

УДК 532.59

© 1996 г. И.Б. БАХОЛДИН

## НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАНСЫ И ВОЛНОВЫЕ СКАЧКИ В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

На примере модифицированных уравнений Кортевега – де Вриза и Шредингера, являющихся обобщением обычных модельных уравнений для волн на воде, в плазме и в нелинейной оптике [1], разрабатывается новая методика, позволяющая систематически исследовать двухпериодные (двухволновые) стационарные решения этих уравнений. Среди таких решений выделены решения с обычным взаимодействием между волнами и с резонансным взаимодействием. Найдены особые решения типа солитонов огибающей резонансно взаимодействующих волн, а также уединенные волны. Полученные солитонные решения используются для описания структур волновых скачков.

В работах [2–3] рассматривался резонанс для уравнения Шредингера. В настоящей работе предлагается общая методика исследования стационарных решений уравнений с дисперсией высокого порядка. Применение этой методики позволило выявить аналогичные резонансы для модифицированных уравнений Кортевега – де Вриза и Шредингера

$$u_t + b_1 u_x + uu_x + b_3 u_{xxx} + b_5 u_{xxxx} = 0 \quad (0.1)$$

$$A_t + b_1 A_x + ib_2 A_{xx} + b_3 A_{xxx} + i|A|^2 A = 0 \quad (0.2)$$

Здесь индексы  $x$  и  $t$  обозначают дифференцирование по  $x$  и по  $t$ . Физические приложения уравнения (0.1) даны в [4–5] для волн подо льдом, а (0.2) в [6–8] для волн на поверхности жидкости. В ряде моделей нелинейной оптики в уравнение (0.2) включаются члены  $\epsilon A^* A_x$  или  $\delta A^2 A_x$ . Включение таких членов не вносит существенных изменений в методику исследования.

**1. Стационарные решения.** Стационарные решения уравнения (0.1) описываются уравнением

$$b_1 u + \frac{1}{2} u^2 + b_3 u_{xx} + b_5 u_{xxxx} = c \quad (1.1)$$

которое можно переписать в виде динамической системы четвертого порядка

$$\frac{d}{dx} Y = F(Y), \quad Y^T = (u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) \quad (1.2)$$

Рассмотрим теперь решения уравнения (1.1), линеаризованного относительно однородного состояния  $u_h$ , определяемого уравнением  $b_1 u_h + \frac{1}{2} u_h^2 = c$ . Подставив в линеаризованное уравнение выражение в виде экспоненты, находим соотношение, определяющее длины волн и общее решение

$$b_1 + u_h - b_3 k^2 + b_5 k^4 = 0 \quad (1.3)$$

$$u = u_h + a_1 \exp(ik_1 x) + a_2 \exp(ik_2 x) + a_3 \exp(ik_3 x) + a_4 \exp(ik_4 x)$$

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{b_3}{2b_5} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{b_* - b_1 - u_h}}{b_*} \right)}, \quad b_* = \frac{b_3^2}{4b_5} \quad (1.4)$$

Будем исследовать только ограниченные решения уравнений (0.1) и (0.2). При  $b_1 + u_h > b_*$  ограниченных решений нет, при  $b_* > b_1 + u_h > 0$  уравнение имеет двух-периодные решения, зависящие от четырех параметров, при  $b_1 + u_h < 0$  – однопериодные решения, зависящие от двух параметров.

Аналогичные операции можно проделать и для модифицированного уравнения Шредингера, записанного в гидродинамической форме [9], получаемой после подстановки  $A = ae^{i\psi}$ . При этом  $Y^\tau = (a, a_x, W, W_x)$ , где  $W = \psi_x$ , а соотношение, определяющее длины волн, примет вид

$$b_3^2 k^4 - k^2 \left[ 2b_3(b_1 - 2b_2 W_h - 3b_3 W_h^2) + (b_2 + 3b_3 W_h)^2 \right] + (b_1 - 2b_2 W_h - 3b_3 W_h)^2 + 2a_h^2 (b_2 + 3b_3 W_h) = 0 \quad (1.5)$$

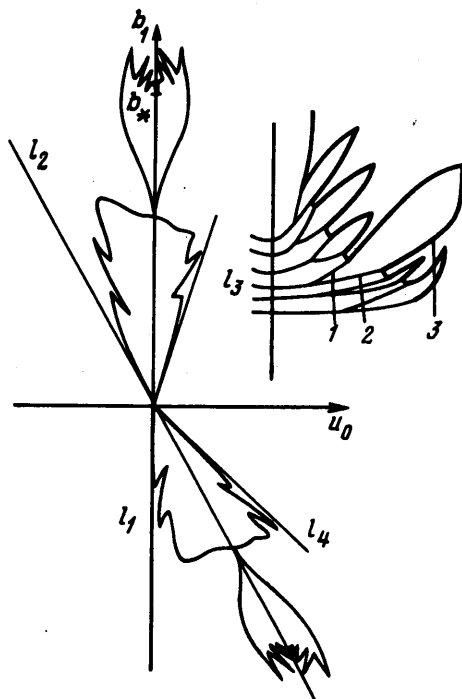
В обоих случаях величина  $k$  определяется биквадратным уравнением, однако коэффициенты уравнения (1.5) сложным образом зависят от коэффициентов уравнения (0.2). Эти уравнения имеют ноль, два или четыре чисто мнимых корня. Соответствующие этим случаям ограниченные стационарные решения уравнений (0.1) и (0.2) можно рассматривать как решения без волн (все параметры постоянны), решения с одной волной (периодические решения) и решения с двумя волнами (двухпериодные решения). Качественные эффекты при рассмотрении нелинейных волн также определяются числом линейных волн. В работах [2–3] счет числа волн делается для волновой, а не для гидродинамической формы уравнения Шредингера, при переходе к принятой в этих работах терминологии число волн будет на единицу больше.

