

УДК 532.529.6

© 1996 г. П.К. ВОЛКОВ

ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

В работе на основе численного решения уравнений Навье – Стокса исследуется гидродинамика и диффузия примеси около одиночного пузыря, моделирующего всплытие цепочки одинаковых пузырей и системы регулярно расположенных в области одинаковых по объему пузырей. Данные приводятся относительно одной конкретной жидкости. Получено, что максимальные значения скорости жидкости на пузыре практически одинаковы для равных по размеру пузырей в обоих случаях, несмотря на существенно большую скорость всплытия в цепочке. Стационарная диффузия примеси от пузыря оказалась также примерно одинаковой.

Применительно к задаче барботажа газовых пузырей через слой жидкости показано, что при регулярном расположении пузырей, диаметр которых сравним с капиллярной постоянной жидкости, суммарная диффузия примеси наибольшая. При этом обтекание около пузыря еще безотрывное, но значения гидродинамических параметров не являются малыми.

Математически строгое полное исследование локальных гидродинамических характеристик двухфазной среды, например жидкости с всплывающими пузырьками газа, представляется практически безнадежным делом. Это связано с тем, что включения – пузырьки – имеют разный объем, причудливые формы, разнообразное взаимное расположение. Даже если удастся создать пузырьки одного размера и определенной "фиксированной во времени упаковкой", то и в этом детерминированном случае остается большой произвол в описании такой среды: одно и то же газосодержание в жидкости может быть получено пузырьками одинакового объема бесчисленным числом способов при непрерывном уменьшении размера пузырька с одновременным пропорциональным увеличением числа их. Взаимодействие пузырей в ансамбле может приводить как к ускорению скорости всплытия их, так и к замедлению. Без знания общих закономерностей гидродинамики около пузырей невозможно получить математическую модель смеси, адекватно отражающую ее структуру и состав.

Для практических задач, например распространения тепла или примеси, важно знать, при каких размерах пузырей и их расположении можно ожидать наибольший эффект. Целенаправленное исследование и определение путей интенсификации процессов при точном учете гидродинамики течения возможны, если смоделировать две различные гидродинамические ситуации, рассчитать их и сопоставить решения.

Наиболее сложно в математической модели учесть взаимодействие с соседними окружающими пузырями (частицами). Решение этой задачи можно разделить на две части: а) изучение влияния пузырей, расположенных перед и за рассматриваемым; б) моделирование взаимодействия рассматриваемого пузыря с окружающими "на одном уровне". Содержание этих задач и дает два предельных случая, сопоставление решений которых позволяет определить относительную степень влияния соседних пузырей.

Простейшая попытка определить взаимовлияние частиц – решение задачи о продольном обтекании двух частиц одинакового [1, 2] или разного [3] радиуса. В рамках

принятой модели имеется явно выраженное направление взаимодействия, что должно приводить к нестационарному движению: частицы должны либо разойтись, либо соединиться. Введение в рассмотрение третьей частицы и тем самым учет наличия возмущений как спереди, так и сзади рассматриваемой частицы делает алгоритм решения практически нереализуемым.

Более глубокое содержание с попыткой учета взаимодействия с окружающими пузырями имеется в модели ячейки двухфазной среды [4]. При барботаже газа в жидкость через дырчатый лист наблюдаются режимы, когда всплывающие в жидкости пузыри "в среднем" распределены равномерно, не имеют каких-либо значительных флуктуаций [5]. Поэтому появилась идея выделить некоторый объем, содержащий один пузырек, и попытаться описать движение жидкости в этой ячейке. Первая трудность состоит в обосновании и выборе формы ячейки, вторая – в постановке краевых условий на ее границе, учитывающих взаимодействие пузырей с несущей средой и между собой. Имеющиеся решения, в силу сложности задачи, ограничивались простейшими конструкциями: ячейка и пузырек – сферические, течение около пузыря – стоковое; на границе ячейки потоки массы, импульса и энергии равны нулю. Отсюда определяли радиус ячейки и эффективную скорость всплытия пузырей [4]. В этом случае на самом деле также не учитывается реальное взаимодействие пузырей в смеси, поскольку они всплывают вследствие перетока жидкости за пузырь, а значит, имеются потоки массы, импульса, энергии через ячейку.

Только с решением периодической задачи [6] применительно к обтеканию цепочки пузырей одного размера, появилась настоящая возможность учсть реальное взаимодействие пузырей, всплывающих один за другим. Сочетание периодической задачи с использованием идеи ячейки дает математическую модель, в которой возможно учсть влияние соседних пузырей по вертикали и в слое. Для смеси жидкости с регулярно расположенными пузырями удается решить задачу и получить полную информацию о структуре течений, скорости всплытия пузырей и их форме. Сравнение решений для одной и той же жидкости и размерам пузырей, полученных для случаев цепочки и ячейки, позволяет проследить индивидуальные особенности взаимовлияния пузырей по вертикали и в горизонтальном слое. Это и является целью настоящей работы.

1. Физическая постановка задачи. Рассмотрим смесь жидкости с пузырями газа одного объема V , расположенных слоями на расстоянии $2l$ – динамический слой [5], наблюдаемый, например, при барботаже газа в жидкость через перфорированную пластинку. Распределение пузырей в слоях таково, что если провести вертикальную прямую через центр какого-нибудь пузыря, то получится цепочка нанизанных пузырей. В слое пузыри упорядочены и образуют гексагональную упаковку, когда каждый окружен шестью другими такого же размера. Расстояние между центрами их дает еще один геометрический параметр $2R_k$. В этом случае в качестве элементарной ячейки двухфазной среды, содержащей внутри один пузырек, естественно выбрать прямую призму высотой $2l$ с основанием в виде правильного шестиугольника. Такие ячейки сплошным образом заполняют всю область течения.

Данная модель дает нижнюю оценку для скорости всплытия пузырей, поскольку при любом другом расположении их (чуть выше или ниже слоя) переток жидкости за пузырь сверху вниз, в результате которого и происходит всплытие, будет более легким. Такое состояние, конечно, в точности не реализуется, поскольку пузыри при всплытии на достаточно большом расстоянии увеличивают свой объем. Однако для динамического слоя пузырей толщиной h , расположенного далеко под свободной поверхностью, увеличение объема пузыря будет небольшим пока изменение гидростатического давления по мере всплытия мало по сравнению с давлением "на уровне слоя". Эти условия заведомо выполняются для достаточно маленьких пузырей.

