

УДК 532.582.7

© 1996 г. А.Н. ПРОКУНИН, М.К. УИЛЬЯМС

О СЕДИМЕНТАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Экспериментально изучалось движение твердой сферической частицы по наклонной плоскости в неподвижной ньютоновской жидкости под действием собственного веса при больших числах Рейнольдса ($10^2 \leq Re_p < 10^5$). Найденны параметры, определяющие коэффициент лобового сопротивления частицы и его связь с составляющей гидродинамической силы, отжимающей частицу от стенки.

В основном теоретические и экспериментальные работы о движении сферической частицы вдоль наклонной плоскости проводились для чисел Рейнольдса $Re_p \ll 1$. Исследованиям конечных чисел Re_p посвящены две экспериментальные работы [1,2], носящие приближенный характер.

При $Re_p \ll 1$ все исследования базировались на [3,4], где в приближении Стокса получено решение задачи о поступательном движении вращающейся сферической частицы вдоль стенки на произвольном расстоянии h от последней. Асимптотическая зависимость [3] при $h \rightarrow 0$ для силы и момента гидродинамического сопротивления движению частицы имели логарифмическую особенность. Это приводило к известному парадоксу о невозможности скатывания частицы по наклонной плоскости в случае $h \equiv 0$. В [3, 5, 6] для устранения этого парадокса был введен конечный зазор h , определяемый [5, 6] из аналогичного рассматриваемым экспериментам. В [5] было получено удовлетворительное согласование теории и эксперимента. При этом считали также, что зазор h образован шероховатостями поверхности частицы и плоскости. Рассматривались другие гипотезы [3, 7] образования зазора h .

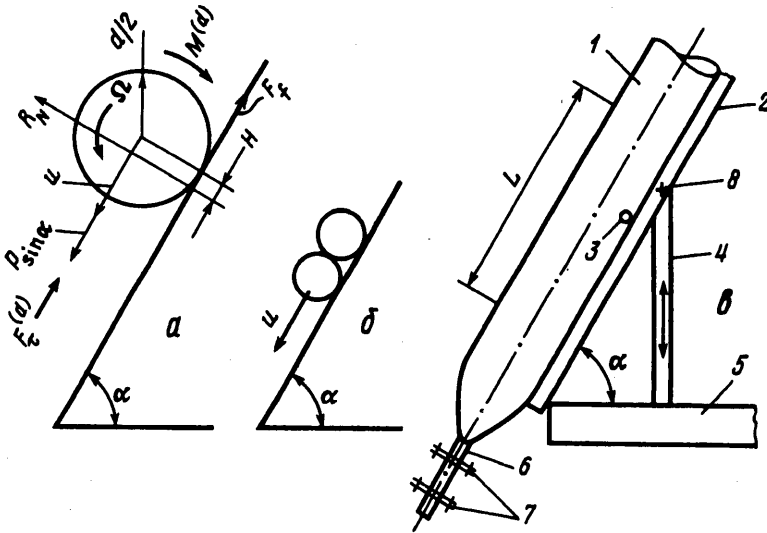
Из экспериментальных работ [1, 2], выполненных для широкого диапазона чисел Рейнольдса Re_p , можно только заключить, что основным параметром, определяющим коэффициент лобового сопротивления при движении сферической частицы C_p , является Re_p . Влияние, например, вращения и трения о стенку частицы на ее движение здесь не исследовалось. Последнее привело в [1] к значительным ошибкам [5] при определении C_p .

1. Методика исследования. Твердая сферическая частица диаметром d под действием собственного веса скатывается по стенке наклонной трубы диаметром D ($d/D \ll 1$), заполненной жидкостью, с поступательной постоянной скоростью u , при этом вращаясь с постоянной угловой скоростью Ω (см. фиг. 1,а).

