

УДК 532.546:536.24.42

© 1996 г. А.Г. ЕГОРОВ, Г.И. МУХАМАДУЛЛИНА

# О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗМЕРЕ ЛЕДОПОРОДНЫХ ТЕЛ, ОБРАЗОВАННЫХ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЖИДКОСТЬЮ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКИ ХЛАДОИСТОЧНИКОВ

Проводится асимптотический анализ предельной ситуации обтекания жидкостью линейной цепочки хладоисточников, когда при неизменном поперечном разрезе ледопородное тело неограниченно растет вдоль по потоку. Определяется зависимость критического теплового расхода хладоисточников и поперечного размера тела от критерия Пекле.

В работе [1] решена задача об определении предельно равновесной формы ледопородных тел, образованных линейной цепочкой хладоисточников. Численный анализ показал, что при фиксированном значении числа Пекле равновесное решение существует лишь для таких тепловых расходов  $Q$  хладоисточника, которые не превышают некоторой предельной величины  $Q^{cr}(Pe)$ . Нахождение предельного решения с помощью численного алгоритма [1] невозможно, однако расчеты позволяют предположить, что с  $Q \rightarrow Q^{cr}$  ледопородное тело при неизменном поперечном размере  $s$  неограниченно растет вдоль по потоку. Предполагая это выполненным, проведем в данной работе элементарный анализ предельной ситуации с целью нахождения зависимостей  $Q^{cr}(Pe)$ ,  $s(Pe)$ .

В естественных безразмерных координатах рассматриваемая тепловая задача имеет вид [1]

$$-\Delta\theta^+ = -Q\delta(x)\delta(y), \quad (x, y) \in D^+ \quad (1)$$

$$Pe \nabla(v\theta^-) = \Delta\theta^-, \quad (x, y) \in D^- \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta^+}{\partial n} = \frac{\partial\theta^-}{\partial n}, \quad \theta^+ = \theta^- = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (3)$$

Здесь (см. фигуру)  $D^-$  – область фильтрации,  $D^+$  – область, занятая образовавшимся твердым телом,  $\Gamma = \partial D^+ = \partial D^-$  – его граница,  $n$  – нормаль к  $\Gamma$ , внешняя по отношению к области  $D^+$ . Правая часть (1) описывает точечный хладоисточник мощности  $Q$ , размещенный в начале координат ( $\delta$  – функция Дирака). Здесь и далее верхний индекс  $cr$  у  $Q$  опускается. Скорость фильтрации  $v$  несжимаемой ( $\nabla v = 0$ ) и подчиняющейся закону Дарси ( $v = \nabla\phi$ ) жидкости такова, что  $v \cdot n = 0$  на  $\Gamma$ . При  $x \rightarrow -\infty$   $v_x = 1$ ,  $v_y = 0$ ,  $\theta^- = 1$ . Прямые  $y = 0$ ,  $y = 1$  являются осями симметрии, поток тепла и жидкости через них отсутствует.

Подчеркнем, что речь идет о предельной ситуации, в которой величины  $Q$  и  $Pe$  связаны между собой. Эта связь

$$Q = 2Pe \quad (4)$$

отражает баланс между избытком тепла, приносимым конвективным потоком из  $-\infty$ , и количеством тепла, поглощаемым хладоисточником. Для того чтобы убедиться в

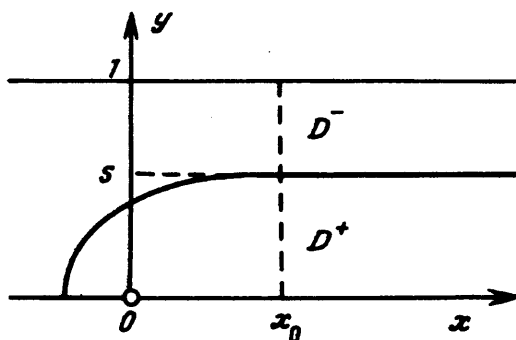


Схема обтекания жидкостью цепочки хладоисточников

справедливости (4), проинтегрируем (2) по  $D^-$ . При этом правая часть (2) даст

$$\int_{D^-} \Delta \theta^- d\sigma = \int_{\Gamma} -\frac{\partial \theta^-}{\partial n} ds = \int_{\Gamma} -\frac{\partial \theta^+}{\partial n} ds = \int_{D^+} \Delta \theta^+ d\sigma = -\frac{Q}{2}$$

Для левой части (2) имеем

$$\text{Pe} \int_{D^-} \nabla (v\theta^-) d\sigma = \text{Pe} \left( -v_x \theta^-|_{x=-\infty} + (1-s)v_x \theta^-|_{x=\infty} \right) = -\text{Pe}$$

откуда и следует (4).