Разработанная ниже методика носит общий характер и может применяться и к другим гидродинамическим уравнениям, у которых стационарные решения описываются динамической системой четвертого порядка, не меняющей своего вида при замене  $x$  на  $-x$ , и уравнение, определяющее длины волн, – биквадратное уравнение с разными знаками при второй и четвертой степени  $k$ . Например, очевидна возможность ее применения для модифицированных уравнений Буссинеска, поскольку гидродинамическая форма уравнения Шредингера является аналогом уравнений Буссинеска [3].

Методика основана на исследовании зависимости типа решений уравнения (1.2) от начальных данных. При этом не имеет принципиального значения численно или аналитически получены эти решения. Поскольку в настоящее время численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо разработаны, можно считать, что такие решения доступны для исследования всегда, поэтому методика не привязана к какому-либо конкретному численному методу или же к какой-либо конкретной физической модели. Для детальной разработки методики было выбрано модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, поскольку его стационарные решения определяются меньшим числом параметров, чем у уравнения Шредингера, и зависимость коэффициентов в уравнении (1.3) от коэффициентов исходного уравнения носит простой характер.

**2. Область двухпериодных решений.** Перейдем к анализу нелинейных решений. Рассмотрим все возможные стационарные решения, зависящие от пяти параметров  $u_i = \partial^i u / \partial^i x(0)$  и  $b_1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , и коэффициента  $b_1$ , при этом положим  $c = 0$ , поскольку изменение этого параметра равноценно изменению параметра  $u_0$  (параметр  $b_1$  имеет смысл скорости системы отсчета).

В силу указанного выше характера линеаризованных решений можно предположить, что нелинейное решение с начальными данными в окрестности оси  $b_1$  будет ограниченным при  $b_* > b_1 > 0$ . Этот факт был подтвержден расчетами. Таким образом, имеется некоторая область параметров, окружающая отрезок прямой  $b_* > b_1 > 0$ ,  $u = 0$ , для которой решения уравнения (1.1) ограничены, назовем такую область резонансным деревом (причины такого названия ясны из геометрического вида



Фиг. 1. Область ограниченных решений (два резонансных дерева). Справа фрагмент резонансного дерева в увеличенном виде

этой области), а отрезок  $b_* > b_1 > 0$ ,  $u = 0$  – его стволом. Ниже будут рассматриваться двумерные проекции резонансного дерева. На фиг. 1 схематично показана проекция на плоскость  $(b_1, u_0)$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$ .

Для исследования резонансных деревьев был разработан специальный комплекс программ. Была создана программа, решающая обыкновенное дифференциальное уравнение методом Адамса второго порядка, которая решает это уравнение до того момента, пока  $|u|$  не превысит некоторое заданное значение  $u_s$ , существенно большее длины его ствола, этот случай обозначается цифрой 0. Конкретный выбор  $u_s$  не имеет принципиального значения: в расчетах встречаются два типа решений: колебательные с максимальным размахом колебаний порядка размеров резонансного дерева и решения, в которых колебаний нет или же колебания имеются только на начальном участке, а затем происходит быстрый (быстрее, чем по экспоненте) рост  $|u|$ .

В случае, когда величина  $u_s$  не достигается, расчет ведется до некоторого значения величины  $x = x_s$ , значительно большего характерных периодов стационарного решения, этот случай обозначается цифрой 1. Выбор величины  $x_s$  влияет на точность определения границы резонансного дерева. В результате расчета формируется двумерный массив из чисел 0 и 1, каждый элемент которого соответствует значению параметров  $u_1 = \Delta u l$ ,  $b_1 = \Delta b l$ . Этот массив выводится на экран. В результате получается грубое изображение резонансного дерева. Для большей детализации необходимо уменьшить шаги  $\Delta u$  и  $\Delta b$ , увеличить  $x_s$ , так, чтобы эта величина при данном разрешении по начальным данным не оказывала существенного влияния на локализацию границы резонансного дерева, и просматривать резонансное дерево фрагментами. Эта программа была дополнена программами, позволяющими строить графики контуров границ области ограниченных решений. Посредством изменения масштабов  $x$  и  $u$  коэффициенты  $b_3$  и  $b_5$  можно сделать единичными. Приведенные в данной работе графики решений соответствуют именно этому случаю. Ниже излагаются результаты анализа проведенных численных исследований.

Поскольку существуют два однородных решения  $u_0 = 0$  или  $u_0 = -2b_1$ , то имеется два резонансных дерева, растущих из точки (0,0) (фиг. 1). Ствол верхнего дерева размещен на прямой  $l_1 : u_0 = 0$ , а ствол нижнего – на прямой  $l_2 : b_1 = -u_0/2$ . Прямые  $l_1, l_4 : b_1 = u_0/3$  и  $l_2, l_3 : b_1 = u_0$  касаются снаружи границ нижнего и верхнего деревьев соответственно. Все качественные свойства у обоих деревьев одинаковы, поэтому далее будет описываться в основном верхнее дерево ( $b_1 > 0$ ).

