

УДК 532.59

© 1996 г. И.М. МИНДЛИН

## ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПЕРЕМЕННЫМ ДАВЛЕНИЕМ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Построено приближенное решение задачи с начальными и граничными условиями для системы нелинейных интегродифференциальных уравнений, описывающих формирование и эволюцию осесимметричных волн, возбуждаемых на неограниченной свободной поверхности идеальной жидкости давлением, изменяющимся во времени и в пространстве по законам достаточно общего вида. В случае, когда сила давления ограниченной мощности распределена по достаточно большой площади, получены формулы, описывающие эволюцию свободной поверхности на полуоси  $t > 0$  ( $t$  – время). Предельным переходом при  $t \rightarrow +\infty$  найдена форма и изучены энергетические свойства установившейся нелинейной волны, возбуждаемой почти-периодическим давлением с достаточно богатым частотным спектром.

Рассматриваются волны, возбуждаемые в первоначально покоящейся тяжелой жидкости, ограниченной горизонтальной свободной поверхностью, переменным давлением. В отличие от "неравномерного давления", не изменяющегося во времени, или от "перемещающейся области давлений", когда не меняется во времени давление в некоторой поступательно движущейся ограниченной области, термин "переменное давление" означает, что давление на свободной поверхности изменяется во времени и в пространстве.

В книгах [1–3] называются только три работы, в которых получены аналитические результаты, относящиеся к рассматриваемой проблеме [4–6]; в этих работах исследуются волны в случаях, когда давление  $P$  изменяется по закону частного вида. В [6], например,

$$t > 0, P(x, t) = P_0 \cos \omega t \quad |x| \leq a; \quad P = 0, \quad |x| > a$$

Здесь  $P_0 = \text{const}$ ,  $t$  – время, ось  $x$  – горизонтальна. Найдена асимптотическая формула, описывающая волну на свободной поверхности в области  $|x| \gg a$ . В [4, 5] давление задается столь же специфическими формулами. Существование более поздних аналитических результатов автором не установлено.

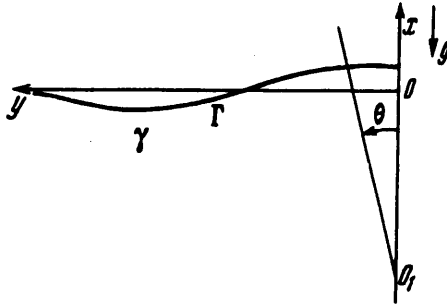
Методом, описанным в [7], ниже проводится аналитическое исследование волн, возбуждаемых переменным давлением достаточно общего вида.

**1. Постановка задачи. Основные уравнения.** Рассматриваются осесимметричные (с осью симметрии  $x$ ) течения идеальной несжимаемой однородной жидкости плотности  $\gamma$ . Сила тяжести направлена вниз вдоль оси  $x$  (фиг. 1). Жидкая поверхность  $\Gamma$  делит все неограниченное пространство на два полупространства: "верхнее", заполненное фиктивной жидкостью нулевой плотности, и "нижнее", заполненное охарактеризованной выше жидкостью плотности  $\gamma > 0$ .

Примем обозначения:  $x, y$  – декартовы координаты в меридиональной полуплоскости  $y > 0$ ;  $r, \theta, \phi$  – сферические координаты с полюсом  $o_1$ ;  $\phi = \text{const}$  – меридиональная полуплоскость;  $f < 0$  – вертикальная координата полюса  $o_1$  ( $f$  можно выбрать произвольно, но выбором  $f$  определяется горизонтальный масштаб задачи).

Пусть свободная поверхность  $\Gamma$  описывается параметрическими уравнениями  
 $x = W(\theta, t)$   $y = (W - f)\text{tg}\theta$

Соотношением  $x = \sigma + W(\theta, t)$  введем в меридиональной полуплоскости криволинейные координаты  $\sigma, \theta$  так, что свободная поверхность  $\Gamma$  описывается уравнением



Фиг. 1. Системы отсчета и схема течения

$\sigma = 0$  (жидкость занимает область  $\sigma < 0$ ). Введем обозначения для предельных значений любых функций  $F(\sigma, \theta, t)$ :

$$F_- = \lim_{\sigma \rightarrow -0} F(\sigma, \theta, t), \quad F_+ = \lim_{\sigma \rightarrow +0} F(\sigma, \theta, t)$$

Уравнения записываются в безразмерных переменных. Поскольку в задаче нет характерного линейного размера, размерная единица длины  $L$  выбирается произвольно, размерная единица времени  $T = \sqrt{L/g}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Безразмерное ускорение свободного падения равно единице.

Потенциал скорости представляется интегралом типа потенциала двойного слоя

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} A(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS \quad (1.1)$$

Здесь  $Q$  – точка на  $\Gamma$ ,  $M$  – точка в области  $\sigma < 0$  (внутри жидкости),  $r$  – расстояние  $|QM|$ .

