кривая; конечно-разностные расчеты: 1 – основное течение, 2 – вторичные структуры)

Фиг. 5. Зависимость  $\lambda_c$  от  $W/H$  (теория устойчивости – сплошная кривая; конечно-разностные расчеты: точки – вторичные структуры)

с граничными условиями на границе прямоугольника

$$u = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$$

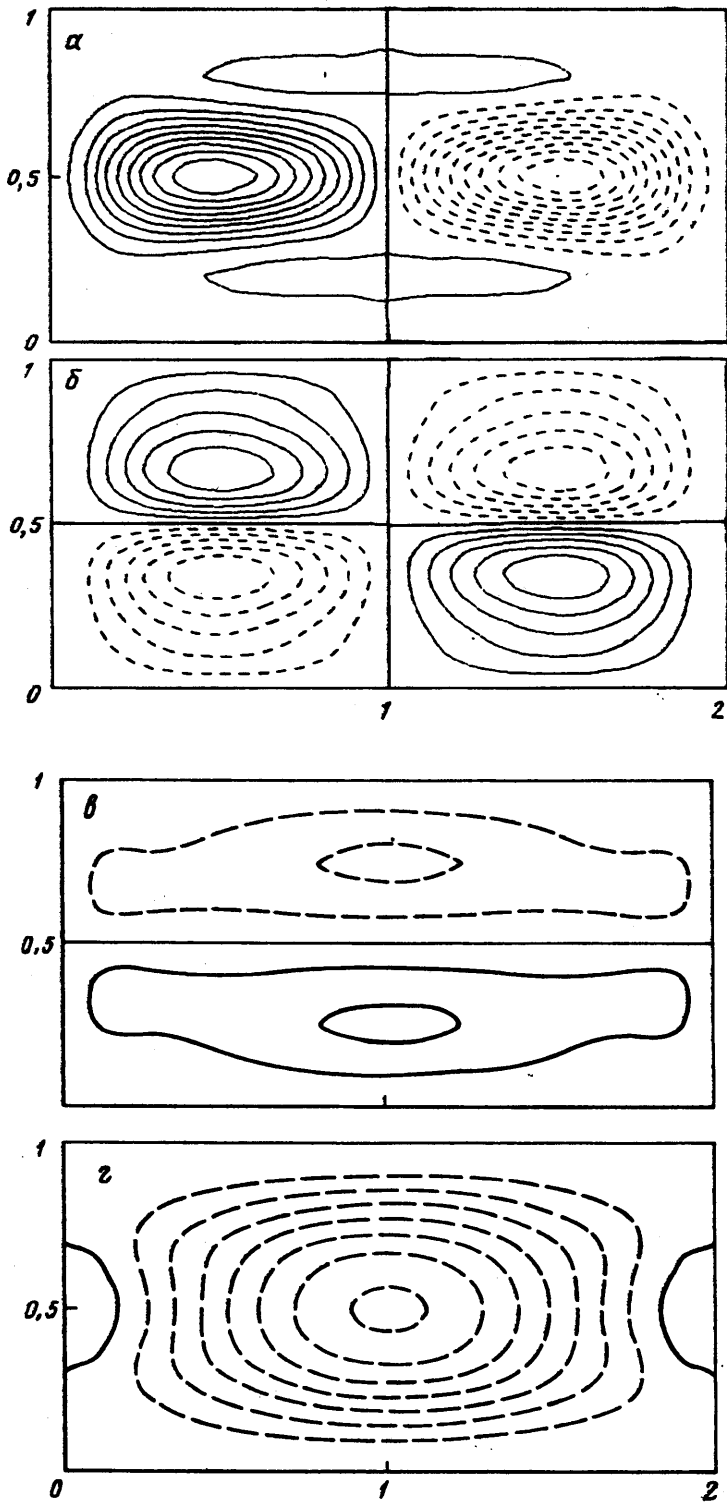
При фиксированном значении волнового числа  $\alpha$  можно определить число  $Gr_0(\alpha)$ , при котором действительная часть собственного числа  $\lambda$  задачи (3.1) равна нулю. Критическое значение числа Грасгофа определяется как

$$Gr_c = \inf_{\alpha} Gr_0(\alpha)$$

В предельном случае  $W/H \rightarrow \infty$  получается задача об устойчивости основного течения (2.3) в бесконечном слое, исследованная в [14–16]. В этом случае при малых  $Pr$  наиболее опасной является плоская стационарная мода, которая представляет собой стационарные валы с осями, перпендикулярными основному течению.

