МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1996

УДК 532.516.013.4:532.584:536.24

© 1996 г. Ю.К. БРАТУХИН, С.О. МАКАРОВ

О КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СУСПЕНЗИЙ

Аналитически прослежено возникновение конвективного движения в слабоконцентрированной суспензии, заполняющей горизонтальный слой при подогреве системы снизу. Показано, что при определенной концентрации суспензии в системе вместо рэлеевских ячеек могут возникнуть более мелкомасштабные вихри, окружающие каждую из частиц дисперсной фазы.

При подогреве снизу жидкость, заполняющая полости определенной формы (плоские слои, цилиндры или эллипсоиды), может находиться в равновесии при достаточно малых числах Рэлея, не превосходящих критические Ra_* [1, 2]. При слабых отклонениях градиента температуры от вертикали [3] или при малой деформации поверхности полости [4] равновесие становится невозможным и конвекция возникает бескризисным образом. Однако интенсивность возникающего конвективного течения остается весьма слабой и только при достижении чисел Рэлея, превосходящих Ra_* для данной задачи, резко возрастает [3, 4]. Этот факт использовался, в частности, в классических экспериментах [5] по изучению устойчивости жидкости в вертикальном цилиндре при подготовке снизу: цилиндр слегка наклонялся в сторону для снятия вырождения по азимуту и тем не менее кризис диффузионной теплопередачи надежно фиксировался.

В этом плане можно поставить задачу о конвективной устойчивости эмульсий или суспензий с близкими физико-химическими свойствами дисперсной фазы и дисперсионной среды. С точки зрения общей теории [2] в таких гетерогенных системах при подогреве снизу конвекция должна возникать при сколь угодно малых числах Грасгофа. Однако если теплопроводность фаз и их плотности близки, течение будет медленным и только по достижении Ra_* его скорость должна резко возрасти. Кризис должен быть особенно ярко выраженным для суспензий, но он должен быть заметен и для эмульсий, в которых кроме гравитационной развивается конвекция Марангони.

При математическом моделировании задачи будем предполагать концентрацию частиц слабой, чтобы можно было проанализировать конвекцию вблизи отдельной частицы дисперсной фазы, а затем усреднить результаты по методу Эйнштейна, как это сделано, например, в [6]. Для упрощения задачи будем считать включение твердым.

1. Математическая модель задачи. Пусть в центре заполненной жидкостью сферической полости радиуса R помещен твердый шар радиуса a. Примем следующие предположения: а) плотность ρ, теплопроводность $\varkappa$ и коэффициенты теплового расширения β шара и жидкости одинаковы, б) кинематическая ν и динамическая η вязкости и коэффициенты температуропроводности шара χ_2 и жидкости χ_1 постоянны, в) на поверхности полости поддерживается косинусоидальное распределение температуры (подогрев снизу).

В этих условиях в системе может установиться бесконвективный теплоперенос с постоянным градиентом температуры A, направленным вниз. Исследуем устойчивость этого процесса. Для этого решим задачу для нормальных возмущений скорости υ, температуры в шаре T_2 и в жидкости T_1 и давления p (они пропорциональны $\exp(-\lambda t)$, где декремент λ веществен [2]). Запишем соответствующие уравнения в безразмерной форме [2]

$$-\lambda \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \gamma T_1 \mathbf{k}; \quad \Delta \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

$$-\lambda T_1 - \mathbf{v k} = \chi_1 \Delta T_1; \quad -\lambda T_2 - \mathbf{u k} = \chi_2 \Delta T_2$$

Здесь $\mathbf{u}$ – скорость шара. В качестве единиц измерения выбраны: длина – радиус шарового включения a, скорость νa^{-1}, температура Aa, давление $\nu^2 \rho a^{-1}$, время $a^2\nu^{-1}$. В задачу вошли безразмерные параметры $\gamma = g\beta A a^4 \nu^{-2}$; $\chi_i = \chi_i \nu^{-1}$ ($i = 1, 2$). Через граничные условия войдет еще безразмерный радиус полости $\alpha = \mathrm{R}a^{-1}$, $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный вверх, против ускорения силы тяжести: $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$.

К уравнениям (1.1) нужно присоединить краевые условия на поверхности сферической полости, на поверхности шара и уравнения Ньютона для взвешенного в жидкости шара.

