МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1996

УДК 532.59–3

© 1996 г. А.А. АБРАШКИН

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ГУЙОНА

Рассмотрены трехмерные стационарные периодические волны на глубокой воде, обладающие слабой, порядка амплитуды волны, завихренностью. Решение, описывающее свойства волн, строится методом теории возмущений в модифицированных лагранжевых координатах. Структура волн и их дисперсионные свойства исследованы с точностью до квадрата их амплитуды.

Волнами Гуйона называют периодические стационарные волны, распространяющиеся на поверхности слабозавихренной жидкости [1]. Завихренность для них является малой, но конечной величиной и представляется в виде ряда по малому параметру крутизны волны ε. В плоском стационарном течении завихренность вдоль линий тока сохраняется, поэтому для описания двумерных волн Гуйона (в системе отсчета, где профиль волны покоится) достаточно решить уравнение

$$\Delta\psi = -\Omega(\psi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Omega_n(\psi) \tag{0.1}$$

Здесь ψ – функция тока, а Ω_n – завихренность соответствующего приближения. Для решения (0.1) следует перейти к координатам x, ψ; x – горизонтальная координата [1].

В случае трехмерного течения уравнение (0.1), очевидно, уже несправедливо, поэтому для изучения класса пространственных волн Гуйона следует использовать иные подходы. В настоящей работе эта задача решается с помощью модифицированных лагранжевых координат [2].

1. Рассмотрим трехмерные стационарные волны в бесконечно глубокой жидкости. Уравнения динамики идеальной несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа запишем в виде [3]

$$\frac{D(X,Y,Z)}{D(a,b,c)} = \frac{D(X_0,Y_0,Z_0)}{D(a,b,c)} = S_0(a,b,c) \tag{1.1}$$

$$X_{tt}X_a + Y_{tt}Y_a + Z_{tt}Z_a = -\frac{1}{\rho}p_a - gY_a \tag{1.2}$$

$$X_{tt}X_b + Y_{tt}Y_b + Z_{tt}Z_b = -\frac{1}{\rho}p_b - gY_b \tag{1.3}$$

$$X_{tt}X_c + Y_{tt}Y_c + Z_{tt}Z_c = -\frac{1}{\rho}p_c - gY_c \tag{1.4}$$

Здесь $X(a, b, c, t)$, $Y(a, b, c, t)$, $Z(a, b, c, t)$ – координаты жидкой частицы с лагранжевыми координатами a, b, c; t – время, ρ – плотность, p – давление, g – ускорение свободного падения. Функция S_0 определяется исходным профилем волны (и соответственно начальным положением жидких частиц X_0, Y_0, Z_0). Обычно при лагранжевом описании полагают, что $X_0 = a, Y_0 = b, Z_0 = c$; в таком случае $S_0 = 1$. При изучении течений со свободной границей так поступать, однако, не всегда целесообразно. Дело в том, что в пространстве лагранжевых переменных удобно считать, что свободной поверхности жидкости отвечает значение вертикальной координаты b, равной нулю. А поскольку профиль волны не совпадает с этой плоскостью, то начальные положения частиц являются определенными функциями "меток" a, b, c и S_0 не обязательно равна 1.

Из каждой пары уравнений движения (1.2)–(1.4) перекрестным дифференцированием исключим давление и проинтегрируем по времени:

$$\frac{D(X_t, X)}{D(a,b)} + \frac{D(Y_t, Y)}{D(a,b)} + \frac{D(Z_t, Z)}{D(a,b)} = S_1(a,b,c) \tag{1.5}$$

$$\frac{D(X_t, X)}{D(b,c)} + \frac{D(Y_t, Y)}{D(b,c)} + \frac{D(Z_t, Z)}{D(b,c)} = S_2(a,b,c) \tag{1.6}$$

$$\frac{D(X_t, X)}{D(a,c)} + \frac{D(Y_t, Y)}{D(a,c)} + \frac{D(Z_t, Z)}{D(a,c)} = S_3(a,b,c) \tag{1.7}$$

В двумерном случае $S_2 = S_3 = 0$, а $S_1 = \Omega S_0$, $\Omega(a, b)$ – завихренность. Для трехмерных течений непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$S_1 = S_0(\mathbf{\Omega}\nabla c), \quad S_2 = S_0(\mathbf{\Omega}\nabla a), \quad S_3 = S_0(\mathbf{\Omega}\nabla b)$$