В случае обычного уравнения Кортевега – де Вриза уравнение (1.1) становится уравнением второго порядка, описывающим колебания с устойчивым и неустойчивым положением равновесия, неустойчивое положение равновесия в рассматриваемой проекции пространства параметров решений соответствует солитону. Для того чтобы найти границы области ограниченных решений, необходимо найти значение  $u$  на подошве и горбе этого солитона. Одно из значений определяется из условия равновесия системы, другое нетрудно получить, воспользовавшись известной формулой, описывающей солитоны уравнения Кортевега – де Вриза. Таким образом, в области  $b_1 > 0$  периодическое решение существует при  $-2b_1 > u_0 > b_1$ , при  $u_0 \rightarrow -2b_1+$  или  $u_0 \rightarrow b_1-$  период возрастает до бесконечности и решение принимает вид солитона, при этом начальная точка на  $l_2$  соответствует подошве, а на  $l_3$  горбу. Область ограниченных решений – угол между прямыми  $l_2$  и  $l_3$ . Аналогично при  $b_1 < 0$  область ограниченных решений – угол между прямыми  $l_1$  и  $l_4$ . Достаточно найти все решения при произвольном положительном и отрицательном значении величины  $b_1$ , поскольку путем изменения масштабов величины  $u$  и координаты  $x$  коэффициент  $b_1$  можно приравнять к единице.

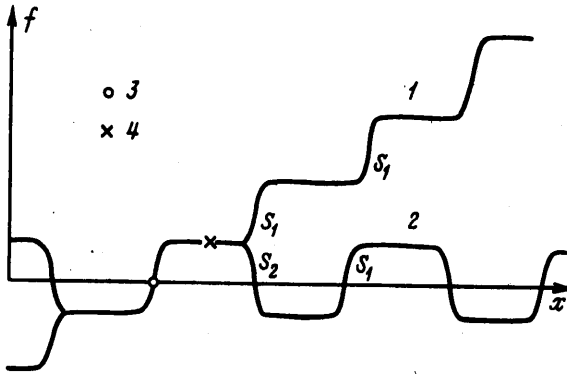
Таким образом, вид рассмотренной выше проекции резонансного дерева в окрестности начала координат сходен с видом области ограниченных решений для обычного уравнения Кортевега – де Вриза.

В случае модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза путем численного исследования получены следующие результаты. Любая точка внутри резонансного дерева соответствует двухпериодному решению. Совокупность точек, соответствующих фиксированному соотношению между двумя периодами волны  $s = \Delta_1/\Delta_2$  (способ определения периодов  $\Delta_1$  поясняется ниже), назовем ветвью. Каждая ветвь начинается от ствола дерева и заканчивается на его границе. При движении вдоль ствола величина  $s$  изменяется монотонно:  $s \rightarrow \infty$  при  $b_1 \rightarrow 0+$ ,  $s \rightarrow 1$  при  $b_1 \rightarrow b_*-$ . Все дерево разбито на два фрагмента:  $s > 1/2$  и  $s < 1/2$ ;  $s = 1/2$  соответствует  $b_1 = 0,16b_3^2/b_5$ .

Если  $s$  – иррациональная величина, ветвь представляет собой некоторую поверхность в пятимерном пространстве параметров решений. Если  $s$  рационально, то только часть ветви является поверхностью, а другая часть это некоторая область, соответствующая резонансным решениям. Проекция этой области на двумерное подпространство будем называть резонансными листьями. Для наглядности на примере резонанса  $k_2n = k_1(n+1)$  поясним, что представляют собой резонансные решения (для случая резонанса общего вида  $k_2n = k_1m$  ниже по тексту, если в скобках не указано иное, нужно заменить  $n+1$  на  $m$ ). Рассмотрим некоторую систему с линейными волнами, описываемыми выражением

$$u = a_1 \exp(ik_1x + f_{10}) + a_2 \exp(ik_2x + f_{20}), \quad |k_2 - k_1(n+1)/n| \ll k_1$$

Когда условие резонанса выполнено в точности, имеем двухпериодное решение с периодами  $\Delta_1 = D_1 = 2\pi/k_2$  – минимальный период,  $\Delta_2 = \Delta_1(n+1)/n$ , и  $D_2 = 2\pi n/k_2$  – характерный период взаимодействия между волнами (в случае резонанса общего вида  $D_2 = 2\pi n_{\min}/k_{\max}$ ,  $n_{\min} = \min(n_r, m_r)$ , где  $m_r/n_r = m/n$  – несократимая дробь). Если это не так, то имеем квазипериодическое решение, в котором можно выделить еще и третий период  $D_3 = 2\pi/l \cdot k_2/(n+1) - k_1/nl$  – период повторения одинакового начального сдвига по фазе между двумя взаимодействующими волнами на участке длиной  $D_2; D_3$  это максимальный характерный период.