Критические параметры для этой моды вычислены в данной работе при  $Pr = 0$ . На фиг. 4, 5 сплошными кривыми показаны зависимости  $Gr_c$  и  $\lambda_c$  от относительной ширины  $W/H$  при  $Pr = 0$ . На фиг. 6 изображены действительные и мнимые части критических собственных функций скорости  $v(y, z)$  и  $w(y, z)$ . При условии, что потеря устойчивости «мягкая», эти действительные и мнимые части соответствуют сечениям полей вторичного течения поперчными плоскостями, отстоящими друг от друга на четверть длины волны. Нормировка собственных функций выбрана таким образом, что их действительная часть соответствует такому сечению, в котором поперечная скорость  $v(y, z)$  максимальна.

**4. Численное решение трехмерных уравнений конвекции.** Для численного решения трехмерных уравнений Навье – Стокса (1.1) в слое конечной длины  $L/H$  используется метод конечных разностей. Основные особенности конечно-разностной схемы, применявшейся ранее в работах [6, 8], состоят в использовании равномерной разнесенной сетки Харлоу и Уэлша, аппроксимации по времени, аналогичной проекционному методу Чорина и Темама (подробнее см., например, в [17]). Давление в этой схеме вы-

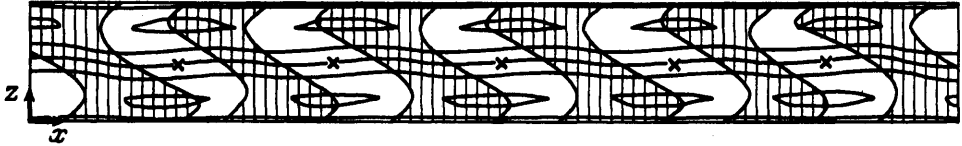


Фиг. 6. Действительные (а, в) и мнимые (б, з) части критических собственных функций скорости  $v(y, z)$  (а, б) и  $w(y, z)$  (в, з)

числяется из уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана. Конвективные члены в уравнениях (1.1) записывались в дивергентной форме и аппроксимировались центральными разностями, а уравнение Пуассона для давления решалось итерационным методом сопряженных градиентов.

Во всех расчетах полагалось  $Pr = 0$ . Безразмерные длины имели значения 10 и 20, а ширины 1, 2 и 4. В основных расчетах  $Gr < 10^5$ . Это ограничение вызвано появлением пилообразных решений при  $Gr = 2 \cdot 10^5$ .

Использовались разностные сетки с шагами от  $1/5$  (в направлении основного течения) до  $1/16$  (по  $z$ ); например, в варианте с  $W/H = 2$  и  $L/H = 20$  использовалась сетка  $160 \times 16 \times 16$ .



Фиг. 7. Изолинии  $x$ -компоненты скорости в сечении  $y = 0,25$  в центральной части слоя длиной 14 (размер по вертикали увеличен вдвое, шаг между изолиниями,  $\Delta = 3,8 \cdot 10^{-3}$ ,  $x$  – центры вторичных ячеек)