Используя квазистационарное приближение, запишем уравнения для баланса сил и моментов (см. фиг. 1,а)

$$F_t^{(d)} = P \sin \alpha - F_f, \quad F_N^{(d)} = P \cos \alpha - R_N, \quad P = (\rho_s - \rho)Vg \quad (1.1)$$

$$\frac{2M^{(d)}}{d} = F_f - \frac{2HR_N}{d} \quad (1.2)$$



Фиг. 1. Схемы экспериментов: а – движение одной частицы, б – движение двух, склеенных между собой частиц, в – экспериментальная установка

где $F^{(d)} = \{F_\tau^{(d)}, F_N^{(d)}\}$ и $M^{(d)}$ – динамическая сила и крутящий момент, действующие со стороны жидкости на частицу, индексы τ и N означают проекции на направление скорости u и на нормальное этому направлению, R_N – нормальная реакция стенки трубы на частицу, H – смещение линии действия R_N относительно центра частицы; α – угол наклона трубы, P – вес частицы в жидкости, ρ_s и ρ – плотность сферической частицы и жидкости, V – объем частицы, g – ускорение свободного падения, F_f – сила трения, определяемая взаимодействием частицы со стенкой как непосредственно при соприкосновении, так и при наличии тонкой пленки жидкости между частицей и стенкой. Характер трения может, по-видимому, меняться от чистого качения до чистого скольжения. В общем случае выражение для силы неизвестно, но справедливы неравенства

$$F_f < k_s (P \cos \alpha - F_N^{(d)}), \quad \frac{2H}{d} \ll k_s \quad (1.3)$$

Здесь $F_N^{(d)}$ – нормальная составляющая динамической силы, которая, как будет показано, направлена от стенки, k_s – коэффициент трения скольжения при сухом трении. Из формул (1.1)–(1.3) следует, что при достаточно больших углах α можно пренебречь влиянием трения на движение частицы.

Экспериментальные данные представлены ниже в виде зависимости коэффициента лобового сопротивления

$$C_p = F_p^{(d)} (\frac{1}{8} \pi \rho u^2 d^2)^{-1} \quad (1.4)$$

от определяющих безразмерных параметров: числа Рейнольдса Re_p , параметра проскальзывания w и параметра ϵ , введенного в [3, 5]

$$Re_p = \frac{u d \rho}{\eta}, \quad w = \frac{d \Omega}{2u} \quad (0 \leq w \leq 1), \quad \epsilon = \frac{2h}{d} \quad (1.5)$$

Здесь h – расстояние между частицами и стенкой. В [5] для $Re_p \ll 1$ предполагалось, что расстояние (некоторым образом усредненное) образуется за счет естественных

Таблица 1

Параметры	Сталь	Карбид вольфрама	Свинец	Бронза	Алюминий		Нейлон	
	№ 4	8	9	10	11	12	13	14
d , см	0,48	0,480	0,200	0,633	0,238	0,633	0,323	0,479
ρ , г/см ³	7,8	15,0	11,3	8,42	2,70	2,70	1,14	1,14
R_a , мк	0,02–0,16	0,012	–	0,25	1,80	1,80	–	–
Сталь								
№	1	2	3	5	6	7		
d , см	0,156	0,245	0,320	0,633	0,955	1,575		

Таблица 2

	Силиконовая жидкость	Глицерин	Водный раствор глицерина	Вода	Ацетон
ρ , г/см ³	0,960	1,250	1,125	0,998	0,795
η/ρ , см ² /с	0,986	9,44	0,049	0,010	0,0044
T °С	25	20	20	20	20
α_0 , град	2,6	–	0,8	0,6	–
Алюминий ($d = 0,635$ см)					

Таблица 3

	Сталь		Алюминий		Нейлон	
d , см	0,156	0,480	0,238	0,633	0,323	0,479
k_z	0,40	0,20	0,47	0,28	0,40	0,48

шероховатостей сферической частицы и стенки. По-видимому, возможны и другие механизмы образования h .