Фиг. 2. Качественный вид сдвига по фазе между двумя волнами в случае нерезонансного (кривая 1) и резонансного (кривая 2) решения

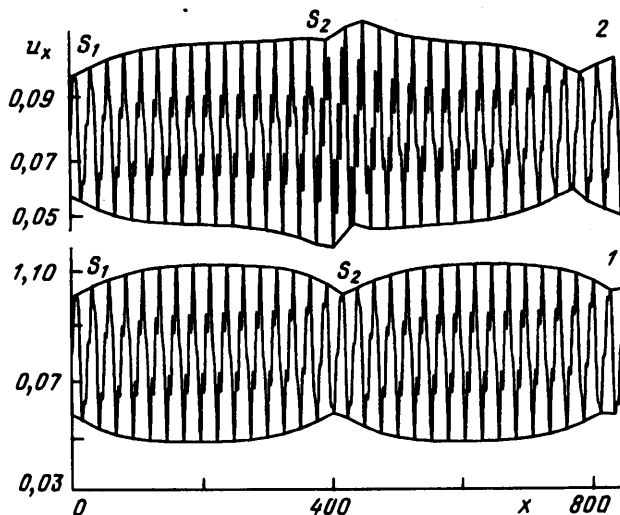
Введем величину  $f = [k_2 - k_1(n+1)/n]x + f_{20} - f_{10}$ . Для линейных волн эта величина линейно зависит от  $x$ . Для нелинейных волн качественно решение можно описать следующим образом. Также наблюдаются три периода. В окрестности ствола нелинейные и линейные решения близки. При удалении от него решения в целом различаются, но на коротком отрезке ( $\sim D_2$ ) качественно оказываются сходными. При этом величина  $f(x)$  оказывается нелинейной (эту зависимость можно качественно оценить по расположению максимумов и минимумов и точек перегиба на графиках  $a(x)$ ,  $a_x(x)$ ).

При приближении к границе листа с внешней его стороны, но внутри области ограниченных решений график  $f(x)$  принимает вид, показанный на фиг. 2, кривая 1, т.е. представляет собой последовательность скачков. Решение можно охарактеризовать как последовательность солитонов огибающей двухпериодного решения, на фиг. 3 и 4 эти солитоны обозначены как  $S_1$ . При приближении к границе листа со стороны области резонансных решений график  $f(x)$  становится чередующейся последовательностью скачков повышения и понижения (см. фиг. 2, кривая 2), а решение — чередующейся последовательностью солитонов двух разных типов  $S_1$  и  $S_2$  (см. фиг. 3, кривая 2). Солитон  $S_1$  можно интерпретировать как структуру скачка между нерезонансными и резонансными решениями.

На фиг. 3 графики решений соответствуют  $s = 1/4$ . Примеры других резонансных решений показаны на фиг. 4, кривые 1–3 соответствуют  $s = 3/10$ ;  $2/5$ ;  $3/4$ , начальные данные выбраны при этом такие, что колебания величины  $f$  незначительны.

Ранее в [2–3] были разработаны аналитические методы для исследования волновых скачков для моделей, описываемых уравнением Шредингера с использованием интерпретации таких скачков как трехволновых резонансов. Третья волна в этих работах была определена как результат резонансного взаимодействия двух волн, здесь она соответствует резонансному решению. Данное исследование является обобщением метода работ [2–3].

Поясним, как практически находились резонансные решения. Для некоторых точек в характерных приграничных областях, где имеется выпучивание и заострение контура границы резонансного дерева, решалось дифференциальное уравнение (1.2), график решения выводился на экран для визуального определения соотношения между периодами по числу максимумов, минимумов и точек перегиба, приходящихся на один минимальный квазипериод (см. выше величину  $D_2$  для линейных волн). В случае резонансного решения на любой минимальный квазипериод приходится постоянное и целое число таких особенностей. Для облегчения распознавания резонансных решений были построены эталонные гра-

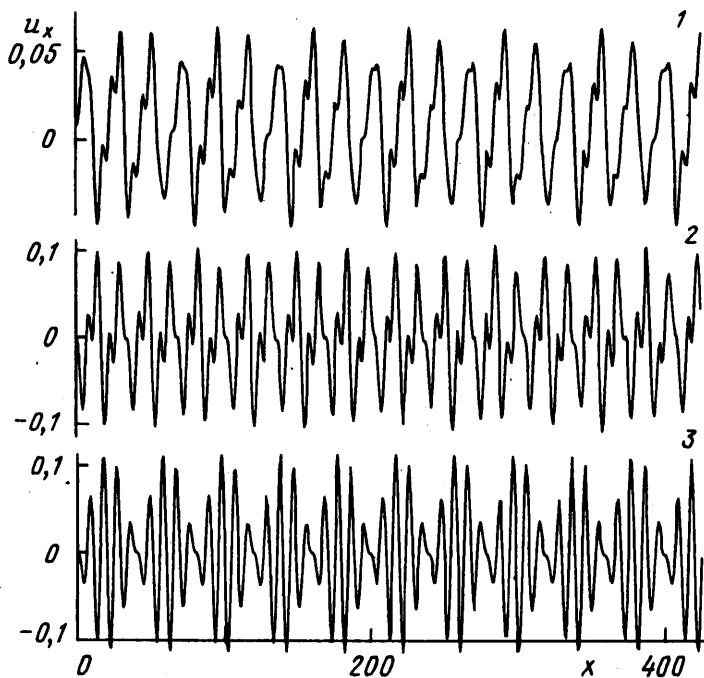


Фиг. 3. Вид нерезонансного (кривая 1) и резонансного (кривая 2) решений при  $s = 1/4$