Зависимость  $s$  (Pe) найдем из асимптотического, при  $x \rightarrow +\infty$ , анализа исходной задачи. Асимптотически задачи нахождения  $\theta^-$ ,  $\theta^+$  при фиксированном  $s$  можно рассматривать независимо друг от друга. Каждая из этих функций должна удовлетворять в своей полосе  $x > x_0$ ,  $0 < y < s$  и  $x > x_0$ ,  $s < y < 1$  соответствующему уравнению  $\Delta \theta^+ = 0$  и  $(1-s)\Delta \theta^- = \text{Pe} \partial \theta^- / \partial x$ , условиям отсутствия потока при  $y = 0$  и  $y = 1$  и обращаться в нуль при  $y = s$ . Величина  $x_0$  здесь полагается достаточно большой, с тем чтобы  $\Gamma$  при  $x > x_0$  можно было аппроксимировать прямой  $y = s$ . Собственно значение  $x_0$ , равно как и граничные условия при  $x = x_0$ , не играют роли в последующем анализе и не конкретизируются.

Решения указанных задач выписываются непосредственно [2]

$$\theta^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^+ \exp(-\beta_k^+ x) \cos \alpha_k^+ y, \quad \theta^- = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^- \exp(-\beta_k^- x) \cos \alpha_k^- (1-y) \quad (5)$$

$$\alpha_k^+ = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{s}, \quad \alpha_k^- = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{1-s}$$

Здесь  $\beta_k^{\pm}$  — положительные корни уравнений

$$(\beta_k^+)^2 = (\alpha_k^+)^2, \quad (\beta_k^-)^2 + \frac{\text{Pe}}{(1-s)} \beta_k^- = (\alpha_k^-)^2 \quad (6)$$

а  $\gamma_k^{\pm}$  определяются граничными условиями на  $x_0$ . При анализе асимптотического поведения  $\theta^-$ ,  $\theta^+$  достаточно сохранить лишь главные (нулевые) члены рядов (5). Опуская нижний индекс  $k = 0$ , имеем

$$\theta^+ \sim \gamma^+ \exp(-\beta^+ x) \cos \alpha^+ y, \quad \theta^- \sim \gamma^- \exp(-\beta^- x) \cos \alpha^- (1-y)$$

Величина  $s$  находится из условия совпадения  $\partial \theta^{\pm} / \partial y$  при  $y = s$

$$\gamma^+ \alpha^+ \exp(-\beta^+ x) + \gamma^- \alpha^- \exp(-\beta^- x) = 0 \quad (7)$$

Из двух следующих из (7) равенств:  $\gamma^+ \alpha^+ = -\gamma^- \alpha^-$  и  $\beta^+ = \beta^-$ , в данном случае важно лишь второе. Оно определяет квадратное уравнение

$$(1-s)^2 + 2s(1-s) \left( \frac{Pe}{\pi} \right) = s^2$$

относительно  $s$ . Решая его, находим искомую зависимость

$$s(Pe) = \frac{1}{\sqrt{1 + (Pe/\pi)^2} + 1 - Pe/\pi} \quad (8)$$

Очевидно, что  $s(Pe)$  монотонно растет с ростом  $Pe$  от  $1/2$  при  $Pe = 0$  до  $1$  при  $Pe = \infty$ .

Полученные формулы (4), (8) согласуются с проведенными численными расчетами [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00448).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kornev K., Mukhamadullina G. Mathematical theory of freezing for flow in porous media // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 447. № 1930. P. 281–297.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

Казань

Поступила в редакцию  
2.III.1995