В силу выбора ячейки на верхнем и нижнем основаниях призмы характеристики должны быть одними и теми же. Через боковую поверхность не должно быть перетоков и на ней отсутствует касательное напряжение, т.е. эта поверхность является "свободной". В системе координат, связанной с центром масс какого-нибудь пузыря,

жидкость обтекает пузырь, и для описания динамики всей системы достаточно рассмотреть задачу обтекания одного пузыря в ячейке с соответствующими условиями периодичности на верхнем и нижнем основаниях, непротекания и отсутствия трения на боковой поверхности. Эта стационарная задача обтекания может быть решена точно. Степень соответствия ее решений с решениями исходной задачи определяется оговоренными выше предположениями о росте пузыря по мере его всплытия.

Сделаем последнее допущение, сводящее задачу к двумерной, осесимметричной. При численных решениях будем использовать ячейку цилиндрической формы с радиусом основания R_k . Степень корректности этого предположения оценить трудно. По сути происходит "снос" краевых условий с боковой поверхности правильной призмы на боковую поверхность вписанного цилиндра. Такие процедуры сноса краевых условий на некоторую известную линию или поверхность часто используются при получении различных приближенных моделей.

2. Математическая формулировка задачи. В качестве математической модели будем использовать уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + g x_3 \right) = \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ – вектор скорости жидкости в точке с координатой \mathbf{x} в момент времени t , $p(t, \mathbf{x})$ – давление в жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, ρ – плотность, g – ускорение силы тяжести, x_3 – направление всплытия.

На свободной границе пузыря Γ ($F(t, \mathbf{x}) = 0$) должны быть выполнены кинематическое и динамические условия

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla F = 0 \quad (2.3)$$

$$\tau T \mathbf{n} = 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{n} T \mathbf{n} = \sigma K - p_g + p_\infty \quad (2.5)$$

$$\left(T_{ij} = -p \delta_{ij} + \rho v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

Здесь \mathbf{n} , τ – единичные векторы нормали и касательной Γ ; p_g – давление газа в пузыре ($p_g \equiv \text{const}$); T – тензор напряжений; K – кривизна Γ ; p_∞ – давление на внешней границе ячейки "на уровне пузыря"; σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

На боковой поверхности ячейки должны быть выполнены условия вида (2.3)–(2.4).

На верхнем и нижнем основаниях ячейки условия периодичности отражают тот факт, что значения функций скорости, давления и их производных по нормали совпадают.

В случае стационарного всплытия газовой полости в покоящейся на бесконечности вязкой жидкости для $F(t, \mathbf{x}) = x_3 - f(t, x_1, x_2) = 0$ имеем $\partial f / \partial t = \text{const} = U$, которую называют скоростью всплытия пузыря. Уравнения (2.1) в системе координат, "связанной с пузырем", становятся стационарными. Введем сферическую систему координат (r, θ, ϕ) с началом O в центре масс пузыря и перейдем от переменных скорости \mathbf{v} и давления p к функции тока ψ и завихренности ω . Поскольку в рассматриваемой модели ячейки по сравнению с [6] изменяется лишь одно из условий на боковой поверхности, выпишем только их.

Условие непротекания на боковой поверхности ячейки дает в системе координат неподвижной жидкости постоянное значение $\psi = 0$, так как нет суммарного расхода

жидкости через сечение, где нет пузыря. В системе координат пузыря на поле течения наложено поступательное движение со скоростью минус U , которое в сферических координатах (r, θ) описывается функцией $\psi = -Ur^2 \sin^2\theta/2$. Поскольку уравнение боковой поверхности $r = R/\sin \theta$,

$$\psi = -UR^2/2 \quad (2.6)$$

Из равенства нулю касательных напряжений с учетом (2.6) можно получить условие для вихря ω , которое по виду совпадает с выражением для ω на свободной поверхности пузыря [7], где под $R(\theta)$ следует понимать функцию боковой поверхности. Таким образом, на боковой поверхности ячейки получены "хорошие" условия для функций ψ, ω .

Переход к функциям ϕ, ω не исключил полностью функцию давления p , как это имеет место в случаях с заданной границей. Давление в жидкости на свободной поверхности входит в краевое условие (2.5), поэтому константу p_∞ нет смысла принимать равной нулю или какому-то другому конкретному значению, ибо существует поверхность пузыря, на которой задано термодинамическое давление газа p_g . Взаимодействие разности давлений $p_g - p_\infty$ с поверхностным натяжением σ управляет размером пузыря.

3. Анализ размерностей. Задача стационарного обтекания пузыря (2.1) – (2.6) содержит пять независимых физических параметров (скорость всплытия U заранее не известна):

$$\rho, v, \sigma, g, p_g - p_\infty \quad (3.1)$$

Из теории размерностей [8] следует, что решение зависит от двух независимых безразмерных комплексов. Учитывая геометрию ячейки, добавим еще два геометрических параметра.

Способы обезразмеривания могут быть различными. В эксперименте, как правило, задают объем пузыря V (а значит, некоторый линейный размер $a = \sqrt[3]{3V/4\pi}$). Кроме того, поскольку в условие (2.6) входит U , удобно в качестве характерных размера L и скорости v брать $2a$ и U . Следует помнить, что в (3.1) какие-то два параметра станут определяемыми. В данной работе это будут g и $p_g - p_\infty$.

Проведя обезразмеривание, получим следующие параметры в уравнениях [7]:

$$Re = \frac{\nu L}{v}, \quad We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}, \quad Fr = \frac{v^2}{gL}, \quad Pd = \frac{(p_g - p_\infty)L}{\sigma}$$

– числа Рейнольдса, Вебера, Фруда и безразмерная разность давлений. Имеем четыре безразмерных комплекса (два геометрических параметра входят в описание оснований ячейки и боковой поверхности). Согласно анализу размерностей, независимыми могут быть только два – примем здесь Re, We . Оставшиеся – Fr и Pd – являются определяемыми и должны быть вычислены одновременно с функциями течения, используя предположения о заданных объеме и скорости всплытия.