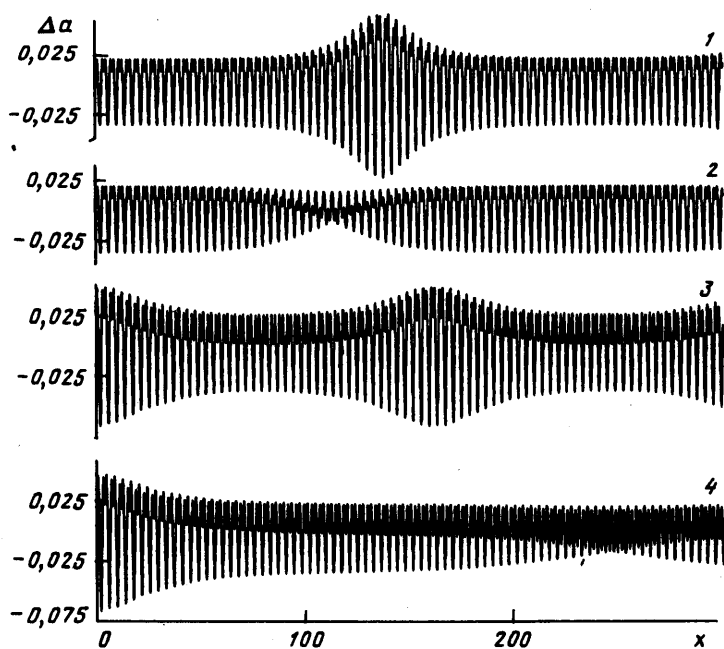
фики для суммы двух синусоидальных волн с рациональными соотношениями между их периодами.

Для нелинейного резонансного решения точной визуально определяемой величиной является величина  $s$ , эта величина не зависит от  $x$ . Грубо описать способ определения  $s$  можно так: на один горб графика огибающей решения приходится вполне определенное и целое число горбов, порожденных первой и второй волной, отношение числа горбов, порожденных разными волнами, и есть  $s$ . Но фактически на графике проявляются не все горбы, для части из них вместо горба удается выявить точку перегиба. Кроме того, четко выраженная огибающая решения имеется только для резонансов типа  $(n + 1)/n$ , однако в этом случае горбы первой и второй волны сливаются друг с другом. Для более сложных резонансов приходится рассматривать огибающую огибающей. Все это затрудняет процесс автоматического машинного определения является ли данное решение резонансным и каково значение  $s$ . Периоды  $D_1, D_2, D_3$  и соответственно  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  из расчета математически точно можно определить как средние значения по большому числу колебаний. Другим доступным количественным подходом является замена  $x$  дискретной координатой – числом горбов огибающей. Для каждого значения этой координаты можно поставить в соответствие значения периодов  $D_1$  и  $D_2$  и начального сдвига между горбами двух волн, что позволяет количественно оценить сдвиг по фазе  $f(x)$ .

**3. Солитоны огибающей резонансного решения.** Для уравнения Кортевега – де Вриза имеется три типа границ между резонансными ветвями и остальной областью ограниченных решений, при подходе к которым обнаруживаются солитонные решения. При первом типе начальные данные соответствуют холму (впадине) солитона, т.е. области скачка фазы (на фиг. 2 точка 3), при этом по одну сторону от границы в нерезонансной области обнаруживается последовательность однотипных солитонов, а по другую в резонансной области – чередующаяся последовательность солитонов двух разных типов. При втором типе границы в нерезонансной области также имеется солитон, но начальная точка соответствует подошве солитона (фиг. 2, точка 4), а в резонансной области имеется чисто двухпериодное решение. В случае границы третьего типа по обе стороны нерезонансное решение, при этом с обеих сторон имеются солитоны, отличающиеся друг от друга, начальные данные соответствуют подошве солитона. Фактически это два слившихся перехода второго типа. Все рассматриваемые солитоны являются солитонами огибающей двухпериодных решений.



Фиг. 4. Резонансные решения при  $s = 3/10, 2/5, 3/4$  (кривые 1, 2, 3)



Фиг. 5. Различные типы солитонов при  $s = 1/2$  для модифицированного уравнения Шредингера

Для модифицированного уравнения Шредингера найдены также решения, в которых при подходе к границе резонансного листа с разных сторон возникают две разные последовательности солитонов, причем различные точки соответствуют чисто периодическим решениям (фиг. 5, кривая 1 – резонансное решение, кривая 2 – нерезонансное,  $s = 1/2$ ). В этом случае можно рассматривать скачки от нерезонансного решения к резонансному как двойные скачки: сначала на периодическое решение, а потом на резонансное. Помимо решений описанного выше типа в случае  $s = 1/2$  были найдены решения, в которых чередующаяся последовательность солитонов возникает при приближении к границе со стороны области двухпериодных решений, а со стороны резонансной области имеется обычная последовательность солитонов (фиг. 5, кривая 3 – резонансное решение, 4 – нерезонансное). На фиг. 5 приведены графики величины  $\Delta a = a - 1$ .

Таким образом, резонансный лист (см. фиг. 1, увеличенное изображение фрагмента резонансного дерева показано справа) представляет собой область с резонансными решениями и с солитонами огибающей по двум его границам внутри резонансного дерева. Эти границы могут быть первого или второго типа. Одна из этих границ – граница области, где  $f$  растет с увеличением  $x$  (кривая 1), а другая – где убывает (кривая 2). Третья граница – внешняя граница с областью неограниченных решений (жирная линия 3). Внутри листа проходит линия периодических решений. При выходе этой линии на внешнюю границу возникает заострение резонансного листа.

**4. Структура резонансных ветвей и аппроксимирующие солитоны.** Каждый резонансный лист занимает некоторую площадь. Суммарная площадь резонансных листьев должна быть меньше площади резонансного дерева. Поскольку листов бесконечное число, то должен существовать какой-то порядок, в силу которого площадь одних листов конечна, а других ничтожна мала. В данном разделе выявляется этот порядок.