где $\mathbf{\Omega}$ – вектор завихренности. Инварианты S_1, S_2, S_3 записываются аналогично выражению для потенциального вихря [4]. При выводе этих соотношений использовались представления для составляющих вектора завихренности $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, как функции лагранжевых координат:

$$\Omega_x = \frac{1}{S_0}\left[\frac{D(Z_t, Z, X)}{D(a,b,c)} + \frac{D(Y_t, Y, X)}{D(a,b,c)}\right]$$

$$\Omega_y = \frac{1}{S_0}\left[\frac{D(Z_t, Z, Y)}{D(a,b,c)} + \frac{D(X_t, X, Y)}{D(a,b,c)}\right]$$

$$\Omega_z = \frac{1}{S_0}\left[\frac{D(Y_t, Y, Z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(X_t, X, Z)}{D(a,b,c)}\right]$$

Рассмотрим волну с неизменным профилем, распространяющуюся вдоль оси x. Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью волны V; в ней движение жидкости будет стационарным, а профиль соответственно неподвижным. Величина V будет равна горизонтальной скорости X_t при $b \to -\infty$. В лагранжевых координатах стационарное течение удобно представлять зависящим от переменных $q = a + \sigma(b)t$, b, c, где $\sigma(b)$ – некоторая функция, описывающая неоднородный по глубине дрейф жидких частиц [2]. Эти переменные были названы модифицированными лагранжевыми координатами.

В новых переменных система уравнений (1.1)–(1.4) запишется в виде

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(q,b,c)} = \frac{D(X_0, Y_0, Z_0)}{D(q,b,c)} = S_0(b,c) \tag{1.8}$$

$$\sigma^2(X_{qq}X_q + Y_{qq}Y_q + Z_{qq}Z_q) = -\frac{1}{\rho}p_q - gY_q \tag{1.9}$$

$$\sigma^2(X_{qq}X_b + Y_{qq}Y_b + Z_{qq}Z_b) = -\frac{1}{\rho}p_b - gY_b \tag{1.10}$$

$$\sigma^2(X_{qq}X_c + Y_{qq}Y_c + Z_{qq}Z_c) = -\frac{1}{\rho}p_c - gY_c \tag{1.11}$$

Интегрируя (1.8), получим интеграл Бернулли

$$\frac{\sigma^2}{2}(X_q^2 + Y_q^2 + Z_q^2) + gY + \frac{p}{\rho} = H(b, c)$$

Уравнения (1.9)–(1.11) имеют еще два интеграла движения (см. также (1.5), (1.7))

$$\sigma\left[\frac{D(X_q, X)}{D(q, b)} + \frac{D(Y_q, Y)}{D(q, b)} + \frac{D(Z_q, Z)}{D(q, b)}\right] - \sigma'(X_q^2 + Y_q^2 + Z_q^2) = S_1(b, c)$$

$$\sigma\left[\frac{D(X_q, X)}{D(q, c)} + \frac{D(Y_q, Y)}{D(q, c)} + \frac{D(Z_q, Z)}{D(q, c)}\right] = S_3(b, c)$$

Решение системы (1.8)–(1.11) должно удовлетворять граничным условиям

$$p = p_0(b = 0); \quad Y_t = Z_t = 0 \quad (b = -\infty) \tag{1.12}$$

2. Предположим, что рассматриваемые волны обладают малой, но конечной амплитудой. Запишем координаты траекторий частиц в виде

$$X = q + \xi, \quad Y = b + \eta, \quad Z = c + \zeta$$

и представим все неизвестные функции рядами по малому параметру крутизны волны:

$$\{\xi, \eta, \zeta, H, \Omega_j\} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \{\xi_n, \eta_n, \zeta_n, H_n, \Omega_{jn}\}; \; j = x, y, z$$

$$\{V, \sigma, S, p\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \{V_n, \sigma_n, S_{ni}, p_n\}; \; i = 0, 1, 3$$

Поскольку в нулевом приближении сдвиговый поток отсутствует, то $\sigma_0 = \text{const}$. Все остальные σ_n, однако, являются функциями вертикальной лагранжевой координаты.

В первом приближении задача (1.8)–(1.11) принимает вид

$$\xi_{1q} + \eta_{1b} + \zeta_{1c} = S_{01}, \quad \frac{\partial}{\partial q}(\sigma_0^2 \xi_{1q} + \frac{1}{q}p_1 + g\eta_1) = 0$$

$$\sigma_0^2 \eta_{1qq} = -\frac{1}{\rho}p_{1b} - g\eta_{1b}, \quad \sigma_0^2 \zeta_{1qq} = -\frac{1}{q}p_{1c} - g\eta_{1c}$$

Ее решением будет

$$\xi_1 = \alpha e^{kb} \cos nc \sin mq, \quad \eta_1 = -\frac{k}{m}\alpha e^{kb} \cos nc \cos mq$$

$$\zeta_1 = \frac{n}{m}\alpha e^{kb} \sin nc \cos mq, \quad p_1 = \rho P e^{kb} \cos nc \cos mq, \quad S_{01} = 0$$

Здесь $k^2 = n^2 + m^2$; α, P – размерностные постоянные. Поскольку $\xi_{1t} = 0$ при $b = -\infty$, то скорость линейной волны V_0 совпадает с величиной $\sigma_0 = \sqrt{gk/m}$, определяемой из граничного условия для давления. Таким образом, скорость линейной волны такая же, как у трехмерных потенциальных волн [1]. Совпадает также и форма свободной поверхности линейных потенциальных и изучаемых вихревых волн. Поля скоростей для них, однако, принципиально различны. В вихревой волне жидкие частицы участвуют в "дополнительном" дрейфовом движении со скоростью $\sigma_1(b)$.