Коэффициент сопротивления C_d обычно определяется как отношение силы сопротивления к динамическому напору. Для стационарно вспывающего пузыря сила сопротивления равна архimedовой, и нахождение числа Фруда эквивалентно вычислению C_d .

Для представления данных используются также параметры

$$E = \frac{\rho g(2a)^2}{\sigma} = \frac{We}{Fr}, \quad M = \frac{g\rho^3 v^4}{\sigma^3} = \frac{We^3}{Re^4 Fr}$$

$$N_v = U^4 \sqrt{\rho/g\sigma} = \sqrt[4]{We Fr}, \quad N_b = \sqrt{E}, \quad Cd = \frac{\rho V g}{\frac{1}{2} \rho v^2 \pi a^2}$$

Число Eotvos'a E [9, 10], совпадающее с числом Бонда, не зависит от скорости всплытия U . Число Мортоне M [10–12] не содержит ни размера пузыря a , ни U . Числа N_v и N_b [11] включают в себя по отдельности только U или a . Здесь $Cd = 4/3Fr$.

Наиболее удобным параметром, характеризующим среду, является M , поскольку содержит все размерные физические константы жидкости. ($M = Ag^{-2}$, где Ag – модифицированное число Архимеда [5], когда в качестве характерной длины взята капиллярная постоянная Лапласа, и $M = Fi^{-1}$, где Fi – пленочное число, выведенное Капицей [13] при исследовании тонких стекающих пленок жидкости.) Из определения M следует, что нельзя получить решение для наперед заданной жидкости при заданных Re и We .

Обобщение результатов осуществляется построением различных зависимостей от указанных параметров. Представления типа $Cd(Re)$ или $Cd(We)$ дают содержательную информацию, если решения зависят только от одного гидродинамического параметра (иногда говорят, "имеется автомодельность" относительно одного параметра). В противном случае необходимо устанавливать соответствие со средой, чтобы не получить ошибочных выводов. Так, по отношению к всплывающему пузырю жидкости можно разделить на два класса [12]: высокомортоновские (с большими значениями M), в которых скорость всплытия пузыря монотонно растет с увеличением его размера, и низкомортоновские – здесь зависимость скорости всплытия от объема пузыря имеет локальные максимум и минимум. (Коэффициент сопротивления Cd имеет тот же характер поведения.) В [10] в качестве граничного значения принято $M = 4 \cdot 10^{-3}$.

Построение двумерных карт режимов течений в координатах с Re , We , E , N_v , N_b имеет неудобства, поскольку эти параметры содержат характерный размер и скорость всплытия. Наиболее удачными для этой цели оказались параметры $R_\sigma = a / \sqrt{\sigma / \rho g}$,

$R_v = a / \sqrt{v^2 / g}$ [14]. Поскольку $(R_\sigma / R_v)^6 = M$, данные для каждой среды всплытия изображаются на диаграмме с координатами R_σ , R_v на прямой линии, наклон которой определяется величиной M . Построив линии $Fr = \text{const}$, легко найти скорость всплытия пузыря заданного размера в конкретной жидкости и проследить особенности течений для разных сред [15]. Связь параметров будет такой

$$R_\sigma = (We / 4Fr)^{1/2} = \sqrt{E} / 2, \quad R_v = (Re^2 / 8Fr)^{1/3} \quad (3.2)$$

Величина $\delta_\sigma = \sqrt{\sigma / \rho g}$, входящая в определение R_σ , называется капиллярной постоянной жидкости, характеризует баланс сил тяжести и поверхностного натяжения и является важной линейной характеристикой гидродинамических процессов.

Алгоритм решения задачи (2.1)–(2.6) в целом тот же, что и в [6], поскольку на боковой поверхности имеем заданные искомые функции (как и в [6]). Так как граница имеет углы, то функция, описывающая ее, негладкая: первая и вторая производные имеют скачки в угловых точках. Это требует пристального внимания к результатам расчетов в связи с ухудшением точности конечноразностной аппроксимации уравнений Навье – Стокса, записанных в криволинейной системе координат. Простейший способ избежания указанной неприятности – увеличение числа расчетных точек в области течения. В данной работе использовалась равномерная сетка с 50 узлами по "углу" θ и 61 по переменной r . Для некоторых геометрий ячеек с $l < R_k$ этого оказалось недостаточно: величина Fr была слишком большой (наблюдалось и для гладких границ).

Осталось решить вопрос о "начальном" размере пузыря. Из (2.5) при $We = 0$ следует решение $K = Pd$, т.е. кривизна поверхности постоянна, а значит, это – сфера – для любых значений Re . Из соотношения $2/R_0 = Pd$ следует, что радиус сферы $R_0 = 2/Pd$. Величина Pd должна быть определена одновременно с функциями течения и может быть вычислена, поскольку известен способ расчета давления. Однако это неудобно. Зададим Pd так, чтобы $R_0 \equiv 2$. Это эквивалентно выбору характерного масштаба $l = \sigma/(p_g - p_\infty)$ вместо L при сохранении всех предыдущих рассуждений. При

в этом параметры Re , We , Fr легко пересчитываются ($Re = U2a/v = Ul/v(2a/l) = 4Ul/v = 4Re_1$, так как принято $a/l = R_0 \equiv 2$, и т.д.).

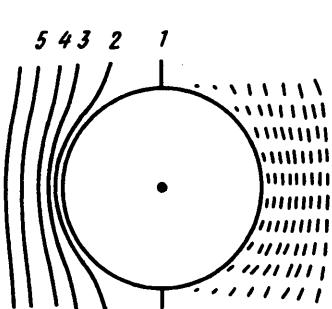
4. Динамика одиночных цепочек пузырей. При больших R_k краевые условия на боковой поверхности ячейки эквивалентны условиям невозмущенного потока, которые и моделируют одиночную цепочку пузырьков. Как показывают расчеты [16], для одиночного пузыря условие прилипания и условие равномерности потока на внешней границе области течения дают разницу в решениях менее 20% для $Re > 1$, если ставятся на расстоянии от оси симметрии в 5 радиусов пузыря. Можно ожидать, что и в данном случае эта оценка окажется хорошей.