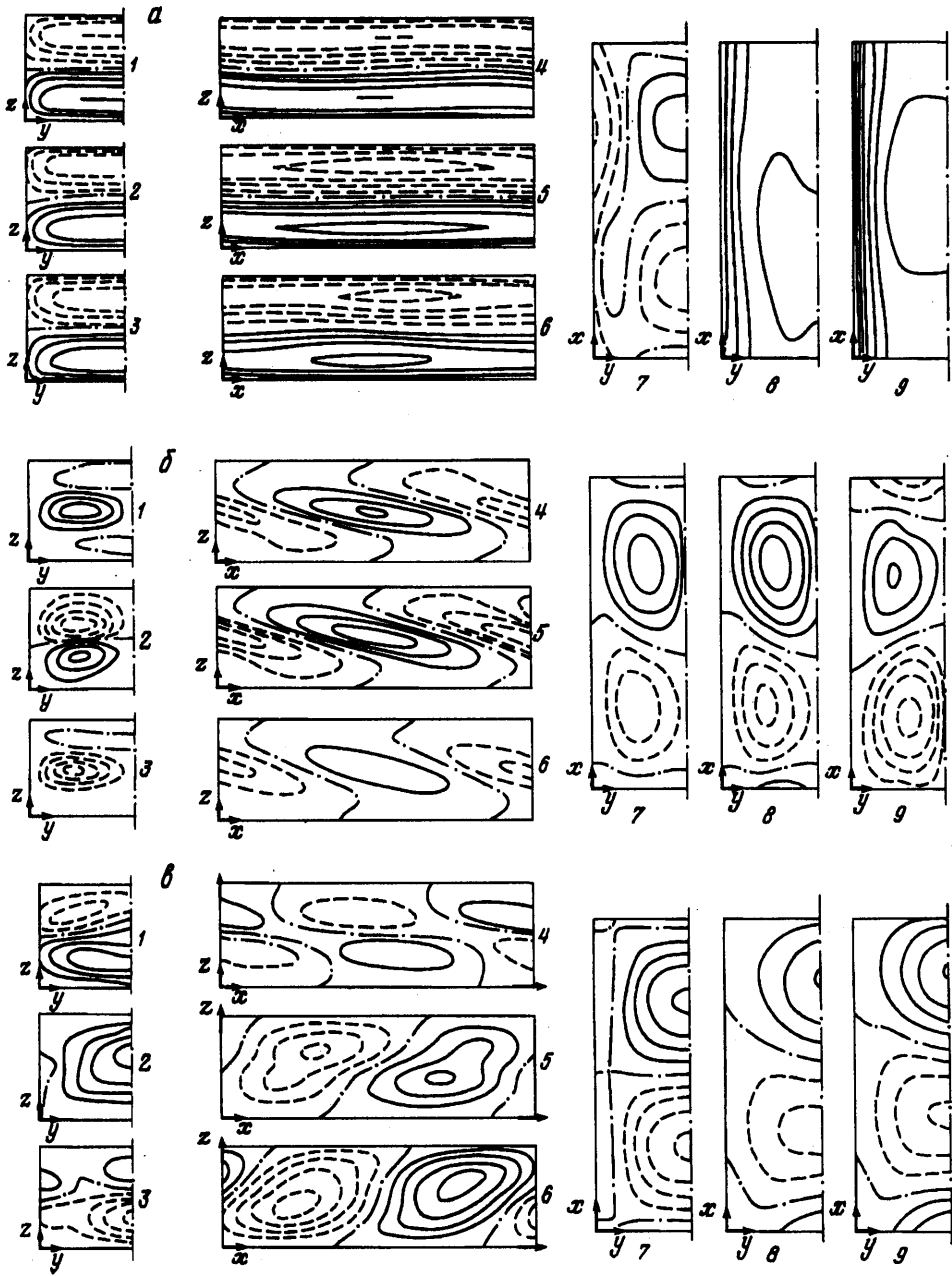
Искомые стационарные решения были получены методом установления. Расчеты проводились из начального состояния (соответствовавшего при данной геометрии решению уравнений (1.1) без конвективных членов ( $Gr = 0$ )) до нескольких единиц безразмерного времени, для чего требовалось порядка 10 000 шагов по времени.

Все расчеты проводились на ЭВМ IBM PC AT 386, 33 MHz. Время расчета одного варианта составляло несколько суток. Точность и правильность схемы и программы были проверены в предшествующих расчетах [6, 8]. В этой работе выполнены дополнительные тесты на задачах о течении в камере с движущейся крышкой и тепловой конвекции в кубической полости при подогреве сбоку. Полученные значения характерных скоростей и числа Нуссельта в пределах нескольких процентов совпадают с данными других авторов (см., например, [18]).