Наиболее простые резонансы – резонансы вида  $s = 1/n$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Листы этой серии расположены в области  $u_0 < 0$ . В области  $u_0 > 0$  таких листов нет. Наибольшую площадь занимает лист  $s = 1/2$ , который отходит непосредственно от ствола резонансного дерева, при этом в рассматриваемой проекции в области  $u_0 > 0$  отсутствует решение с  $s = 1/2$ . Площади листов серии  $1/n$  последовательно уменьшаются при увеличении  $n$ . В окрестности начала координат эти листья сосредоточены вблизи линии  $l_2$ , постепенно приближаясь к ней по мере увеличения числа  $n$ . При  $u_0 \rightarrow b_1$  получаем решение, близкое к обычному солитону уравнения Кортевега – де Вриза (в действительности это неограниченное решение, имеющее солитонный вид только на начальном участке, но при уменьшении  $b_1$  длина этого участка возрастает). В силу указанного выше расположения резонансных листов назовем этот солитон аппроксимирующим  $1/0$  солитоном для серии  $1/n$ .

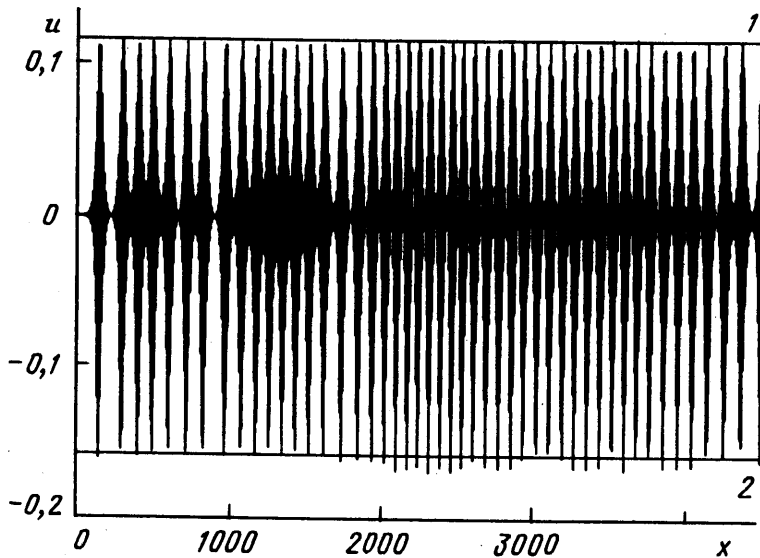
Аппроксимирующие  $1/n$  солитоны возникают при переходе со стороны границы резонансных деревьев к линиям  $l_2, l_3, l_1, l_4$ . У модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза не существует [10] точного решения типа солитона, сходного с солитоном обычного уравнения Кортевега – де Вриза, однако существуют точные решения в виде солитона с наложенной на него периодической волной, именуемые обобщенными солитонами (см. также [11], где этот факт доказывается для полной системы уравнений жидкости с поверхностным натяжением). Решение типа аппроксимирующего обобщенного солитона также было получено, но для этого потребовалось рассмотреть проекцию дерева в следующем трехмерном подпространстве:

$$(b_1, u_0, u_1), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = -k_{1/0}^2 u_1^2, \quad k_{1/0}^2 = b_3 / b_5$$

с тем чтобы включить в это подпространство поверхность, соответствующую линейным решениям типа  $u = a \sin(kx)$ .

Другой доступной для исследования серией является серия резонансов  $s = n/(n + 1)$ ,





Фиг. 6. Последовательность аппроксимирующих 1/1 солитонов при  $\mu = 0,04$ , прямые 1 и 2 показывают значения максимума и минимума, полученные при подстановке  $\mu = 0,04$  в асимптотические формулы, выявленные в результате расчетов при  $\mu \rightarrow 0+$

$n = 1, 2, 3, \dots$ . Листы этой серии расположены в верхней части резонансного дерева в шахматном порядке относительно оси  $b_1$ :  $s = \frac{2}{3}$  в области  $u_0 > 0$ ,  $s = \frac{3}{4}$  в области  $u_0 < 0$  и т.д. Лист  $s = \frac{1}{2}$  также подчиняется этой закономерности. В области  $b_1 > b_*$  листы этой серии как бы обхватывают с двух сторон ось  $b_1$ . При  $u_0 \rightarrow 0$  имеем на начальном отрезке решение типа солитона огибающей.

Ниже приводится формула, приближенно описывающая начальный участок решения при  $u_0 \rightarrow 0$ , и  $b_1 > b_*$ . Данные результаты получены путем асимптотических численных исследований с учетом соображений размерности

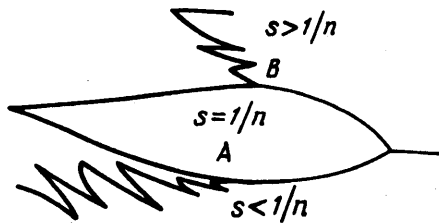
$$u = c_a \frac{b_3^2}{b_5} \mu^{\frac{1}{2}} \text{ch}^{-1} \left( \sqrt{\frac{\mu b_3}{8b_5}} x - c_\infty \right) \sin \left[ k_{1/1} (x + c_f) \right], \quad k_{1/1}^2 = \frac{b_3}{2b_5},$$

$$\mu = \frac{b_1 - b_*}{b_*}, \quad c_a \approx 0,688 \quad (4.1)$$

Здесь  $c_\infty/l_s \gg 1$ , где  $l_s$  – длина волны солитона, которую можно определить, например, по уровню половины от амплитуды;  $c_\infty/l_s \rightarrow \infty$  при  $b_1 \rightarrow 0$  или  $\mu \rightarrow 0$  соответственно;  $c_f$  – сдвиг по фазе, это произвольная величина. Коэффициенты при  $x$  в (4.1) находятся из разложения уравнения (1.4)

$$k = \left( \pm 1 \pm i \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \right) \sqrt{\frac{b_3}{2b_5}} + O(\mu), \quad \mu \rightarrow 0$$