Решение задачи определяется тремя безразмерными параметрами: числами Рейнольдса Re , Вебера We и расстоянием между центрами пузырей $2l$. При достаточно больших l условия периодичности автоматически удовлетворяются (когда поток не возмущен). Таким образом, для некоторых Re , We решения должны совпадать с расчетами одиночного пузыря (слабое влияние одного пузыря на другой) [7]. Более того, теперь можно найти расстояние l , на которое можно сносить краевые условия невозмущенного потока из "бесконечности" в случае одиночного пузыря. Для $Re \leq 200$ и больших деформаций пузыря оказалось достаточным $l = 20$, даже когда имеется интенсивный тороидальный вихрь, при этом значения Fr были близкими, несмотря на разницу в длине застойных зон. Это объясняется тем, что величина Fr определяется по решению вблизи пузыря. Если форма его и точка отрыва потока найдены достаточно точно, получаются хорошими совпадения по Fr . Длина следа в большей степени зависит от величины расчетной области и краевые условия невозмущенного потока, снесенные на конечное расстояние от пузыря, способны уменьшить зону возвратного течения.

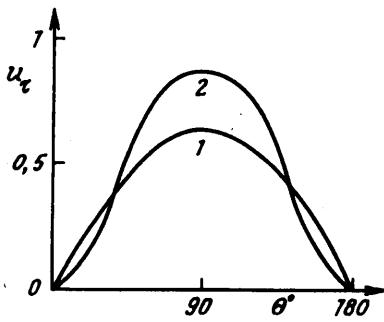
Проводя расчеты при заданных Re и We с меньшими l , можно получить чрезвычайно большой объем информации, описывающей всплытие цепочек пузырей в различных жидкостях. Однако это трудоемкая работа, поскольку для составления только одной подробной карты режимов при заданном l требуется большое количество просчетов по Re и We , пересчет их по (3.2) в координаты R_σ , R_v , построение изолиний $Fr = \text{const}$, анализ структур течений. Поэтому в данной работе для выбранной жидкости и величины пузырьков a исследуются скорость их всплытия в цепочке с разными l и особенности течений. В качестве характеристики среды используется M и взята жидкость с $M \approx 2 \cdot 10^{-6}$ (такое значение M имеет, например, ~55%-ный водный раствор глицерина). Для a брались три значения: 0,1 δ_0 ; 0,5 δ_0 ; 1,0 δ_0 ; т.е. данные приводятся для $R_\sigma = 0,1$; 0,5; 1; $R_v = 0,9$; 4,5; 9 соответственно. Величина l изменялась от 20 до 2,5 – от состояния одиночного пузыря, до цепочки пузырьков с расстоянием между ними в половину радиуса.

Таблица 1

l	20	9	6	3	2,75	2,5
$R_\sigma = 0,1$						
Fr	0,06	0,05	0,04	0,033	0,035	0,028
Re	0,4	0,4	0,31	0,31	0,31	0,28
We	0,001	0,001	0,001	0,001	0,0007	0,0006
$R_\sigma = 0,5$						
Fr	2,2	2,35	2,46	2,7	2,9	2,35
Re	28	29	30	31	32	30
We	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,28
$R_\sigma = 1,0$						
Fr	2,7	3,37	4,0	4,83	5,6	4,15
Re	90	100	110	120	130	110
We	6,2	7,7	9,0	10,5	12,0	8,56



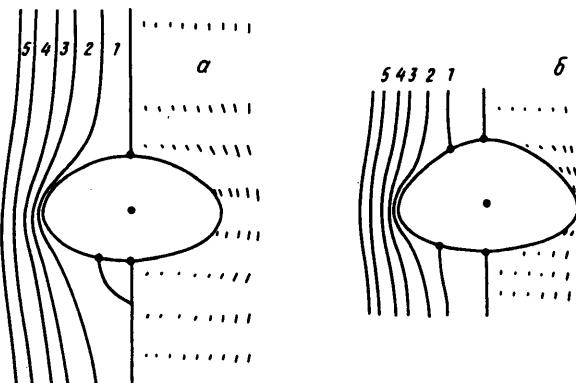
Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Картина течения около отдельного пузыря в цепочке. Радиус пузыря $a = 0,1\delta_\sigma$; расстояние между центрами $l_p = 0,25\delta_\sigma$. Номера 1, 2, 3, 4, 5 здесь и далее на фиг. 3 и 6 соответствуют изолиниям функции тока со значениями 0, -0,5, -1, -2, -3

Фиг. 2. Скорость жидкости вдоль пузыря в цепочке ($a = 0,1\delta_\sigma$). 1 – расстояние между центрами $l_p = 0,9\delta_\sigma$; 2 – $l_p = 0,25\delta_\sigma$



Фиг. 3. Картина течения около отдельного пузыря в цепочке. Радиус пузыря $a = \delta_\sigma$; расстояние между центрами: $a - l_p = 6\delta_\sigma$, $b - l_p = 3\delta_\sigma$

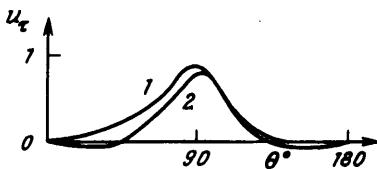
Результаты расчетов приведены в табл. 1, где вторая и третья строки задают Re и We , при которых получаются решения для среды с $M = 2 \cdot 10^{-6}$ и указанным значением R_σ , в первой строке – найденные значения Fr .

При $R_\sigma = 0,1$ для всех l пузырьки сферические, обтекание безотрывное. Величина Fr очень маленькая, с уменьшением l убывает. Таким образом, скорость всplытия очень маленьких пузырей в цепочке падает с уменьшением расстояния между ними (уменьшилась в 1,34 раза для $l = 9$ и 2,5). На фиг. 1 представлена картина течения для $l = 2,5$; $Re = 0,28$; $We = 0,00064$ (сплошные линии – изолинии функции тока, штрихи – векторы скорости по сечению). Скорость жидкости по сечениям, перпендикулярным оси, растет от некоторого значения на пузыре (или оси симметрии) до единицы на внешней границе. На фиг. 2 представлены графики скорости жидкости вдоль пузыря u_r для $l = 9$ и 2,5 (кривые 1 и 2 соответственно). Максимальные значения примерно равны 0,64 и 0,88. Напрашивавшийся вывод о существенно большей подвижности жидкости при $l = 2,5$ оказывается поспешным: обезразмеривание проведено по скорости всплытия, которая разная. Пересчет к размерным величинам показал, что максимальные значения различаются всего на 3%.