##### 5. Анализ пространственной структуры течения и обсуждение результатов.

Расчеты в ограниченном по длине слое проведены для значений  $W/H = 12,4$  и  $L/H = 10$  и 20. Цель этих расчетов – сравнение с результатами теории устойчивости и исследование структуры течения вблизи кривой смены режима течения (фиг. 4). Основные стационарные решения для каждой геометрии были получены методом установления при  $Gr = 0$  в уравнениях движения и при  $Gr Pr = 1$  в уравнении для температуры. Эти решения согласуются в центральной по  $x$  части слоя с решениями, полученными методом [14] для бесконечного слоя (фиг. 1–3). Разностные решения при  $Gr = 0$  являлись начальными приближениями для расчетов при околокритических числах  $Gr$ . Фигура 4 показывает хорошее согласие результатов теории устойчивости и разностных расчетов при определении области вторичных структур. Хуже соответствие этих методов при определении критической длины волны (фиг. 5), так как конечная длина слоя определяет количество вторичных ячеек. Например, в слое  $L/H = 10$  при малой величине надкритичности независимо от  $W/H$  образуется три ячейки, включая ячейки у торцов слоя. Поэтому для сопоставления результатов по критической длине волны с теорией устойчивости были проведены расчеты при  $L/H = 20$ .

Для анализа структуры течения рассмотрим более подробно вариант  $L/H = 20$ ,  $W/H = 2$  и  $Gr = 15\,000$ . При данной небольшой надкритичности на границе встречных потоков образуется периодическая структура из слабых вторичных ячеек с длиной волны 2,7. На фиг. 7 показаны изолинии  $x$ -компоненты скорости, на которых видны экстремумы скорости над и под ячейками и переход плоскости раздела двух встречных потоков основного течения в волнистую поверхность с той же длиной волны. На этой



Фиг. 8. Изолинии компонент скорости (*a* – *U*, *б* – *V*, *в* – *W*) в центральной ячейке слоя (вертикальные сечения  $x = 10$  (1), 10,7 (2), 11,35 (3); вертикальные сечения  $y = 0,125$  (4), 0,5(5), 0,875(6); горизонтальные сечения  $z = 0,125$ (7), 0,25(8), 0,5(9); максимальные значения для *U, V, W* равны  $8 \cdot 10^{-3}$ ,  $7 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$  соответственно; положительные значения изолиний – сплошные линии, отрицательные – штриховые, нулевые – штрихпунктирные)



же фигуре приведены нулевые изолинии  $u$ -компоненты скорости  $V$ . Области между этими линиями, где жидкость течет от плоскости симметрии к стенке, заштрихованы.

На фиг. 8 показана структура течения в центральной ячейке слоя в виде изолиний трех компонент скорости в характерных сечениях слоя. Изолинии построены через равные интервалы от нулевой линии. Сравнение результатов расчетов (фиг. 8, б, 1, 2 и в, 1, 2) с результатами, полученными по линейной теории устойчивости (фиг. 6, а-2), показывает хорошее качественное согласие.

Анализируя фиг. 8, можно отметить слабое изменение основного течения по длине слоя, за исключением области встречных потоков (фиг. 8, а, 7). Интересно также отметить разбиение слоя на зоны характерной формы с противоположным направлением  $u$ -компоненты скорости  $V$  (фиг. 7 и фиг. 8, б, 4-6), причем максимумы компоненты скорости  $V$  совпадают с центрами ячеек, где  $U = W = 0$ . Частица, находящаяся в области экстремума скорости основного течения или ближе к стенкам, движется по спирали малого диаметра, так как  $U_{\max} \gg V_{\max}$  в этой области. Частица, находящаяся вблизи границы встречных потоков, совершает значительные колебания в  $u$ -направлении от плоскости симметрии до стенки и обратно по мере прохождения через упомянутые выше зоны.