Уравнение эволюции границы имеет вид [7]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_-} - D_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_-} \quad (1.2)$$

$$D = \frac{\cos \theta}{W - f}, \quad D_1 = \left( \sin \theta + D \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) D, \quad D_2 = 1 + (D_1 + D \sin \theta) \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

В области  $\sigma < 0$  интеграл Коши – Лагранжа связывает давление  $P$  и потенциал  $\Phi$ . Переходя к пределу при  $\sigma \rightarrow 0$ , из интеграла Коши – Лагранжа получим соотношение

$$P_-(\theta, t) = -\gamma \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r_-} - \frac{1}{2} D_2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_-} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( D \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_-} \right)^2 + W(\theta, t) \right] \quad (1.3)$$

К уравнениям (1.1) – (1.3) следует присоединить условие на свободной поверхности

$$P_- = P_+(x, y, t) = P^*(\theta, t; f) \quad (1.4)$$

где  $P^*(\theta, t; f)$  – заданная функция. Если жидкость покоится и свободная поверхность – горизонтальная плоскость, то  $P^* = 0$ . Из уравнений Эйлера в результате предельного

перехода от несжимаемой жидкости малой плотности к фиктивной жидкости нулевой плотности найдем, что давление на свободной поверхности не может зависеть от пространственных координат и, следовательно, это давление (даже изменяясь во времени) само по себе не может вывести жидкость из состояния покоя. Соглашаясь с условием (1.4), в котором  $P_+$  зависит от пространственного аргумента, мы тем самым предполагаем, что можно пренебречь влиянием волны на изменение давления на свободной поверхности. Это предположение допустимо, если плотность "верхней" фракции относительно мала и горизонтальный радиус области переменного давления значительно превосходит вертикальный размер волны. Последнее означает, что  $P_+(x, y, t)$  "слабо" зависит от вертикальной координаты  $x$  (в предельном случае – не зависит от  $x$ ).

Здесь предполагается, что давление на свободной поверхности обусловлено "компрессором" конечной мощности. Если  $dS$  – элемент площади свободной поверхности  $\Gamma$ , то  $P^*dS$  – сила давления, приложенная к элементу поверхности, и условие ограниченности мощности (учитывая оговоренные ниже граничные условия) можно записать в форме

$$\left| \iint_{\Gamma} P^* dS \right| = \left| 2\pi \int_0^{\pi/2} P^* \sqrt{D_2} [W(\theta, t) - f]^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \right| < +\infty$$

Отсюда следует, что

$$P^*(\theta, t; f) = \frac{\alpha \gamma}{f^2} \cos^3 \theta \cdot F(\theta, t; f) \quad (1.5)$$

где  $F(\theta, t; f)$  – безразмерная функция, ограниченная в области  $0 \leq \theta < \pi/2, t \geq 0$ .

Рассмотрим функции вида  $R(u, t)$  ( $|R| \leq 1$ ). Очевидно, семейство профилей  $P_+ = \alpha \gamma / f^2 R(-y/f, t)$  ( $|R| \leq 1$ ) с параметром  $f$  задает давление амплитуды  $\alpha \gamma / f^2$  в области, характерный горизонтальный размер которой растет с ростом  $|f|$ . В частности, если  $R(u, t) \equiv 0$  при  $u > 1$ , то в области  $y > -f$  давление  $P^* \equiv 0$ . Условие (1.4) выполнено, если  $R(u, t)$  с ростом  $u$  убывает не медленнее чем  $u^{-3}$ .

Функции  $A(\theta, t)$  и  $W(\theta, t)$  должны быть такими, чтобы производная  $\partial \Phi / \partial \theta_-$  была ограниченной и  $\partial \Phi / \partial \sigma_- \rightarrow 0$  при  $\cos \theta \rightarrow 0$ . Оценки показывают, что эти требования выполнены, если, например,

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 0} W = \lim_{\cos \theta \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0, \quad |A(\theta, t)| < c \cos^3 \theta$$

где  $c$  некоторая положительная, не зависящая от  $\theta$  величина. Сформулированные здесь условия означают, что на бесконечности жидкость покоится.

Равенства (1.1)–(1.4) представляют собой систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $A(\theta, t), W(\theta, t)$ . Решения этой системы определяют поля скоростей, которые (поля) в области  $\sigma < 0$  удовлетворяют уравнениям Эйлера. Смысл и происхождение такого рода уравнений обсуждаются, например, в [7].

Уравнения дополняются начальными условиями вида

$$t = 0, \quad A = A_0(\theta), \quad W = W_0(\theta)$$

Уравнения сохраняют силу на интервале  $t > 0$ , пока каждый луч  $\theta = \text{const}$  пересекает свободную поверхность  $\Gamma$  не более чем в одной точке.

**2. Волны, возбуждаемые протяженной областью переменного давления. Точное решение уравнений первого приближения.** Пусть начальные условия имеют вид  $t = 0, A = 0, W = 0$ , и в (1.5)  $F(\theta, t) \neq 0$  при  $t > 0$ . Это означает, что движение начинается из состояния покоя под действием переменного давления.

Амплитуда волны пропорциональна величине  $a/f^2$ , так что ее отношение к характерному горизонтальному размеру возмущенной области пропорционально параметру  $\epsilon = af^3$  [7]. Условию  $|\epsilon| \ll 1$  отвечают протяженные возмущения.