При $R_\sigma = 0,5$ объем пузыря увеличился в 125 раз по сравнению с $R_\sigma = 0,1$, значения Fr возросли от 30 до ~100 раз и растут с уменьшением l до 2,75. При $l = 2,5$ величина Fr меньше, чем при $l = 2,75$. Течение около пузыря безотрывное, форма – сплюснутая.

щенный эллипсоид с отношением полуосей $\chi = 1,1$. Таким образом, скорость всплытия пузырьков в цепочке имеет локальный максимум, когда расстояние между ними достигает примерно половины вертикального размера пузыря. Графики скорости жидкости на пузыре близки кривым фиг. 2, величина максимального значения изменяется от 0,88 ($l = 9$) до 0,96 ($l = 2,5$), размерное значение при $l = 2,5$ на 8% больше.

С увеличением a еще в 2 раза ($R_\sigma = 1$) характер изменения Fr с уменьшением l остался тем же, возросла разница между наименьшим и наибольшим значением Fr . Чем больше пузыри в цепочке, тем сильнее растет скорость всплытия с уменьшением расстояния между пузырями.



Фиг. 4. Скорость жидкости вдоль пузыря в цепочке ($a = \delta_\sigma$):

1 – расстояние между центрами $l_p = 6\delta_\sigma$; 2 – $l_p = 3\delta_\sigma$

Течение при $l = 20$ безотрывное. На карте режимов [15] эти данные соответствуют точке, которая находится на границе области появления отрывной зоны за пузырем. Форма поверхности – сплющенный эллипсоид с $\chi = 1,7$. При меньших l (уже для 9) за пузырем имеется небольшая застойная зона (фиг. 3, а) $l = 6$, которая для $l = 3$ замыкается на поверхности другого пузыря (фиг. 3, б). На фиг. 4 представлены графики скорости жидкости на пузыре для $l = 6$ и 3 (кривые 1 и 2). Величина максимального значения равна соответственно 0,89 и 0,97. Пересчет к размерным значениям показывает, что максимум скорости при $l = 3$ в 1,1 раза больше, чем при $l = 6$ (или 9).

Для очень маленьких пузырей величины We и Re малы, капиллярные силы, обратно пропорциональные радиусу кривизны поверхности, являются преобладающими и сохраняют форму сферической. Характеристики течения определяются вязким обтеканием, которое можно считать стоксовым. Более крупные пузыри уже деформируются и течения около них становятся сложными, поскольку капиллярные, инерционные и вязкие силы сравнимы.

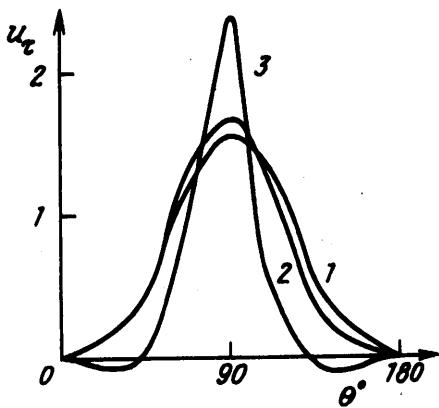
5. Динамика жидкости в ячейке. При малых значениях R_k ячейка жидкости моделирует всплытие слоев равномерно расположенных горизонтально пузырьков. Для плотных "упаковок" пузырей в слое переток жидкости, в результате которого происходит всплытие, лимитируется величиной зазоров между пузырями. Учитывая предыдущие исследования по влиянию стенок трубы на переток жидкости [17], будем считать, что при $R_k \leq 3$ течение определяется величиной этого зазора.

Ниже расчеты приводятся для $R_k = 3$. Величины Fr оказались в 4–10 раз меньшими, чем в случае цепочки с теми же l и R_σ . Так, для $R_\sigma = 0,1$ получены значения Fr от 0,007 до 0,0085, если l уменьшается от 6 до 2,5; при $R_\sigma = 0,5$ имеем для Fr соответственно от 0,53 до 0,63; при $R_\sigma = 1$ – от 0,5 до 0,55. С увеличением a уменьшается разница в значениях Fr для разных l .

Поскольку разница в величинах Fr , Re , We , соответствующих среде с данными M и R_σ , невелика для разных l , можно использовать для сравнений их средние значения.

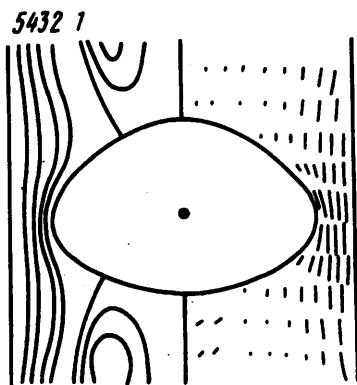
Таблица 2

R_σ	0,1	0,5	1,0	R_σ	0,1	0,5	1,0
Fr	0,0084	0,57	0,54	We	0,00015	0,34	1,2
Re	0,16	15	40	χ	1,0	1,1	1,7



Фиг. 5

Фиг. 5. Скорость жидкости вдоль пузыря в ячейке: 1 – $a = 0,1\delta_\sigma$; 2 – $a = 0,5\delta_\sigma$; 3 – $a = \delta_\sigma$



Фиг. 6

Фиг. 6. Картина течения около отдельного пузыря в ячейке. Радиус пузыря $a = \delta_\sigma$; расстояние между центрами $l_p = 3\delta_\sigma$

В табл. 2 представлены средние значения величин для трех серий расчетов по R_σ . Цифры в первой строке говорят о том, что с ростом объема пузыря скорость всплытия определяется величиной a : $U = (gaFr)^{1/2}$. Степень деформации пузырей χ представлена в четвертой строке и практически такая же, как в случае одиничной цепочки, несмотря на то, что величина Fr по сравнению с цепочкой у пузырей размером менее капиллярной постоянной δ_σ ($R_\sigma < 1$) уменьшилась в 4–5 раз, а у более крупных ($R_\sigma = 1$) упала в 10 раз.