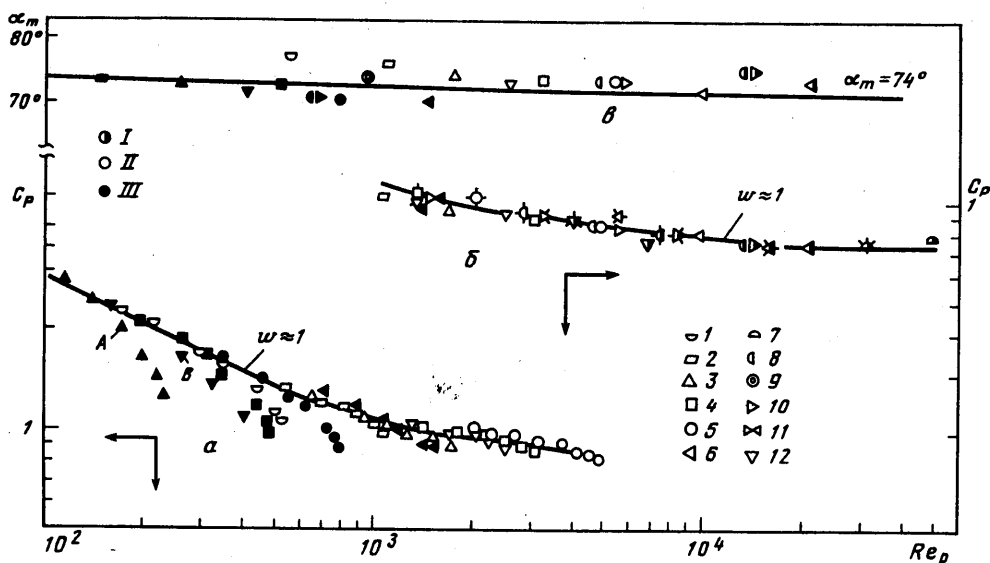
Схема экспериментальной установки представлена на фиг. 1. Сферическая частица 3 скатывалась в наклонно установленной стеклянной трубе 1 с внутренним диаметром $D = 5$ см, жестко связанной с металлической рамой 2. Рама крепилась с помощью шарнира 8 на штанге 4, жестко связанной с плитой 5. Шарнир мог перемещаться вдоль штанги, как показано стрелкой. Верхняя часть трубы была открыта, на нижнюю, суженную к концу, был надет резиновый шланг 6 с двумя зажимами 7 для вынимания частиц без слива жидкости. Измерительный участок трубы α варьировался в зависимости от скорости частицы и $\alpha_{\max} = 1,2$ м. Угол наклона трубы α мог непрерывно меняться от 0 до 90°.

В табл. 1 указаны диаметры исследуемых частиц, материал, из которого они были сделаны, плотность и значения шероховатости их поверхностей R_a , там, где они измерялись.

Это стандартная техническая характеристика поверхности

$$R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |y(x)| dx$$

где $l = 0,8$ мм, $y(x)$ – профиль поверхности, измеряемый от среднего значения. Величина R_a измерялась щуповым методом на приборе Talysurf 4 (Taylor Hobson) для сферических частиц



Фиг. 2. Зависимость коэффициента лобового сопротивления (а, б) сферической частицы C_p и минимального угла, при котором существует контакт частицы с поверхностью трубы $\alpha_m^{(b)}$ от числа Рейнольдса Re_p . Номерам точек различных конфигураций (1-12) соответствуют различные частицы, характеристики которых приведены в табл. 1. Различным штриховкам точек I-III соответствуют различные жидкости (I - ацетон, II - вода, III - 50%-ный водный раствор глицерина)

и Surtronic 3 для плоскостей. Для стальной частицы $d = 0,633$ см приведен диапазон R_a , так как поверхность несколько корродировала и имела различные значения R_a в различных местах шарика.