Пусть в (1.5)

$$F(\theta, t; f) = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(t; f)(2k+1)P_k(\cos 2\theta) \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |F_k(t; f)|(2k+1) < +\infty$$

Здесь  $P_k(x)$  – полиномы Лежандра;  $k$  – степень полинома,  $P_0 = 1$ ,  $P_1(x) = x$  [8].

Положив  $A = af^{-2}A^*$ ,  $W = af^{-2}W^*$ ,  $\Phi = af^{-2}\Phi^*$ , введем в уравнения (1.2), (1.3) параметр  $\epsilon$ . В случае  $|\epsilon| \ll 1$  решение задачи предлагается строить в виде рядов по степеням  $\epsilon$

$$W(\theta, t) = af^{-2}[W_0(\theta, t) + \epsilon W_1(\theta, t) + \epsilon^2 W_2(\theta, t) + \dots] \quad (2.2)$$

$$A(\theta, t) = af^{-2} \cos^3 \theta [A_0(\theta, t) + \epsilon A_1(\theta, t) + \epsilon^2 A_2(\theta, t) + \dots]$$

Техника построения такого рода рядов описана в [9,10].

Для первых членов рядов (2.2) имеют место следующие результаты:

$$W_0(\theta, t) = \cos^3 \theta \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(t)(2k+1)P_k(\cos 2\theta) \quad (2.3)$$

$$A_0(\theta, t) = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)(2k+1)P_k(\cos 2\theta)$$

Функции  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$  являются решением задачи Коши для счетной системы дифференциальных уравнений.

$$2a'_k(t) - b_k(t) = F_k(t) \quad (2.4)$$

$$|f|b'_k(t) + ka_{k-1} + (2k+1)a_k + (k+1)a_{k+1} = 0$$

$$a_k(0) = b_k(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Пусть для некоторого  $m$

$$F_m(t) = \alpha_m \cos(\Omega t) + \beta_m \sin(\Omega t), \quad (\alpha_m^2 + \beta_m^2 > 0), \quad F_k = 0 \quad (k \neq m) \quad (2.5)$$

Подстановкой в уравнения проверяется, что решение задачи (2.4), (2.5) дается формулами

$$b_k(t) = b_{km}(t), \quad a_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [b_{km}(t_1) + F_k(t_1)] dt_1$$

$$b_{km}(t) = \alpha_m c_{km}(\tau; \lambda) + \beta_m s_{km}(\tau; \lambda), \quad \tau = \nu t, \quad \Omega = \lambda \nu, \quad \nu = 1/\sqrt{2|f|} \quad (2.6)$$

$$c_{km}(\tau; \lambda) = (-1)^{k+m} 2 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} L_k(x^2) L_m(x^2) \frac{\cos(\lambda \tau) - \cos(x \tau)}{\lambda^2 - x^2} dx$$

$$s_{km}(\tau; \lambda) = (-1)^{k+m} 2 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} L_k(x^2) L_m(x^2) \frac{x \sin(\lambda \tau) - \lambda \sin(x \tau)}{\lambda^2 - x^2} dx$$

Здесь  $L_k(u)$  – полиномы Лагерра;  $k$  – степень полинома,  $L_0 = 1$ ,  $L_1(u) = 1 - u$  [8].

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{\partial s_{km}(\tau; \lambda)}{\partial \tau} = \lambda c_{km}(\tau; \lambda)$$

$$\frac{\partial c_{km}(\tau; \lambda)}{\partial \tau} = -\lambda s_{km}(\tau; \lambda) + (-1)^{k+m} \frac{d\mu_{km}(\tau)}{d\tau}$$

$$c_{km}(0; \lambda) = s_{km}(0; \lambda) = 0$$

$$\mu_{km}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} L_k(x^2) L_m(x^2) \cos(\tau x) dx$$

$$\mu_{kk}(0) = 1, \quad k \neq m, \quad \mu_{km}(0) = 0$$

Интегрируя последние уравнения, получим

$$c_{km}(\tau; \lambda) = (-1)^{k+m} [H_{km}(\tau; \lambda) \cos(\lambda \tau) + G_{km}(\tau; \lambda) \sin(\lambda \tau)] \quad (2.7)$$

$$s_{km}(\tau; \lambda) = (-1)^{k+m} [-G_{km}(\tau; \lambda) \cos(\lambda \tau) + H_{km}(\tau; \lambda) \sin(\lambda \tau)]$$

$$H_{km}(\tau; \lambda) = \int_0^{\tau} \mu'_{km}(\tau_1) \cos(\lambda \tau_1) d\tau_1, \quad G_{km}(\tau; \lambda) = \int_0^{\tau} \mu'_{km}(\tau_1) \sin(\lambda \tau_1) d\tau_1 \quad (2.8)$$