Коэффициент в синусе совпадает с абсолютной величиной действительной части, а коэффициент в гиперболическом косинусе – с абсолютной величиной мнимой части этого выражения. Таким образом, данное решение можно рассматривать как сумму двух волн, одна из которых экспоненциально растет при возрастании  $x$ , а другая экспоненциально убывает. В результате нелинейного резонанса происходит полная пе-



Фиг. 7. Расположение резонансных листов различных уровней

редача энергии от одной волны к другой, что приводит к тому, что суммарное решение оказывается ограниченным.

Результат расчета для огибающей не зависит от способа задания начальных данных вблизи оси  $b_1$ , а также от используемой численной схемы. Это указывает на то, что формула (4.1) описывает некоторое множество решений, которое можно рассматривать как притягивающее множество. При сравнительно больших  $\mu$  порядка 0,04 решение приобретает вид последовательности солитонов со случайными значениями  $c_\infty$  и  $c_f$ , как показано на фиг. 6. Солитоны плохо отделены друг от друга и график решения напоминает странный аттрактор. Даже при значительном увеличении продолжительности расчета решение остается ограниченным. Такой эффект наблюдается и при расчетах других аппроксимирующих солитонов, однако затруднительно ответить на вопрос, является ли стохастический характер решения свойством уравнения или же он порожден усилением случайных вычислительных ошибок.

Как видно из фиг. 6, огибающие решения сверху и снизу несимметричны относительно оси  $x$ . Исходя из результатов работы [10], где доказывается существование аналогичного точного решения при достаточно малых  $\mu$ , можно сделать вывод о том, что  $c_a = 3/\sqrt{19}$ . Более детальное асимптотическое исследование численных решений показывает, что

$$\max(u) = (c_a \mu^{1/2} - c_{2a} \mu) b_3^2 / b_5, \quad \min(u) = -(c_a \mu^{1/2} + c_{2a} \mu) b_3^2 / b_5, \quad c_{2a} \approx 0,53$$

Эти значения  $u$  на фиг. 6 отмечены линиями 1 и 2. Полученное численно значение коэффициента  $c_{2a}$  соответствует приближению для огибающей, вычисленному в соответствии с [10] с точностью до  $o(\mu)$ . Для более точного определения константы  $c_a$  в качестве амплитуды солитона была взята величина  $(\max(u) - \min(u))/2$ . При расчетах с  $\mu = 0,0004$  достигается совпадение с теоретическим коэффициентом с погрешностью порядка 0,01%. Теоретическое значение  $c_{2a} = 11/19 \approx 0,579$  с большой точностью подтверждается при  $\mu = 0,04$  в том случае, если максимум и минимум берется не для одного солитона, а для последовательности солитонов. Это указывает на то, что отклонение численного значения  $\mu$  от теоретического вызвано нарастанием систематической численной ошибки при уменьшении величины  $\mu$ . Численная ошибка порождается недостаточной малостью пространственного шага  $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$  (возможность уменьшения шага ограничена машинной точностью). При  $\mu$  порядка  $10^{-5}$  начинает проявляться влияние схемной дисперсии и солитон становится многогорбым. В решениях [10], в отличие от рассматриваемых здесь численных решений, сдвиг синусоиды по фазе относительно вершины солитона огибающей вполне определен и равен  $\pi/2$ .

Интерпретация  $1/2$  солитона как суммы двух волн согласуется с тем, что ветви резонансного дерева при  $b_1 > b_*$  смыкаются вблизи оси  $b_1$ . Показатель степени  $1/2$ , определяющий длину волны солитона можно найти из геометрических соображений. Будем считать, что каждая ветвь серии  $n/(n+1)$ , начинаясь в точке  $(0, b_*(1-\mu))$ , огибает точку  $(0, b_*)$  и приближается концом резонансного листа к оси  $b_1$  вблизи точки  $(0, b_* + c_r \mu b_*)$ , где  $c_r$  — некоторая константа; что соответствует наблюдаемой геомет-

рии резонансного дерева. Тогда именно такая зависимость ( $\mu^{-1/2}$ ) длины волны квази-периода будет получена при описании решения как суммы двух линейных взаимодействующих волн.

Назовем этот солитон аппроксимирующим  $\chi_1$  солитоном серии резонансов  $n/(n+1)$ . Солитон  $\chi_1$  можно включить в серию резонансов вида  $s = 1/n$ , как особый вырожденный случай, при котором правая и левая части резонансной ветви слились с осью  $b_1$  (терминология 1:1 резонанс для обозначения таких решений была введена ранее [12–13], но в контексте данной работы она приобретает новый математический смысл).