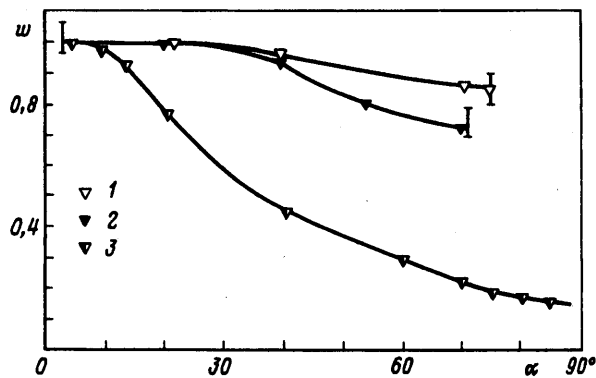
Для поверхности стеклянной трубы $R_a = 0,01-0,02$ мк. Величина R_a для частиц могла изменяться на два порядка, величины d и плотности ρ_s изменялись более 5 раз.

В табл. 2 приведены названия исследуемых жидкостей, их вязкость и плотность.

Скорости u и Ω по возможности измерялись визуально, с помощью секундомера, линейки и метки на частице. При достаточно быстрых движениях - с помощью фотографирования. В последнем случае два снимка, соответствующие двум вспышкам осветительной лампы, делались на один кадр пленки. Время между вспышками Δt задавалось генератором импульсов Г5-56. При измерении скорости вращения сферической частицы на последней наносился рисунок, с помощью которого по фотографиям, соответствующим различным Δt , восстанавливалась картина поворота частицы.

В ходе предварительных экспериментов было установлено, что для достаточно быстродвигающихся частиц возникает звук (возможно, из-за высокочастотных и малоамплитудных соударений с трубой), который исчезает при ее отрыве от стенки. Контрольное фотографирование показало, что частица практически переставала вращаться после исчезновения звука.

Коэффициент трения скольжения определялся как тангенс максимального угла наклона трубы, при котором две склеенные между собой (фиг. 1, б) частицы после придания им некоторого импульса останавливались. Величина этого коэффициента практически не зависела от вязкости и плотности жидкости и уменьшалась для металлических частиц из одинакового материала с ростом их диаметра. Он совпадал с полученным при независимом измерении силы трения с помощью динамометра при скольжении частицы с постоянной скоростью по горизонтальной сухой плоскости. Некоторые значения приведены в табл. 3. Аналогичным же образом после придания частице некоторого импульса определялся и максимальный угол α_0 , при котором



Фиг. 3. Зависимость коэффициента проскальзывания w от угла наклона трубы α . Точкам 1–3 соответствуют вода ($Re_p = 1400-2500$), 50%-ный раствор глицерина ($Re_p = 170-410$) и силиконовая жидкость ($Re_p = 0,44-4,3$)

останавливалась катящаяся частица (см. табл. 2). Прочерки в таблице означают отсутствие соответствующих экспериментальных данных.

2. Экспериментальные результаты. Зависимости скорости u (α) для фиксированных частиц, монотонно растущие с ростом угла α , здесь не приводятся. Они играют подсобную роль и служат для расчета коэффициента сопротивления движению сферической частицы C_p . Расчет осуществляется по формулам (1.1), (1.4) без учета в общем случае неизвестного трения, что обобщаем ниже.

Зависимости $C_p(Re_p)$ (см. (1.4), (1.5)) показаны на фиг. 2, а, б. Отметим, что зависимость фиг. 2, б является продолжением зависимости фиг. 2, а по числам Re_p и выделена для удобства обсуждения. Стрелками показаны координатные оси, соответствующие зависимостям а и б.

Для каждого сочетания жидкость – частица на фиг. 2, а отложены значения C_p для углов α от 20 (иногда 10) до 70° (см. точки одинаковой конфигурации). При этом левая точка соответствует наименьшему углу наклона трубы, правая – наибольшему. На фиг. 2, а точкам соответствуют стальные (1–5) частицы различных диаметров и алюминиевая (12), для которой дополнительные данные приводятся на фиг. 3. Были получены также аналогичные данные для частиц из бронзы, карбида вольфрама, свинца, нейлона и алюминия другого диаметра, соответствующие закономерностям фиг. 2, а, которые для упрощения рисунка на нем не показаны.