Система (2.4) линейна, поэтому для правых частей вида

$$F_k(t) = \sum_j (\alpha_{kj} \cos \Omega_j t + \beta_{kj} \sin \Omega_j t)$$

решение задачи (2.4) описывается формулами

$$b_k(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_{km}(t), \quad b_{km}(t) = \sum_j [\alpha_{mj} c_{km}(t; \lambda_j) + \beta_{mj} s_{km}(t; \lambda_j)] \quad (2.9)$$

$$v \lambda_j = \Omega_j, \quad \tau = vt, \quad v = 1 / \sqrt{2|f|}$$

В [11] изучаются свойства функций  $\mu_{km}(\tau)$ . В частности, найдено, что

$$\mu_{km}(\tau) = -\frac{1}{\tau^2} + o\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad \frac{d\mu_{km}}{d\tau} = \frac{2}{\tau^3} + o\left(\frac{1}{\tau^3}\right)$$

Отсюда следует, что существуют пределы

$$H_{km}^*(\lambda) = H_{km}(+\infty; \lambda), \quad G_{km}^*(\lambda) = G_{km}(+\infty; \lambda)$$

Если эти пределы подставить в (2.7) вместо  $H_{km}$  и  $G_{km}$ , то полученными выражениями будет описываться установившийся режим. Используя равенство

$$\frac{d\mu_{km}}{d\tau} = -\frac{2}{\tau} [k(\mu_{km} - \mu_{k-1,m}) + m(\mu_{k,m+1} - \mu_{km}) + \mu_{k,m+1}]$$

из (2.8) после интегрирования получим

$$G_{km}^*(\lambda) = -\pi \lambda^2 L_k(\lambda^2) L_m(\lambda^2) e^{-\lambda^2}$$

$$H_{km}^*(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} V_{km}(u) h(u; \lambda) du \quad (2.10)$$

$$V_{km} = \frac{d}{du} \left[ \sqrt{u} \frac{d}{du} (2u^{3/2} e^{-u} L_k(u) L_m(u)) \right]$$

$$h(u; \lambda) = (\lambda + \sqrt{u}) \ln |\lambda + \sqrt{u}| + (\lambda - \sqrt{u}) \ln |\lambda - \sqrt{u}| - 2\lambda \ln \lambda$$

Обобщение полученных результатов на случай давления с непрерывным частотным

спектром достаточно очевидно: если

$$F_k(t) = \int_0^{+\infty} [\alpha_k(\lambda) \cos(\lambda\tau) + \beta_k(\lambda) \sin(\lambda\tau)] d\lambda = F_k^*(\tau)$$

$$\tau = vt, \quad v = 1 / \sqrt{2|f|}$$

то решение задачи (2.4) имеет вид

$$b_k(t) = (-1)^k \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m b_{km}(\tau) \quad (2.11)$$

$$b_{km}(\tau) = \int_0^{+\infty} \alpha_k(\lambda) [H_{km}(\tau; \lambda) \cos(\lambda\tau) + G_{km}(\tau; \lambda) \sin(\lambda\tau)] d\lambda + \int_0^{+\infty} \beta_k(\lambda) [H_{km}(\tau; \lambda) \sin(\lambda\tau) - G_{km}(\tau; \lambda) \cos(\lambda\tau)] d\lambda$$

Отсюда, в силу (2.7) и (2.8), следует

$$b_{km}(\tau) = \int_0^{\tau} \mu'_{km}(\tau - \tau_1) F_m^*(\tau_1) d\tau_1$$

Последняя формула (вместе с (2.11)) определяет решение задачи (2.4) независимо от представимости функций  $F_k(t)$  интегралом Фурье.

Если в начальный момент внезапно прикладывается "неравномерное давление", т.е.  $t < 0, F_k = 0; t > 0, F_k = A_k = \text{const}$

то переходный процесс описывается формулами (2.11), где

$$b_{km}(\tau) = A_m [\mu_{km}(\tau) - \mu_{km}(0)], \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} b_k(t) = -A_k$$

и, следовательно, установившаяся форма свободной поверхности описывается уравнениями

$$x = -af^{-2} \cos^3 \theta \sum_{k=0}^{+\infty} A_k (2k+1) P_k(\cos 2\theta), \quad y = (x-f) \operatorname{tg} \theta$$

Последний результат вытекает также непосредственно из (2.4).

Нетрудно получить решение задачи в случае, когда  $F_m^*(\tau)$  – кусочно-постоянная функция. Требуемое при этом решение однородной системы, соответствующей (2.4), с ненулевыми начальными условиями, указано в [11].

**3. Функционал поглощения энергии.** Средняя мощность силы давления на временном интервале  $[0, t]$  дается формулой

$$N(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left[ - \int_{\Gamma} P q_n dS \right] dt \quad (3.1)$$

где  $dS$  – элемент площади свободной поверхности  $\Gamma$ ,  $q_n$  – нормальная к поверхности составляющая скорости жидкой частицы, находящейся на поверхности. С точностью до малых членов порядка  $\epsilon$  справедливы равенства

$$PdS = a\gamma \sin \theta \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(t; f) (2k+1) P_k(\cos 2\theta) d\theta d\phi \quad (3.2)$$

$$q_n = \frac{a}{f^2} \frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{a}{f^2} \cos^3 \theta \sum_{k=0}^{+\infty} b'_k(t) (2k+1) P_k(\cos 2\theta)$$

Последнее равенство следует из того, что жидкая частица, находящаяся на поверхности  $\Gamma$ , может двигаться нормально к поверхности только вместе с поверхностью (этого требует условие неразрывности жидкости).