С уменьшением расстояния между пузырями в слое увеличивалась неравномерность в скорости жидкости около пузыря. На фиг. 5 даны графики касательной к поверхности пузыря скорости u_t . При заданном R_σ для других значений l максимальные значения скорости различаются мало. По мере образования и увеличения застойной зоны пик графика становится острее.

В сечениях между пузырем и границей ячейки скорость монотонно растет от некоторого значения на пузыре до некоторого большего на границей ячейки. На боковой поверхности скорость непостоянна. Наибольшее ее значение в области узкого зазора.

Течение около небольших пузырей ($R_\sigma = 0,1$ и $0,5$) безотрывное при всех рассматриваемых значениях l . Для $R_\sigma = 1$ даже при больших l ($l = 20$) имеется застойная зона протяженностью более диаметра пузыря. С уменьшением l между пузырями образуется замкнутая область возвратного течения (фиг. 6 ($l = 3$)), степень деформации пузыря несколько падает ($\chi \approx 1,5$).

Предположение о сильном влиянии параметра R_k на динамику жидкости при $R_k \leq 3$ подтвердилось. Так, для $R_k = 2,5$ и $R_\sigma = 1$ ($l = 2,5$) среди с $M = 2 \cdot 10^{-6}$ отвечают $Re = 19$; $We = 0,2$; $Fr = 0,12$. Максимальное значение скорости на пузыре $u_m = 4,7$. Около оси симметрии между пузырями небольшая застойная зона, степень деформации $\chi \approx 1,35$. При $l = 3$ соответствующие характеристики изменились мало, но обтекание уже безотрывное. Для $R_k = 2,2$, $R_\sigma = 1$ ($l = 2,2$) обтекание безотрывное, $Re = 7$, $We = 0,04$, $Fr \approx 0,02$, $u_m = 9,2$, $\chi = 1,1$.

Максимальные размерные значения скорости на пузыре при $R_k = 2,5$ и $2,2$ меньше, чем при $R_k = 3$ на 7 и 25% соответственно ($R_\sigma = 1$).

6. Сравнение решений для моделей цепочки и ячейки. Анализ расчетных данных показывает, что обсуждаемые системы пузырей можно классифицировать по размеру пузырей. В качестве масштаба, характеризующего динамику всплытия, необходимо использовать капиллярную постоянную Лапласа δ_σ . Для систем пузырей с $a < \delta_\sigma$

$(R_o < 1)$ даже при малых расстояниях между ними реализуются безотрывные течения около слабодеформированных пузырей. Для решений с $R_o \geq 1$ имеют место отрывные течения и большая деформация свободной поверхности. Предлагаемая оценка процесса намного удобнее и точнее, нежели традиционно используемые в гидродинамике неравенства вида $Re \ll 1$ или $We \ll 1$, которые содержат неизвестную заранее скорость всплытия.

Сравнение графиков скорости жидкости на пузыре и распределений скорости перетекаемой за пузырь жидкости указывает на то, что в случае ячейки жидкость достигает большей скорости (при заданных l и R_o). Однако вычисленные размерные величины показывают, что наибольшее значение на пузыре в случае цепочки и лишь на 6–12% больше, чем в ячейке.

Наличие локального максимума в скорости всплытия при изменении расстояния между пузырями в цепочке позволяет дать объяснение винтовым движениям цепочек в опытах. При неравномерном расположении пузырьков отдельные группы более близко расположенных догоняют передний, "подпирают" его, уменьшая расстояния между ними. Когда оно становится менее критического, то такая группа уже не ускоряется, а замедляется. Поскольку задние по-прежнему "подпирают", то наступает момент, когда теряется устойчивость прямолинейного движения либо пузыри сливаются. Такого не наблюдается в модели ячейки. В этом случае скорость всплытия неуклонно растет с уменьшением расстояния между пузырями по вертикали. Наличие пузырей в слое оказывает стабилизирующее в этом плане влияние. Увеличение скорости приводит к большему расплющиванию пузыря, а значит, к уменьшению зазора, через который перетекает жидкость.

Образование застойной зоны между пузырями приводит к некоторому уменьшению степени деформации и уменьшению эффективного расстояния между пузырями по вертикали. Это может усилить описанные выше процессы появления неустойчивости в цепочке и, напротив, оказать ускоряющий эффект для слоистых систем пузырьков.

7. Диффузия газа из пузыря в жидкость. Задача о диффузии газа (или в общем случае примеси) в жидкость в первом приближении может быть поставлена и решена по найденному полю скоростей. Поскольку коэффициент диффузии D очень мал (для молекул кислорода в воде $D \sim 10^{-9}$), независимый безразмерный параметр, характеризующий процесс диффузии, при данном способе обезразмеривания – число Пекле – $Pe \ll 1$ ($Pe = U_2 a/D \sim 10^8$). Это позволяет использовать погранслойное приближение для описания диффузии и приводит к необходимости решения задачи

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (7.1)$$

$$C = C_0(y=0); \quad C \rightarrow C_1(y \rightarrow \infty)$$

Здесь C – функция концентрации; x – координата вдоль свободной поверхности, y – перпендикулярная ей; C_0, C_1 – концентрация на поверхности пузыря и в объеме жидкости; u и v – касательная и нормальная компоненты скорости на пузыре.

Уравнение (7.1) имеет автомодельное решение [18]

$$\frac{C - C_0}{C_1 - C_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta, \quad \eta = \frac{y}{\delta(x, t)} \quad (7.2)$$

Эффективная толщина диффузионного пограничного слоя δ удовлетворяет уравнению и начальному условию

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial t} + u \frac{\partial \delta^2}{\partial x} + \frac{2\delta^2}{R} \frac{\partial u R}{\partial x} = 4D \quad (7.3)$$

$$\delta|_{t=0} = 0$$

Здесь $R(x)$ – расстояние от точки на поверхности пузыря до его оси вращения.