Таким образом, в выполненных здесь и согласующихся между собой расчетах методами теории устойчивости и прямого численного решения нелинейных уравнений конвекции для предельного случая  $Pr = 0$  в вытянутых горизонтальных слоях получена граница критических значений  $Gr_c(W/H)$ , выше которой существуют сложные пространственные стационарные структуры течения. Эти структуры могут быть потенциальной причиной макронеоднородностей распределения примесей. Вместе с тем в экспериментах при малых, но не равных нулю числах  $Pr$  (см., например, [19]), а также в упоминавшихся расчетах пространственных течений [9, 10] при  $L/H = 4$  в области, находящейся выше упомянутой границы и, по-видимому, существенно зависящей от числа  $Pr$ , наблюдаются колебания, природа которых пока еще недостаточно выяснена.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01551) и грантом Международного научного фонда № JE9100.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полежаев В.И. Гидродинамика, тепло- и массообмен при росте кристаллов // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ 1984. Т. 18. С. 198-269.
2. Müller G. Convection and inhomogeneities in crystal growth from the melt // Crystals: Growth, Properties, and Applications. Berlin: Springer, 1988. V. 12. P. 1-133.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
4. Numerical simulation of oscillatory convection in low -  $Pr$  fluids / Ed. B. Roux. Braunschweig: Vieweg, 1990. 365 p.
5. Favier J.J. Recent advances in Bridgman growth modelling and fluid flow // J. Crystal Growth. 1990. V. 99. № 1-4. P. 18-29.
6. Полежаев В.И., Белло М.С., Везеуб Н.А. и др. Конвективные процессы в невесомости. М.: Наука, 1991. 240 с.
7. Полежаев В.И. Режимы микроускорений, гравитационная чувствительность и методы анализа технологических экспериментов в условиях невесомости // Изв. РАН. МЖТ. 1994. № 5. С. 22-36.
8. Griaznov V.L., Lebedev A.P., Nikitin S.A. et al. Thermal convection structure and temperature oscillations in semiconductor melts on earth and in microgravity. Theory and experiments // Proc. 7th Europ. Symp. on Materials and Fluid Sci. in Microgravity. Oxford, U.K.: Europ. Space Agency, 1989. P. 231-236.
9. Afrid M., Zebib A. Oscillatory three-dimensional convection in rectangular cavities and enclosures // Phys. Fluids. Ser. A. 1990. V. 2. № 8. P. 1318-1327.

10. Babu V., Korpela S.A. Numerical solution of the incompressible, three-dimensional Navier – Stokes equations // *Comput. and Fluids*. 1994. V. 23. № 5. P. 675–691.
11. Бирух Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *ПМТФ*. 1966. № 3. С. 69–72.
12. Hurle D.T.J., Jakeman K., Johnson C.P. Convective temperature oscillation in molten gallium // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64. Pt 3. P. 565–576.
13. Земсков В.С., Титков А.А., Шульпина И.А. и др. Особенности распределения кремния и сурьмы в кристаллах твердых растворов германий – кремний – сурьма, полученных в экспериментах «Универсальная печь» по программе «Союз – Апполон» // *Физика и химия обраб. материалов*. 1977. № 5. С. 135–139.
14. Павловский Д.С. Вторичные течения в слое со свободной поверхностью // *Изв. РАН. МЖГ*. 1994. № 5. С. 85–98.
15. Laure P. Etude des mouvements de convection dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient de température horizontal // *J. Mec. Theor. Appl.* 1987. V. 6. № 3. P. 351–382.
16. Kuo H.P., Korpela S.A. Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side // *Phys. Fluids*. 1988. V. 31. № 1. P. 33–42.
17. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 352 с.
18. Fusegi T., Hyun J.M., Kuwahara K., Farouk B. A numerical study of three-dimensional natural convection in a differently heated cubical enclosure // *Intern. J. Heat and Mass Transfer*. 1991. V. 34. № 6. P. 1543–1557.
19. Лебедев А.П., Козырев Ф.В. Колебания температуры и структура конвективного течения в жидком металле: Препринт № 486. М.: Ин-т проблем механики, 1991. 19 с.

Москва

Поступила в редакцию  
27.XII.1994