В силу указанных причин резонансы серии  $s = n/(n+1)$  можно рассматривать как резонансы второго уровня по отношению к серии  $s = 1/n$ , которую можно классифицировать как серию первого уровня, и предположить наличие резонансов более общего вида  $s = (1/n)(m/(m+1))$ ,  $m = n+1, n+2, \dots$  или же  $s = (1/n)/(m+1)/m$ ,  $m = n, n+1, n+2, \dots$ . Графики резонансных решений серий типа  $(1/1)(m/(m+1))$  и  $(1/1)/(m+1)/m$  визуально неотличимы друг от друга, поскольку ( $s$ ) серии первого типа и  $(1/s)$  серии второго типа совпадают, тогда как при  $n \neq 1$  соответствующие множества значений  $s$  и  $1/s$  отличаются друг от друга. Листы  $\chi_2$  и  $\chi_3$ , относящиеся к резонансам вида  $(1/n)(m+1)/m$ , выявлены в области  $u_0 > 0$ , а лист  $\chi_0$ , относящийся к резонансам вида  $(1/n)(m/m+1)$ , – в области  $u_0 < 0$  (здесь подразумевается, что если бы эти резонансы были резонансами более высокого уровня, то их бы не удалось выявить в силу малой площади резонансных листов). Таким образом, можно предполагать, что по разные стороны от ствола иерархия резонансов различна.

По аналогии с существованием аппроксимирующих  $\chi_0$  и  $\chi_1$  солитонов можно предположить существование аппроксимирующих  $1/n$  солитонов. Они должны находиться вне резонансного дерева вблизи границ, соответствующих  $s \rightarrow 1/u-$  при  $u_0 < 0$  и  $s \rightarrow 1/n+$  при  $u_0 > 0$ . Проверка показала, что это действительно так, однако доказать отсутствие таких солитонов в окрестности границ  $s \rightarrow 1/n+$  при  $u_0 < 0$  не удалось.

Поясним, какие трудности возникают при проверке существования аппроксимирующих солитонов. Граница резонансного дерева имеет изрезанную форму и состоит из соединенных между собой участков границ резонансных листьев. Точка сочленения с границей листа  $1/n$  может быть точкой возврата граничной кривой или же точкой излома (фиг. 7, точки A и B соответственно). В первом случае аппроксимирующие солитоны существуют, а во втором нет. Геометрия расположения резонансных листьев вблизи листа  $s = 1/n$  при  $u_0 < 0$  такова, что угол излома мал и нельзя достоверно утверждать, что он отличен от нуля.

По индукции можно построить и следующие уровни резонансов

$$s = (1/n)((m+1)/m)(l/(l+1)), \quad s = (1/n)(m/(m+1))(l+1)/l \quad (4.2)$$

но проведение численного исследования их затруднительно.

При проведении данного исследования использовалось следующее интуитивное соображение. В случае немодифицированных уравнений переход из области ограниченных решений в область неограниченных возможен только через солитон или же состояние равновесия, т.е. только через особое решение. Для модифицированных уравнений вблизи границ области ограниченных решений также следует искать особые решения, но здесь это резонансные решения, солитонные же решения отделяют области резонансных решений от нерезонансных. Еще одним интуитивным соображением следует считать гипотезу равномерного расположения точек сгущения резонансных листов в кроне дерева, поэтому, например, для третьего уровня была выбрана последовательность типа (4.2), а не типа  $s = (1/n)(m/(m+1))(l/(l+1))$ .

Автор благодарит А.Г. Куликовского за обсуждения, А.А. Бармина, прочитавшего статью и сделавшего ценные замечания, а также А.Т. Ильичева за предоставленную литературу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dodd P., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
2. *Бахолдин И.Б.* Усреднение уравнения и разрывы, описывающие распространение волн Стокса с медленно меняющимися параметрами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 113–121.
3. *Бахолдин И.Б.* Трехволновой резонанс и усредненные уравнения взаимодействия двух волн в средах, описываемых кубическим уравнением Шредингера // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 107–116.
4. *Марченко А.В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230–234.
5. *Ильичев А.Т., Марченко А.В.* О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88–95.
6. *Akylas T.R., Kung T.-J.* On nonlinear wave envelopes of permanent form near a caustic // J. Fluid Mech. 1990. V. 214. P. 489–502.
7. *Oikawa M.* Nonlinear behaviour of capillary-gravity waves near the inflection point of the dispersion curve // Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Japan, 1991. V. 38. № 108. P. 61–81.
8. *Akylas T.R.* Unsteady and nonlinear effects near the cusp lines of the Kelvin ship-wave pattern // J. Fluid Mech. 1987. V. 175. P. 333–342.
9. *Бахолдин И.Б.* Волновые скачки в средах, описываемых модифицированным уравнением Шредингера // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 111–124.
10. *Grimshaw R., Malomed B., Benilov E.* Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth order Korteweg – de Vries equation // Phys. D. 1994. V. 77. P. 473–485.
11. *Iooss G., Kirchgässner K.* Water waves for small surface tension: An approach via normal form // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1992. V. 122A. № 3/4. P. 267–299.
12. *Iooss G., Kirchgässner K.* Bifurcation d'ondes solitaires en presense d'une taible tension super-ficielle // C.R. Acad. Sci. Paris. 1990. V. 311. № 5. P. 265–268.
13. *Buffoni B., Champneys A.R., Toland J.F.* Bifurcation and coalescence of a plethora of hooclinic orbits for a Hamiltonian system/Mathematics Preprint Univ. Bath 94/05 UK.

Москва

Поступила в редакцию  
4.V.1995