Решая (7.3) вдоль свободной поверхности и линий отрыва потока (x – координата от точки натекания), определяем δ и далее по (7.2) находим распределение во времени концентрации примеси в жидкости.

Задача еще более упрощается, если рассмотреть стационарные решения. В этом случае (7.3) может быть проинтегрировано и для $\delta(x)$ получается выражение [19]:

$$\delta^2 = \frac{4D}{u(x)R(x)} \int_0^x R^2 u dx \quad (7.4)$$

Для локального потока массы $j(x)$ имеем

$$j(x) = \frac{2D\Delta C}{\sqrt{\pi}\delta(x)} \quad (7.5)$$

Интегрируя (7.5), получим поток массы с отдельного участка свободной поверхности между точками покоя жидкости ($x = 0$ и x_B)

$$j = 4\sqrt{\pi D\Delta C} \left(\int_0^{x_B} R^2 u dx \right)^{1/2} \quad (7.6)$$

Суммируя величины j по всем участкам, получим общий поток массы от пузыря в жидкость J . Интенсивность диффузионного потока определяется числом Нуссельта Nu и рассчитывается с учетом безразмеривания по формуле

$$Nu = \frac{J}{2aD\Delta C} = \sqrt{\frac{2aU}{D}} J = \sqrt{Pe} J \quad (7.7)$$

Здесь J – безразмерный поток массы. По (7.7) можно оценить диффузионный поток от пузыря в жидкость на некотором интервале времени, пока диффундируемый газ не достигнет следующего пузыря, когда стационарное решение (7.6) неприемлемо.

Теперь можно рассчитать и сравнить диффузионные потоки от пузыря одного размера для двух предельных случаев: в цепочке и в ячейке. В первом случае учитывается влияние только от пузырей в различных слоях, во втором присутствие пузырей в слое оказывает существенное влияние на скорость всplытия. Удобной характеристикой для этого является отношение чисел Нуссельта

$$\frac{Nu_1}{Nu_2} = \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{1/2} = \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{Fr_1}{Fr_2} \right)^{1/4} \quad (7.8)$$

В (7.8) входит только отношение определяемых параметров и если данные соответствуют заданной среде и одному и тому же значению R_σ (а значит, размеру пузыря), то само отношение характеризует эффективность массопереноса от одного пузыря при различных внешних условиях.

Для рассчитанных выше полей скорости суммарный диффузионный поток от одного пузыря слабо зависит от l . Так, для $R_\sigma = 0,1$ в случае цепочки J изменяется от 16,4 до 18,6 если l принимает значения от 9 до 2,5 (для ячейки $J \approx 22,8$). При $R_\sigma = 0,5$ для J имеем соответственно от 18,6 до 19,1 (для ячейки от 24,5 до 22,9). При $R_\sigma = 1$ – от 19 до 18,9 (для ячейки – от 28,3 до 28,7). Отношение чисел Нуссельта для пузыря одного размера в цепочке и ячейке дает примерно одинаковое значение во всех трех случаях, равное 1,1.

Анализ локальных диффузионных потоков показывает, что наибольший приходится на область экватора пузыря, где скорость жидкости максимальна. Вклад от носовой и кормовой частей пузыря незначителен.

Для сравнения диффузионных потоков от различных по размеру пузырей в (7.8)

необходимо учесть, что обезразмеривание проведено по эквивалентному радиусу пузыря a . С учетом (7.7) и того, что $U^2 = \text{Frag}$, получим

$$\frac{\text{Nu}_1}{\text{Nu}_2} = \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{a_1 U_1}{a_2 U_2} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{Fr}_1}{\text{Fr}_2} \left(\frac{\text{R}_{\sigma 1}}{\text{R}_{\sigma 2}} \right)^3 \right)^{1/4} \frac{J_1}{J_2} \quad (7.9)$$

В (7.9) учтено, что данные отвечают одной и той же среде.

Сравнение диффузионных потоков на единичных пузырях с $\text{R}_{\sigma} = 1$ и с $\text{R}_{\sigma} = 0,5$ и $0,1$ дает значения для чисел Нуссельта ≈ 2 и 20 .

Таким образом, диффузия от одного пузыря радиуса в капиллярную постоянную в 2 раза больше, чем от пузыря с радиусом, в 2 раза меньшим, и в 20 раз больше, чем от пузыря радиусом в 10 раз меньшим.

Чтобы определить эффективность смесей с разными пузырями, необходимо учесть их количества в единице объема. В качестве характеристики смеси жидкости с пузырьками газа используется функция объемного газосодержания β

$$\beta = \frac{N(4/3)\pi R_{\sigma}^3}{V_0} = \frac{N(4/3)\pi R_{\sigma}^3}{N\pi R_k^2 2l} = \frac{(2/3)R_{\sigma}^3}{R_k^2 l}$$

где N – количество пузырей в объеме жидкости V_0 . Поскольку здесь $R_{\sigma} \equiv 2$, β определяется только через геометрические размеры ячеек. В частности, следует, что смеси имеют одинаковое β , если равны соответствующие размеры ячейки. В этом случае решения для модели ячейки с $\text{R}_{\sigma} = 1; 0,5; 0,1$ отвечают смесям с пузырями радиуса в капиллярную постоянную, половину и одну десятую соответственно при сохранении одного и того же объемного газового содержания, определяемого размерами ячейки. Чтобы сравнить диффузионные потоки в смесях жидкости с пузырьками при уменьшении их размера, в правой части (7.9) необходимо дописать множитель (N_1/N_2) , где N_1, N_2 – число пузырей в единице объема рассматриваемых смесей, который пропорционален $(R_{\sigma 2}/R_{\sigma 1})^3$.

В рассматриваемом выше случае уменьшение радиуса пузыря в 2 или 10 раз приводит к увеличению числа пузырей соответственно в 8 или 1000 раз. Это значит, что чем меньше пузыри в смеси, тем суммарный диффузионный поток от всех пузырей будет большим (при одном и том же газосодержании).