На фиг. 2, б для $Re_p > 10^3$ отложены лишь значения $C_p(Re_p)$, соответствующие наибольшему $\alpha = 70^\circ$ (обычные значки) и наименьшему $\alpha = 20^\circ$ (значки, из которых исходят линии) углам. Для промежуточных значений α точки на фиг. 2, б не указаны. Для нескольких случаев эти промежуточные точки приводятся на фиг. 2, а (см., например, точки 5).

Для каждого сочетания жидкость – частица зависимости $C_p(Re_p)$ в общем случае различные (см. фиг. 2, а). Но при достаточно малых значениях угла $\alpha \approx 10-40^\circ$ все экспериментальные точки для различных частиц и жидкостей образуют универсальную кривую (см. сплошную линию) с разбросом 5% от среднего. Точки, отмеченные буквами А и В, для $Re_p < 10^3$ соответствуют $\alpha = 40^\circ$ и $w \approx 0,95-0,98$. С увеличением Re_p увеличивается диапазон углов, который соответствует универсальной кривой, а при $Re_p > 10^3$ практически весь диапазон α от 10 до 70° соответствует ей. Таким образом, при $Re_p > 10^3$ имеет место универсальная зависимость для произвольных сочетаний частиц, жидкостей и углов α .

Для $\alpha > 70^\circ$ и исследованных чисел $Re_p > 10^2$ при движении частицы вниз вдоль стенки исчезает сопровождающий это движение звук, частица полностью теряет

контакт со стенкой и перестает вращаться. Иногда она даже после потери контакта со стенкой вращается в противоположном указанному на фиг. 1,а направлении.

Значения критических углов α_m (наименьший угол, при котором частица еще не имеет контакт со стенкой) в зависимости от Re_p представлены на фиг. 2,в. В области $Re_p > 10^2$ это приблизительно постоянная величина (с разбросом $\pm 5\%$), почти не зависящая от Re_p и w .

Отметим еще некоторые более частные детали, связанные с отрывом частицы от стенки при $Re_p \geq 10^2$.

Если рассматривать зависимость $\alpha_m(Re_p)$ для фиксированной частицы в различных жидкостях, то она (хотя и находится вблизи $\alpha_m \approx 74^\circ$) все же является слаборастущей функцией Re_p (см., например, точки 6, 8, 10 на фиг. 2,в).

Несколько выпадает из общей картины значение $\alpha = 82^\circ$ (не показаны на фиг. 2,в) для алюминия с $d = 0,613$ см в ацетоне. Возможно, это связано с тем, что частица двигалась при $\alpha = 70-80^\circ$ зигзагообразно. Звуковое сопровождение при этом было прерывистое и скорость частицы менялась по длине трубы.

На фиг. 3 приведены зависимости коэффициента проскальзывания w (см. (1, 5)) от угла наклона трубы α для алюминиевой частицы ($d = 0,633$ см) и различных жидкостей.

Существует угол α_0 , при котором частица не может скатываться по наклонной плоскости. На фиг. 3 этот угол для силиконовой жидкости отмечен отрезком прямой (параллельной оси w) слева от кривых, значения углов α_0 для других жидкостей приводятся в табл. 2. Величина α_0 для фиксированной частицы растет с ростом вязкости жидкости.

При малых значениях α ($\alpha > \alpha_0$) проскальзывание незначительно ($w \approx 1$). С увеличением α (см. фиг. 3) развивается проскальзывание ($0 < w < 1$) тем быстрее, чем больше вязкость жидкости. Для наиболее вязкой силиконовой жидкости качение частицы с проскальзыванием существует при любых $\alpha > \alpha_0$. Для менее вязких жидкостей (точки 1 и 2) квазистационарное движение в контакте со стенкой по углу ограничено не только снизу, но и сверху $\alpha < \alpha_m$ (значения α_m отмечены отрезками прямых справа от кривых). При $\alpha > \alpha_m$ частица теряет контакт со стенкой. Зависимость $\alpha_m(Re_p)$ рассматривалась выше (см. фиг. 2,в).