Подставив (3.2) в (3.1) и проинтегрировав по  $\theta$  и  $\phi$  (с учетом ортогональности полиномов Лежандра), получим

$$N(t) = -\frac{a^2\gamma}{4f^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t F_k(t_1) B'(t_1) dt_1$$

$$B'(t_1) = kb'_{k-1}(t_1) + (2k+1)b'_k(t_1) + (k+1)b'_{k+1}(t_1)$$

Интегрируя по частям, найдем

$$N(t) = -\frac{a^2\gamma}{4f^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{t} F_k(t) B(t) - \frac{a^2\gamma}{4f^2} \sum_{k=0}^{+\infty} I_k(t)$$

$$I_k(t) = \frac{1}{t} \int_0^t F'_k(t_1) B(t_1) dt_1$$

$$N^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = -\frac{a^2\gamma}{4f^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} I_k(t)$$

Пусть  $F_k(t) = \alpha_k \cos(\lambda t) + \beta_k \sin(\lambda t)$ ,  $t = \tau \sqrt{2|f|}$ . Используя (2.7) – (2.9), свойства функций  $\mu_{km}(\tau)$  и полиномов Лагерра, найдем

$$N^* = -\pi \frac{a^2\gamma}{8f^2 \sqrt{2|f|}} V(\lambda) \quad (3.3)$$

$$V(\lambda) = \lambda^5 e^{-\lambda^2} \left[ \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k L_k(\lambda^2) \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \beta_k L_k(\lambda^2) \right)^2 \right]$$

Эта мощность поглощается жидкостью (в установившемся режиме).

Если  $F_m(t) = \alpha_m \cos(\lambda t) + \beta_m \sin(\lambda t)$  и  $F_k(t) = 0$  при  $k \neq m$ , то "парциальная" поглощаемая мощность за счет гармонического "входного" воздействия  $F_m$  равна

$$N_m = \pi \frac{a^2\gamma}{8f^2 \sqrt{2|f|}} \lambda^5 e^{-\lambda^2} L_m^2(\lambda^2) (\alpha_m^2 + \beta_m^2)$$

Формула (3.3) показывает, что мощность, поглощаемая за счет нескольких входных воздействий  $F_k$ , не равна сумме парциальных мощностей. Однако аддитивность поглощаемой мощности относительно спектра частот имеет место, т.е. если

$$F_k(t) = \sum_j (\alpha_{kj} \cos \Omega_j t + \beta_{kj} \sin \Omega_j t)$$

то поглощаемая мощность равна

$$N = \pi \frac{a^2\gamma}{8f^2 \sqrt{2|f|}} \sum_j V(\lambda_j), \quad \lambda_j = \frac{\Omega_j}{\sqrt{2|f|}} \quad (3.4)$$

Естественно назвать функционал (3.4) функционалом поглощения энергии.

Пусть  $0 < u_{k1} < u_{k2} < \dots < u_{kk}$  – нули полинома Лагерра  $L_k(u)$ . Если

$$F_k(t) = \sum_{j=1}^k [\alpha_{kj} \cos(\tau \sqrt{u_{kj}}) + \beta_{kj} \sin(\tau \sqrt{u_{kj}})]$$

то функционал поглощения равен нулю. Это означает, что в установившемся режиме волны не переносят энергию. Этим свойством обладают только стоячие волны.

**4. Стоячие волны.** Пусть для простоты

$$F_m(t) = \alpha_m \cos(\lambda t) + \beta_m \sin(\lambda t), \quad F_k(t) = 0 (k \neq m), \quad \lambda^2 = \lambda_{mi}^2 = u_{mi}^2 \quad (4.1)$$

Согласно известной теореме,  $L_m(u) = (u - u_{mi})R_{m-1}(u)$ , где  $R_{m-1}(u)$  – многочлен степени  $m - 1$ . Непосредственно из (2.6) находим

$$c_{km}(\tau; \lambda) = (-1)^{k+m} [\cos(\lambda \tau) I_1 + I_2] \quad (4.2)$$

$$s_{km}(\tau; \lambda) = (-1)^{k+m} [\sin(\lambda \tau) I_1 + \lambda I_3]$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} u e^{-u} L_k(u) R_{m-1}(u) du, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} u e^{-u} L_k(u) R_{m-1}(u) \cos(\tau \sqrt{u}) du$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} u e^{-u} L_k(u) R_{m-1}(u) \sin(\tau \sqrt{u}) du, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} I_2 = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} I_3 = 0$$

$$G_{km}^*(\lambda) = G_{km}(+\infty; \lambda) = 0, \quad H_{km}^*(\lambda) = H_{km}(+\infty; \lambda) = I_1 \quad (4.3)$$

Первое равенство (4.3) согласуется с (2.10). Из второго равенства (в силу ортогональности полиномов Лагерра) следует

$$H_{km}^*(\lambda) = -\delta_{km} - u_{km} \int_0^{+\infty} e^{-u} L_k(u) R_{m-1}(u) du \quad (4.4)$$