Из трех комопонент завихренности – две (Ω_{x1} и Ω_{y1}) равны нулю, а третья $\Omega_{z1} = -\sigma'_1$. Функция Бернулли в данном приближении зависит только от вертикальной координаты ($H_1 = \sigma_1\sigma_0$), $S_{11} = \Omega_{z1}$, а $S_{31} = 0$. Для выбора определенной волны из семейства возможных движений жидкости необходимо задать распределение функции Бернулли с глубиной. Подобно H_1 функция σ_1 определена с точностью до некоторой постоянной. Значение последней будет вычислено в следующем приближении при определении $V_1 = \sigma_1(-\infty)$.

3. Во втором приближении уравнения (1.8)–(1.11) имеют вид

$$\xi_{2q} + \eta_{2b} + \zeta_{2c} = \alpha^2 e^{2kb}\left(\frac{k^4}{2m^2} + \frac{m^2}{2}\cos 2nc + \frac{n^4}{2m^2}\cos 2mq\right) \tag{3.1}$$

$$\sigma_0^2\xi_{2q} + \frac{p_2}{\rho} + g\eta_2 = -2m\sigma_0\sigma_1\alpha e^{kb}\cos nc\cos mq -$$

$$-\frac{\sigma_0^2}{4}\alpha^2 e^{2kb}(k^2 + m^2\cos 2nc - n^2\cos 2mq) + \Phi(b, c)$$

$$\sigma_0^2\eta_{2qq} + \frac{1}{\rho}p_{2b} + g\eta_{2b} = -2km\sigma_0\sigma_1\alpha e^{kb}\cos nc\cos mq +$$

$$+\frac{k}{2}\sigma_0^2\alpha^2 e^{2kb}(k^2 + m^2\cos 2nc + n^2\cos 2mq)$$

$$\sigma_0^2\zeta_{2qq} + \frac{1}{\rho}p_{2c} + g\eta_{2c} = 2nm\alpha\sigma_0\sigma_1 e^{kb}\sin nc\cos mq - \frac{m^2 n}{2}\alpha^2 e^{2kb}\sin 2nc$$

Здесь $\Phi(b, c)$ – функция, подлежащая определению. Решение уравнений (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.12), запишется так

$$\xi_2 = -\frac{2\alpha}{\sigma_0}I(b)\cos nc\sin mq - \frac{\alpha^2}{2m}\left[\frac{kn^2}{m-2k}e^{2mb} + \frac{n^2}{4}e^{2kb}\right]\sin 2mq$$

$$\eta_2 = -\frac{2k\alpha}{m\sigma_0}[\sigma_1 e^{2kb} + I(b)]\cos nc\cos mq + \frac{kn^2\alpha^2}{2m}\left[\frac{e^{2mb}}{m-2k} + \frac{e^{2kb}}{2m}\right]\cos 2mq +$$

$$+\frac{k}{4m^2}\alpha^2 e^{2kb}(k^2 + m^2\cos 2nc)$$

$$\zeta_2 = -\frac{2n\alpha}{\sigma_0 m}I(b)\sin nc\cos mq; \quad I(b) = \int_{-\infty}^{b}(\sigma_1' + k\sigma_1)e^{2kb}db$$

$$\Phi = \frac{\sigma_0^2}{2}\alpha^2 e^{2kb}(k^2 + m^2\cos 2nc)$$

$$V_1 = \sigma_0^{-1}H_1(-\infty) = \sigma_0^{-1}\int_{-\infty}^{0}(kH_1 e^{2kb} - H_1')db$$

$$\Omega_{x2} = -n\alpha\sigma_1' e^{kb}\sin nc\sin mq, \quad \Omega_{y2} = -\frac{kn}{m}\sigma_1'\alpha e^{kb}\sin nc\cos mq$$

$$\Omega_{z2} = -\sigma_2' - \sigma_1'\frac{n^2}{m}\alpha e^{kb}\cos nc\cos mq$$

В случае $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ все эти формулы переходят в решение для пространственных потенциальных волн [1]. Завихренность волновых возмущений ($\sigma_1 \neq 0$) приводит к изменению их вертикальной структуры и появлению линейной по амплитуде поправки к скорости волны. В двумерной геометрии (волновое число $n = 0$) полученное решение описывает классические волны Гуйона [1]. С трехмерностью волновых возмущений или появлением поперечных модуляций на профиле двумерной волны ($n \neq 0$) связано существование приповерхностного слоя с толщиной порядка $k^{-1} = (m^2 + n^2)^{-1/2}$, внутри которого завихренность является осциллирующей функцией.