В шаровых полостях наиболее опасными являются возмущения [2], которые: а) стремятся закрутить шар вокруг горизонтальной оси, которую примем за ось y декартовой системы координат ($\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость шара), б) оставляют шар в покое, образуя четыре вихря, в которых роторы скорости вблизи экватора направлены по радиальным ортам $\mathbf{e}_r$ во все четыре стороны ($\mathbf{u} = 0$), в) увлекают шар вверх ($\mathbf{u} = u\mathbf{k}$). Критические числа Рэлея для возмущений б) и в) примерно одинаковы и приблизительно в 3 раза больше, чем для возмущений а) [2]. Поэтому исследуем устойчивость системы по отношению к наиболее опасному возмущению а), представив его в виде

$$\mathbf{v} = v(r)\mathbf{r} \times \nabla (\sin\vartheta \sin\varphi) \tag{1.2}$$

$$T_i = \tau_i(r) \sin\vartheta \cos\varphi \quad (i = 1, 2)$$

В этом случае на шар со стороны жидкости будет действовать момент сил, y-ая составляющая которого равна [1]

$$M_y = \frac{15}{8\pi} \oint (\sigma'_{r\vartheta} \cos\varphi - \sigma'_{r\varphi} \cos\vartheta \sin\varphi) \times \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \tag{1.3}$$

В качестве единицы момента сил выбрана величина $8\pi\rho a \nu^2 15^{-1}$.

Кроме сил, обусловленных вязкостью, на шар при его повороте вокруг оси y на угол $\Delta\vartheta$ будет действовать момент сил тяжести, вызванный смещением вверх центра масс включения при его неоднородном нагреве. Поскольку уравнения (1.1) записаны в приближении Обербека – Буссинеска (см. обсуждение вопроса о применимости этого приближения к описанию конвективных течений и библиографию к нему в [8]), то изменение объема фаз и деформацию формы тел можно не учитывать из-за предполагаемой малости параметра Буссинеска $\beta A a$, в то время как число Грасгофа γ считается конечным. Поэтому смещение центра масс шара в поле градиента температуры (в размерной форме)

$$\Delta z = \int \frac{z\rho(1 + \beta A z) dV}{\frac{4}{3}\pi \rho a^3} = \frac{1}{5} \beta A a^2$$

должно считаться пренебрежимо малым, однако в поле силы тяжести это смещение создаст момент силы (безразмерный) $M_y = 0{,}5\gamma\Delta\vartheta$, пропорциональный γ. Таким образом, закон Ньютона, описывающий вращение шара, должен быть записан в виде

$$\frac{\gamma}{2}\Delta\vartheta - \frac{25}{8}[v'(1) - v(1)] = \dot{\Omega} \tag{1.4}$$

Граничными условиями для уравнений (1.1) являются требования исчезновения скоростей и температур на поверхности кюветы и условия прилипания и непрерывность температур и теплопотоков на поверхности шара

$$r=\alpha:\quad \mathbf{v}=0;\quad T_1=0 \tag{1.5}$$

$$r=1:\quad \mathbf{v}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{e}_r;\quad T_1=T_2;\quad \frac{\partial T_1}{\partial r}=\frac{\partial T_2}{\partial r}$$

К уравнениям (1.1) – (1.5) необходимо присоединить начальное условие, представляющее собой вносимое в систему бесконечно малое возмущение.

2. Конвективная устойчивость гетерогенной системы. В соответствии с общей теорией [2] в жидкостях могут возникать тепловые и гидродинамические возмущения, которые в данной задаче можно реализовать, повернув шар на угол $\Delta\vartheta \sim \varepsilon \exp(-\lambda t)$ или, сообщив ему угловую скорость $\Omega \sim \varepsilon \exp(-\lambda t)$ ($\varepsilon \ll 1$). В первом случае искривляются изотермы и как следствие появляется поле скоростей; во втором – возникает поле скоростей, деформирующее изотермы. Эволюция этих начальных возмущений может привести или к рассасыванию их за счет теплопроводности и вязкости ($\lambda > 0$), или, наоборот, к росту ($\lambda < 0$). Кризис диффузионной теплопередачи через полость соответствует случаю $\lambda = 0$. В частности, для гидродинамических нейтральных возмущений ($\Omega = \varepsilon$, $\Delta\vartheta = 0$) получаются следующие выражения для амплитуд скоростей и температур (метод получения этих функций см. в [4, 7]):

$$\begin{aligned} v &= c_1 j_1(kr)+c_2 n_1(kr)+c_3 i_1(kr)+c_4 k_1(kr) \\ \tau_1 &= \sqrt{2\chi_1^{-1}}\,[c_1 j_1(kr)+c_2 n_1(kr)-c_3 i_1(kr)-c_4 k_1(kr)] \\ \tau_2 &= \varepsilon(c_5 r+r^3)(10\chi_2)^{-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь j_1, n_1, i_1, k_1 – функции Бесселя порядка 3/2 первого и второго рода действительного и мнимого аргументов, $2k^4=\gamma\chi_1^{-1} \equiv \mathrm{Ra}_*$.