где  $\delta_{km}$  – символ Кронекера, и потому  $H_{km}^* = 0 (k > m)$ ;  $H_{mm}^* = -1$ . Таким образом, если давление дается формулой (4.1), то согласно (2.3), (2.7) в установившемся режиме

$$W_0(\theta, t) = W_0^*(\theta) F_m(t) \quad (4.5)$$

$$W_0^*(\theta) = \cos^3 \theta \sum_{k=0}^m (2k+1) H_{km}^*(\lambda_{mi}) P_k(\cos 2\theta)$$

Это означает, что свободная поверхность колеблется синхронно с внешним давлением

$$P^*(\theta, t; f) = \frac{\alpha \gamma}{f^2} \cos^3 \theta (2m+1) P_m(\cos 2\theta) F_m(t)$$

На поверхности устанавливается стоячая волна, узлы которой определяются уравнением  $W_0^*(\theta) = 0$

Параметры  $H_{km}^*$  стоячей волны (4.5) можно найти, не используя формулы (4.4). Система уравнений (2.4) при условии (4.1) имеет частное решение вида  $b_k = H_{km}^* F_m(t)$ ,  $b_k = 0$  для  $k > m$ . Подставляя эти выражения в (2.4), получим

$$H_{mm}^*(\lambda_{mi}) = -1, \quad H_{m-1,m}^* = -\frac{1}{m} u_{mi} \quad (4.6)$$

$$k H_{k-1,m}^* + (2k+1 - u_{mi}) H_{km}^* + (k+1) H_{k+1,m}^*(\lambda_{mi}) = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, m-1)$$



*Пример 1.* Пусть  $F_1(t) = \sin \Omega t$ ,  $L_1(u) = 1 - u$ , и, следовательно,  $\lambda^2 = u_{11} = 1$ ,  $\Omega^2 = 1 / (2|f|)$ ,  $\tau = \Omega t$ . Давление и форма стоячей волны задаются соотношениями

$$P^*(\theta, t) = \frac{a\gamma}{f^2} \sin \tau \cdot B(\theta), \quad B(\theta) = \cos^3 \theta \cdot \cos 2\theta$$

$$x = \frac{a}{f^2} \sin \tau B_0(\theta), \quad y = (x - f) \operatorname{tg} \theta, \quad B_0(\theta) = -\cos^3 \theta (1 + 3 \cos 2\theta)$$

Узел давления лежит на луче  $\theta = \pi/4$ , узел волны – на луче  $\theta = \theta_1$ ,  $\operatorname{tg} \theta_1 = \sqrt{2}$  ( $x = 0$ ,  $y = -f\sqrt{2}$ ).

*Пример 2.* Пусть давление задается формулой

$$P^*(\theta, t) = \frac{a\gamma}{f^2} 5 \cos^3 \theta P_2(\cos 2\theta) F_2(t)$$

$$F_2(t) = \beta_1 \sin(\Omega_1 t) + \beta_2 \sin(\Omega_2 t)$$

$$\Omega_1^2 = \frac{u_1}{2|f|}, \quad \Omega_2^2 = \frac{u_2}{2|f|}, \quad u_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad u_2 = 2 + \sqrt{2}$$

Здесь  $u_1, u_2$  – нули полинома  $L_2(u) = 0,5u^2 - 2u + 1$ ,  $2P_2(u) = 3u^2 - 1$ .

Заданным давлением возбуждаются совместно две стоячие волны, отвечающие значениям  $\lambda_1 = \sqrt{u_1}$  и  $\lambda_2 = \sqrt{u_2}$ . И формулы (4.4), и формулы (4.6) дают

$$H_{22}^*(\lambda_1) = H_{22}^*(\lambda_2) = -1, \quad 2H_{02}^*(\lambda_1) = -2H_{02}^*(\lambda_2) = \sqrt{2}$$

$$2H_{12}^*(\lambda_1) = -2 + \sqrt{2}, \quad 2H_{12}^*(\lambda_2) = -2 - \sqrt{2}, \quad k \geq 3, \quad H_{k2}^* = 0$$

$$b_k(t) = (-1)^k [\beta_1 \sin \Omega_1 t H_{k2}^*(\lambda_1) + \beta_2 \sin \Omega_2 t H_{k2}^*(\lambda_2)]$$

Уравнения свободной поверхности отыскиваются в виде

$$x = \frac{a}{f^2} W_0(\theta, t), \quad y = (x - f) \operatorname{tg} \theta$$

$$W_0 = \beta_1 \sin(\Omega_1 t) B_1(\theta) + \beta_2 \sin(\Omega_2 t) B_2(\theta) \quad (4.7)$$

$$2B_1(\theta) = \cos^3 \theta [5 + \sqrt{2} + 3(2 - \sqrt{2}) \cos(2\theta) - 15 \cos^2(2\theta)]$$