Последний вывод справедлив для "стационарных" систем пузырей, обтекаемых жидкостью, на некотором начальном промежутке времени. Если рассмотреть задачу барботажа пузырей через некоторый слой жидкости, то в расчетах необходимо учесть еще дополнительное количество пузырей, проплывающих в системе с большими пузырями из-за большей скорости вскрытия их, за один и тот же промежуток времени. Для двух рассматриваемых случаев отношение скоростей вскрытия пузырей равны соответственно 1,4 и 25. Таким образом, окончательно система с пузырями в 2 раза меньшим радиусом эффективнее примерно в 3 раза, а с пузырями радиуса в 10 раз меньшим – примерно в 2 раза. Поскольку обнаружилась некоторая немонотонность в эффективности, имеет смысл сравнить системы с пузырями для $\text{R}_{\sigma} = 0,5$ и $0,1$. Для единичных пузырей имеем отношение чисел Нуссельта $\text{Nu}_{0,5}/\text{Nu}_{0,1} \approx 10$, отношение скоростей вскрытия $U_{0,5}/U_{0,1} \approx 19,5$. Количество меньших пузырей в 125 раз больше.

Таким образом, с учетом разной скорости вскрытия за один и тот же промежуток времени отношение диффузионных потоков от систем с пузырями радиуса $a = \delta_{\sigma}/2$ и $\delta_{\sigma}/10$ равно $195/125 \approx 1,56$. Сравнивая с предыдущим, следует сделать вывод, что система с пузырями радиуса $a = \delta_{\sigma}/2$ эффективнее систем пузырей с $a = \delta_{\sigma}$ и $\delta_{\sigma}/10$.

Сравнение диффузионных потоков от одного пузыря с учетом разного газосодержания показывает, что отношение чисел Нуссельта при $\text{R}_k = 2,5$ ($l = 2,5, J = 35,5$) и 3 ($l = 3$) равно 1,25, но отношение скоростей вскрытия при этом 0,47. Таким обра-

зом, для процесса барботажа система пузырей с $R_k = 3$ эффективнее. Аналогичный вывод следует из сравнения систем с $R_k = 2,2$ ($l = 2,2, J = 44,5$) и 3 ($l = 3$).

Заключение. Математическое приближение, связанное со сносом условий с боковой поверхности ячейки – призмы на поверхность вписанного цилиндра уменьшает площадь зазора между пузырями в слое на 9%. Это приводит к уменьшению скорости всплытия пузырей в смеси. Учитывая результаты расчетов, можно с уверенностью говорить о практически равных максимальных скоростях жидкости на поверхности пузырей одного размера в моделях ячейки и цепочки. Аналогичный вывод следует и по отношению к диффузионным потокам газа от пузыря.

В работе рассмотрены течения около пузырей радиуса в капиллярную постоянную и меньше. В слоистых системах пузырей характеристики течений определяются расстоянием между пузырями в слое. Если ширина зазора между пузырями в слое меньше радиуса пузыря, то реализуются безотрывные типы течений.

Применительно к задаче барботажа газовых пузырьков через слой жидкости показано, что при одном и том же объемном газосодержании смеси существует размер пузырей, когда эффективность системы в целом по отношению к диффузии примеси наибольшая. Уменьшение размеров ячейки при сохранении объема пузыря (увеличение объемного газосодержания смеси) не приводит к увеличению суммарной диффузии. При этом форма пузырей уже не сферическая, обтекание жидкости еще безотрывное, но гидродинамические параметры уже нельзя считать малыми. Учитывая вывод о практически одинаковой диффузии от одиночного пузыря при различных внешних условиях, решения по всплытию одиночных пузырей [15] и цепочек [6] (в части безотрывного обтекания) можно использовать для оценки эффективного размера пузырей для смеси с разными жидкостями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00879а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. Иванов К.П., Ривкинд В.Я. Стационарное обтекание двух частиц вязкой несжимаемой жидкостью при умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 167–171.
3. Иванов К.П., Ривкинд В.Я. Осесимметричная задача обтекания двух частиц потоком вязкой несжимаемой жидкости // Численные методы динамики вязкой жидкости. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР. 1983. С. 158–163.
4. Протодьяконов И.О., Люблинская И.Е. Гидродинамика и массообмен в системах газ – жидкость. Л.: Наука, 1990. 348 с.
5. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
6. Волков П.К. Движение цепочки пузырьков в вертикальном канале с вязкой жидкостью // ПМТФ. 1991. № 3. С. 87–91.
7. Christov C.I., Volkov P.K. Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 341–364.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
9. Grace J.R. Shapes and velocities of bubbles rising in infinite liquids // Trans. Inst. Chem. Engng. 1973. V. 51. № 2. P. 116–120.
10. Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities // J. Fluid Mech. 1981. V. 105. P. 61–85.
11. Coppers J.H.C., Rietema K. Description of bubble shape in terms of dimensionless numbers // Chem. Engng. Sci. 1980. V. 35. № 6. P. 1495–1497.
12. Harper J.F. The motion of bubbles and drops through liquids // Advances in Applied Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1972. V. 12. P. 59–129.

13. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. Вып. 1. С. 3–18.
14. Кутателадзе С.С., Маленков И.Г., Чиннов Е.А. Результаты экспериментального изучения влияния стенок вертикального канала на скорость всплытия одиночных пузырьков разного размера // Дисперсные системы в энергохимических процессах. Новосибирск, 1982. С. 3–19.
15. Волков П.К., Чиннов Е.А. Стационарное всплытие одиночного пузыря в неограниченном объеме жидкости // ПМТФ. 1989. № 1. С. 94–99.
16. Волков П.К., Кузнецов Б.Г. Краевые условия для задачи обтекания пузыря вязкой жидкостью // Численное моделирование в динамике жидкости. Новосибирск, 1983. С. 12–16.
17. Волков П.К. Всплыивание газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // ПМТФ. 1989. № 6. С. 98–105.
18. Chao B.T. Transient heat and mass transfer to translating droplet // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1969. V. 91. № 2. P. 273–281.
19. Волков П.Г., Гешев П.И. Гидродинамика и диффузия примеси в ячейке двухфазной среды // ПМТФ. 1995. № 6. С. 68–76.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.V.1995