Для определения постоянных интегрирования c_i ($i = 1,...,5$) и ε необходимо решить систему однородных уравнений (1.3) и (1.4)

$$\begin{aligned} &v(\alpha)=\tau_1(\alpha)=0 \\ &v(1)=v'(1)=\varepsilon,\quad \tau_1(1)=\tau_2(1),\quad \tau_1'(1)=\tau_2'(1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Условие совместности уравнений (2.2) для случая малых зазоров $\delta=\alpha-1 \ll 1$ и, следовательно, больших k имеет вид

$$k+\left(3-\frac{1}{\alpha}\right)(\operatorname{tg} k\delta+\operatorname{th} k\delta)=\frac{\chi}{2}(\operatorname{tg} k\delta-\operatorname{th} k\delta)\qquad \chi=0{,}1\chi_2^{-1}\sqrt{2\varphi_1} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) определяет критическое число Рэлея как функцию зазора δ и параметра χ. Из (2.3) следует, что k пропорционально δ^{-1} и уменьшается с ростом χ. Физически это очевидно: при уменьшении зазора растут силы вязкости, которые гасят возникающие возмущения. Уменьшение k с ростом χ связано с тем, что при уменьшении температуропроводности шара ($\chi_2 < \chi_1$) возмущения температуры в нем не рассасываются и тем самым стимулируют дальнейший рост возмущений.

Тривиальный корень $k = 0$ уравнения (2.3) получился из-за того, что при выводе этого уравнения было произведено умножение на k.

В другом предельном случае $\alpha \gg 1$, $\delta \approx \alpha$, $k \to 0$ условия совместности системы уравнений (2.2) вырождаются в уравнение

$$\operatorname{tg} k\delta=\frac{\delta}{k\alpha} \tag{2.4}$$

из которого следует, что по порядку величины $k \approx \alpha^{-1}$.

Таким образом, и на этом конце кривой $k = f(\alpha)k$ остается обратно пропорциональной δ, но уже не зависит от χ. Физически этот результат можно понять следующим образом. При больших значениях α система представляет собой фактически однородную жидкость с малым включением, не играющим никакой роли. В частности, при отсутствии включения $Ra_* = 815\ \alpha^{-4}$.

Полученные результаты легко переносятся на разбавленные суспензии. Пусть, например, суспензия заполняет горизонтальный слой толщиной h, в котором создан вертикальный градиент температуры A (подогрев снизу). Тогда в однородной жидкости критическое число Рэлея равно $Ra_0 = 1708\ (a/h)^4$. (Число Ra_0 определено по некоторому линейному размеру a.) При $Ra > Ra_0$ в системе возникают крупномасштабные вихри с длиной волны, равной приблизительно толщине полости [2]. Наличие в слое взвешенных частиц генерирует более мелкомасштабные вихри, окружающие каждую частицу. Если отождествить рассмотренную выше модель кюветы радиуса $r = \alpha$ с объемом суспензии $V_0 = 4\pi\alpha^3 3^{-1}$, содержащем одну частицу радиуса 1, то в каждом таком объеме суспензии должны возникать вихри с линейным размером R. Интенсивность этих вихрей, как это следует из (2.4), резко возрастает при $Ra_* \gtrsim 10\ \alpha^{-4}$. Следовательно, в системе при условии $Ra_* < Ra_0$ возникнут именно эти мелкомасштабные, а не рэлеевские вихри.

Таким образом, если концентрация суспензии такова, что толщина слоя h меньше учетверенного размера R:$h < 4R$, то в слое рэлеевские ячейки не возникают. Физически это можно понять следующим образом. При классической рэлеевской конвекции силы вязкости подавляют возникающие возмущения по всему сечению вихрей, в то время как в твердых частицах этих сил нет. Поэтому, если суспензия достаточно разрежена и соседние частицы не мешают развитию околочастичных вихрей, то образуются именно они и лишь с увеличением концентрации должны возникать ячейки Рэлея.

Слабое увеличение эффективной вязкости суспензии [1, § 22] не оказывает на результаты существенного влияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. *Чернатынский В.И., Шлиомис М.И.* Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 64–70.
4. *Братухин Ю.К., Макаров С.О.* Межфазная конвекция. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1994. 327 с.
5. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 256 с.
6. *Братухин Ю.К., Путин Г.Ф.* О внутрипоровой конвекции при вертикальной ориентации осредненного градиента температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 93–98.
7. *Братухин Ю.К., Шлиомис М.И.* Об одном точном решении уравнений нестационарной конвекции // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 959–962.
8. *Пухначев В.В.* Микроконвекция в вертикальном слое // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 76–84.

Пермь

Поступила в редакцию
28.III.1995