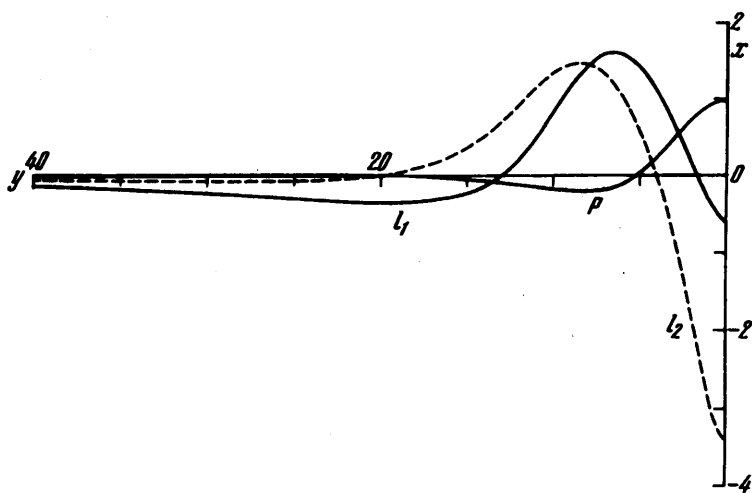
$$2B_2(\theta) = \cos^3 \theta [5 - \sqrt{2} + 3(2 + \sqrt{2}) \cos(2\theta) - 15 \cos^2(2\theta)]$$

На фиг. 2 представлены кривые

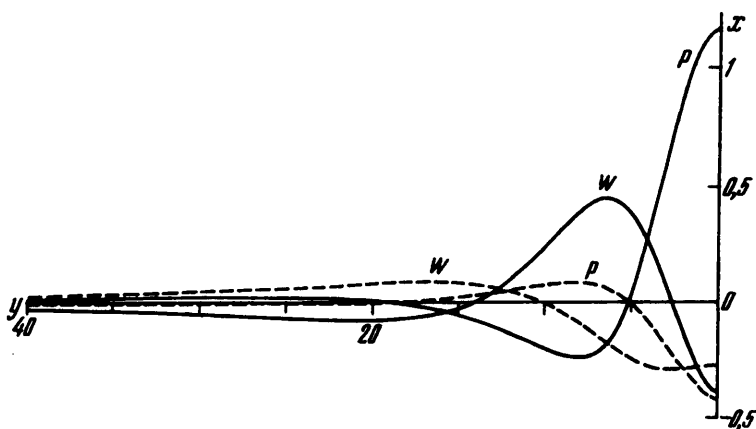
$$l_0: x = \cos^3 \theta P_2(\cos 2\theta), \quad l_1: x = B_1(\theta), \quad l_2: x = B_2(\theta)$$

$$l_0, l_1, l_2: y = (x - f) \operatorname{tg} \theta$$

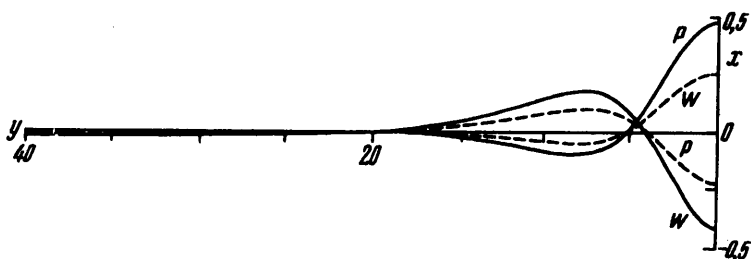
Кривые  $l_1$  (показана штриховой линией) и  $l_2$  изображают профили соответствующих стоячих волн (при фазе  $\pi/2$ ). Кривая  $l_0$  (на фигуре отмечена буквой  $P$ ) изображает профиль давления. На фиг. 3–5 представлены кривые, построенные по формулам (4.7) для  $f = -10$ ,  $a = 25$ ,  $\beta_1 = \sin \alpha$ ,  $\beta_2 = \cos \alpha$ ,  $\alpha = \pi/6$  в моменты времени  $\tau_k = k\Delta\tau$ ,  $\Delta\tau = \pi / (2\lambda_2)$  – четверть периода "быстрой" стоячей волны (с большей частотой),  $k = 1, 3$  (фиг. 3),  $k = 2, 4$  (фиг. 4),  $k = 5, 7$  (фиг. 5). Кривые изображают профили давления ( $P$ ) и свободной поверхности ( $W$ ) в указанные моменты времени. Значениям  $k = 1, 2, 5$  отвечают пары сплошных линий  $P$  и  $W$ ; значениям  $k = 3, 4, 7$  – пары штриховых линий. Два профиля (сплошной и штриховой) на одной фигуре разделены во времени интервалом  $2\Delta\tau$ . Сплошные (штриховые) кривые для  $k = 1(3)$  и  $k = 5(7)$  разделены интервалом в период  $4\Delta\tau$  "быстрой" стоячей волны. При пост-