3. Обсуждение экспериментов. Рассмотрение фиг. 2 и 3, а также аналогичных, но не приведенных здесь экспериментальных данных показывает, что общая универсальная кривая (см. сплошную линию на фиг. 2,а, б) для различных сочетаний частица – жидкость соответствует случаю $w \approx 1$. Отклонения от этой кривой (см. фиг. 2,а) связаны с развивающимся проскальзыванием (см. фиг. 3, т.е. с уменьшением w), происходящим с увеличением угла наклона трубы α . Причем чем больше значения $Re_p(\alpha)$, при которых движется частица при $10^\circ < \alpha < 70^\circ$, тем меньше развивается проскальзывание в этом диапазоне и тем ближе лежат значения $C_p(Re_p, w)$ к зависимости $C_p(Re_p, w = 1)$. При $Re_p > 10^3$ и изменении α от 10 до 70° коэффициент w близок к единице и все значения в этом диапазоне практически принадлежат кривой $C_p(Re_p, w = 1)$.

Зависимость $C_p(Re_p, w = 1)$ качественно напоминает классическую зависимость $C(Re_p)$ для седиментации шаровой частицы вдали от стенки. При $Re_p \geq 10^3$ значения зависимости $C_p(Re_p, w = 1)$ несколько меньше, чем $2,5 C(Re_p)$, при $Re_p < 10^3$ – несколько больше.

Из предположения, что движение в контакте со стенкой возможно, пока составляющая сила веса $P \cos \alpha$ (см. (1.1)) не сравнивается с гидродинамической силой $F_N^{(d)}$, следует, что (определение C_N аналогично (1.4))

$$F_N^{(d)} \approx \text{ctg}(\alpha_m) F_\tau^{(d)}, \quad C_N \approx \text{ctg}(\alpha_m) C_p \quad (1.6)$$

где $\operatorname{ctg} d_m \approx 0,3$ согласно фиг. 2, в для $Re_p \geq 10^2$ и различных Re_p и w . Естественно распространить этот результат ($C_N \approx 0,3C_p$) на произвольные α по крайней мере для $Re_p \geq 10^3$.

Анализ экспериментальных данных для фиксированной частицы в разных жидкостях показывает, что сила $F_N^{(d)}$ практически не зависит от параметра w (измеренного вблизи отрыва), т.е. определяется не вращением частицы, а присутствием стенки.

Зависимости C_p от Re_p на фиг. 2 строились в пренебрежении трением (см. (1.1), (1.3), (1.4)). Качественные соображения говорят в пользу этого, ибо, согласно фиг. 2 и 3, при больших числах Re_p возникает отжимающая частицу от стенки сила, проскальзывание частицы относительно стенки уменьшается и в результате этих двух факторов роль трения падает. Ниже проводятся еще и количественные оценки этого, исходя из результатов, представленных на фиг. 2, а, б.

Если оценить влияние трения согласно неравенству (1.3), используя при этом значения коэффициента трения k_s из табл. 3, то для $\alpha = 70^\circ$ ошибка при оценке без учета $F_N^{(d)}$ меньше 10%. С учетом же $F_N^{(d)}$ ошибка делается пренебрежимо малой. Для $\alpha = 40^\circ$ ошибка будет меньше 20–25% уже с учетом $F_N^{(d)}$: Для $\alpha = 20^\circ$ пренебречь трением, пользуясь неравенством (1.3), нельзя, так как величины $\sin \alpha$ и $k_s (\cos \alpha - 0,3 \sin \alpha)$ соизмеримы (см. (1.1), (1.3), (1.6)). Тем не менее точки для $\alpha = 20^\circ$ (и даже для 10°) соответствуют зависимости $C_p(Re_p, w = 1)$, на которой находятся, в частности, точки для α от 40 до 70° при $Re_p > 10^3$ и для $\alpha = 40^\circ$ при $Re_p < 10^3$. Это показывает, что трением качения (с возможно небольшим проскальзыванием) можно пренебречь также и для $\alpha = 20^\circ$ (и даже для 10°). Естественно, что трение при углах α , находящихся в окрестности α_0 ($\alpha_0 \approx 0,6-2,6^\circ$, см. табл. 2), существенно.