Поперечные модуляции на профиле – одно из свойств обычно наблюдаемых волн на воде, показатель их трехмерности. В изучаемых волнах средний уровень колеблется по поперечной координате c с удвоенной частотой (см. выражение для η_2), вследствие чего эти модуляции несинусоидальны.

Волны Гуйона в отличие от стоксовой волны имеют линейную по амплитуде поправку к скорости распространения. Важно отметить, что в зависимости от вида функции σ_1 она может быть как положительной, так и отрицательной.

Выражение для V_1 не содержит зависимости от координаты c. Другими словами, скорость трехмерной волны Гуйона совпадает со скоростью двумерной волны, соответствующей той же функции σ_1, а влияние трехмерности сводится к изменению структуры волновых возмущений.

Распределение $\sigma_1(b)$ определяет профиль слабого, порядка амплитуды волны, сдвигового потока. Его можно выбрать в значительной степени произвольным – например, с точкой перегиба.

Рассмотрим несколько подробнее траектории движения жидких частиц. Выражения для координат отдельной частицы обладают двумя масштабами затухания – k^{-1} и m^{-1}. В том случае, когда $k^{-1} \ll m^{-1}$, а сдвиговое течение локализовано исключительно вблизи поверхности и уже несущественно на глубинах порядка k^{-1}, движение жидкости в нижележащих слоях описывается соотношениями

$$X = q + \frac{\alpha^2 n^2 \varepsilon^2}{4m} e^{2mb} \sin 2mq, \quad q = a + V_0 t$$

$$Y = b - \frac{\alpha^2 n^2 \varepsilon^2}{4m} e^{2mb} \cos 2mq, \quad Z = 0$$

В системе отсчета, движущейся со скоростью V_0, частицы вращаются по окружности радиуса $\frac{1}{4}\alpha^2 n^2 \varepsilon^2 / m$ в плоскости XY. На глубинах порядка k^{-1} траектории жидких частиц будут уже пространственными, но останутся замкнутыми. В самых же верхних слоях – там, где существенно сдвиговое течение, нарушается и это условие, и частицы участвуют в двух движениях – неоднородном по глубине дрейфовом и трехмерном колебательном. Когда соотношение масштабов k^{-1} и m^{-1} иное, движение частиц носит сложный характер сразу во всем объеме.

Амплитуда волны A равняется

$$A = |\varepsilon\eta_1(0,0,0) + \varepsilon^2\eta_2(0,0,0)| = \frac{\varepsilon k \alpha}{m}\left[1 + \frac{2\varepsilon(\sigma_1(0) + I(0))}{\sigma_0}\right] -$$

$$- \frac{\varepsilon^2 k^2 \alpha^2}{4m}\left[\frac{n^2(3m - 2k)}{m - 2k} + k^2 + m^2\right]$$

Отсюда видно, что величина параметра ε пропорциональна "продольной" крутизне волны mA и потому может быть выбрана сколь угодно малой в зависимости от значения A.

Выражение для σ'_2 определяется по заданной функции Бернулли H_2, найденной σ_1 и известному решению первого приближения. Полный вид σ_2 вычисляется при нахождении квадратичной по амплитуде поправки к скорости волны ($V_2 = \sigma_2(-\infty)$). Рассмотрение третьего и следующих приближений не представляет принципиальных трудностей, но сопряжено с проведением громоздких вычислений. Для этих приближений дрейфовые течения σ_n могут зависеть также и от координаты c, поэтому при общем рассмотрении следует считать, что $\sigma_n = \sigma_n(b, c)$ для $n \geqslant 2$.

Для приложений удобнее задавать не распределение функций Бернулли с глубиной, а сами функции σ_n, которые непосредственно и определяют дрейфовые течения жидкости. Вид этих течений должен быть связан, очевидно, с анализом конкретной физической задачи.

Заключение. Влияние эффекта трехмерности на распространение волны Гуйона сводится к изменению структуры волновых возмущений и вида траекторий жидких частиц. При одинаковом распределении дрейфового течения с глубиной скорости распространения двумерной и трехмерной волн совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. *Абрашкин А.А., Зенькович Д.А.* Вихревые стационарные волны на сдвиговом потоке // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 1. С. 35–46.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
4. Физика океана (Под ред. А.С. Монина). Т. 2. М.: Наука, 1978. 455 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.XI.1994