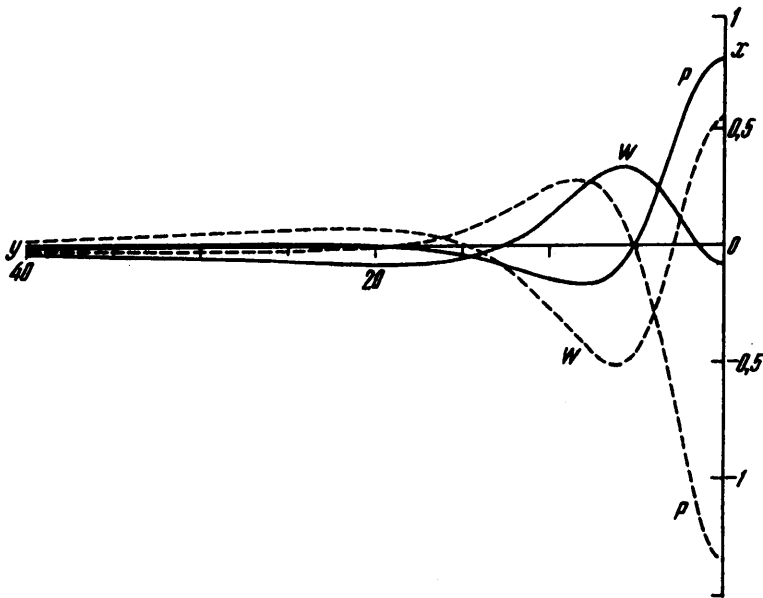
Фиг. 2. Профили давления ( $P$ ) и возбуждаемых давлением двух стоячих волн:  $l_1$  – (штриховая линия) и  $l_2$  – (сплошная линия)



Фиг. 3. Профили давления ( $P$ ) и свободной поверхности ( $W$ ) при  $k = 1$  (сплошные линии) и  $k = 3$  (штриховые линии)



Фиг. 4. Профили давления ( $P$ ) и свободной поверхности ( $W$ ) при  $k = 2$  (сплошные линии) и  $k = 4$  (штриховые линии)



Фиг. 5. Профили давления ( $P$ ) и свободной поверхности ( $W$ ) при  $k = 5$  (сплошные линии) и  $k = 7$  (штриховые линии)

роении профилей давления опущен множитель  $5\alpha\gamma/f^2$ . Если  $k = 2$  или  $k = 4$ , то  $\sin(\lambda_2\tau) = 0$  и соответствующие кривые на фиг. 4 представляют стоячую волну, отвечающую значению  $\lambda_1$ . Кривые на фиг. 3 и 5 демонстрируют существование переменного сдвига фазы между давлением и волной на свободной поверхности.

**Заключение.** В установившемся режиме волна (3.3), возбуждаемая давлением, описываемым почти-периодической функцией с достаточно богатым частотным спектром, представляет собой суперпозицию стоячих и бегущих волн. Спектр стоячих волн дискретен; возможный спектр бегущих волн – непрерывен. Частотный спектр стоячих волн дается формулами  $\Omega = \Omega_{kj} = \lambda_{kj} / \sqrt{2l f l}$ ,  $\lambda_{kj}^2 = u_{kj}$ ,  $u_{kj}$  – нули полиномов Лагерра  $L_k(u)$  ( $k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, k$ ). Спектр имеет точку сгущения  $\Omega = 0$ . Чтобы возбуждалась стоячая волна, недостаточно, чтобы давление содержало гармонику частоты  $\Omega_{kj}$ ; необходимо также, чтобы эта гармоника содержалась во входном воздействии  $F_k(t)$ . На частотах, достаточно близких к  $\Omega_{kj}$  (если такие составляющие содержатся в  $F_k$ ), возбуждаются волны, "почти" не переносящие энергию, т.е. "почти стоячие". Если  $u_*$  – точка локального экстремума многочлена  $L_k(u)$ , то волна с частотой  $\Omega = \sqrt{u_*} / (2l f l)$  уносит энергию (в бесконечность) более интенсивно, чем волна с близкой частотой (и той же амплитудой). Таким образом, структура волны, возбуждаемой переменным давлением, определяется не только частотным спектром давления, но и спектральным составом "входных воздействий"  $F_k(t)$ . Большим значениям  $k$  отвечают мелкомасштабные изменения давления и возбуждаемой волны: чем больше  $k$ , тем больше число нулей многочлена  $P_k(u)$ , и тем "изрезаннее" профили составляющих давления и волны.

Для плоского течения автором получены и будут представлены позднее аналогичные результаты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкесов Л.В. Неустановившиеся волны. Киев: Наук. думка, 1970. 196 с.
2. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. Киев: Наук. думка, 1980. 259 с.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
4. Сретенский Л.Н. О направленном излучении волн из области, подверженной внешнему давлению // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 349–361.
5. Войт С.С. Волны на поверхности жидкости, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 1. С. 21–26.
6. Стокер Д.Д. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
7. Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые начальным возмущением горизонтальной границы раздела // Изв. АН. МЖГ. 1994. № 3. С. 135–143.
8. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
9. Миндлин И.М. О вихрях в неограниченной идеальной жидкости. Горький: Горьк. политехн. ин-т, 1982. 38 с. Деп. в ВИНТИ 24.06.82. № 3269–82.
10. Миндлин И.М. Новый метод в нелинейных задачах о волнах в тяжелой слоистой жидкости, возбуждаемых вертикально движущимся твердым телом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 151–160.
11. Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые протяженным начальным возмущением горизонтальной границы раздела. Точное решение // Изв. АН. МЖГ. 1995. № 6. С. 165–168.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию  
19.IV.1995