Для больших Re_p для $\alpha > 10^\circ$ при несущественности трения из (1.1) и (1.2) следует, что $F_t^{(d)} \gg 2M^{(d)} / d$ (в частности, и для $w \approx 1$). При $Re_p \ll 1$ это не так [3], ибо $F_t^{(d)} \approx \approx 2M^{(d)} / d$ при $w \approx 1$.

При конечных значениях Re_p (см. фиг. 2) влияние параметра ϵ в отличие от области, где $Re_p \ll 1$ (см. [5]), замечено не было, хотя величины диаметров и шероховатостей, определяющие параметр (см. (1.5)), могли существенно меняться (см. табл. 1).

4. Заключение. В отличие от области $Re_p \ll 1$ (см. [5]) вместо функции $C_p(Re_p, w, \epsilon)$ при больших числах Re_p при движении сферической частицы в контакте со стенкой имеем функцию $C_p(Re_p, w)$, которая при $Re_p \geq 10^3$ не зависит уже от w , так как проскальзывание частицы относительно стенки здесь практически не развивается. Здесь C_p – коэффициент лобового сопротивления сферической частицы, w – коэффициент проскальзывания частицы относительно стенки, ϵ – относительный зазор между частицей и стенкой. В области конечных чисел Re_p появляется нормальная к поверхности трубы отжимающая частицу от стенки сила $F_N^{(d)}$, которая пропорциональна силе гидродинамического сопротивления движению частицы. Существование силы $F_N^{(d)}$ и слабо развитое проскальзывание частицы относительно стенки практически исключают влияние трения на движение частицы при больших числах Re_p .

Автор благодарит М.А. Брутяна за обсуждение статьи, В.Г. Куличихина за возможность продолжать работу в руководимой им лаборатории реологии полимеров ИНХС РАН, В.Н. Рогатина и А.А. Чайковского за помощь в проведении экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carty J.J.* Resistance coefficients for spheres on a plane boundary // B.S. Thesis. Department of Civil and Sanitary Engineering. Mass. Inst. Technology, 1957.
2. *Бухман Ю.А., Гупало Ю.П., Прокунин А.Н.* О движении сферических частиц в потоке жидкости в наклонных и горизонтальных трубах // ЖТФ. 1992. Т. 62. № 10. С. 35–47.
3. *Goldman A.J., Cox R.G., Brenner H.* Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall I // Chem. Eng. Sci. 1967. V. 22. № 4. P. 637–651.
4. *O'Neill M.E., Stewartson K.* On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt 4. P. 705–724.
5. *Smart J. R., Beimfohr S., Leighton D.T.* Measurement of the translational and rotational velocities of a noncolloidal sphere rolling down a smooth inclined plane at low Reynolds number // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5. № 1. P. 13–24.
6. *Smart J.R., Leighton D.T.* Measurement of the hydrodynamic surface roughness of noncolloidal spheres // Phys. Fluids. A. 1989. V. 1. № 1. P. 52–60.
7. *Davis A.M.J., Kezirian M.T., Brenner H.* On the Stokes-Einstein model of surface diffusion along solid surfaces: slip boundary conditions on the sphere and plane // J. Coll. Interface Sci. 1994. V. 165. P. 129–140.

Москва

Поступила в редакцию
15.II.1995