

УДК 533.6.011

© 1996 г. А.И. БУНИМОВИЧ, А.В. ДУБИНСКИЙ

РАЗВИТИЕ, СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ (обзор)

Теория локального взаимодействия охватывает исследования, базирующиеся на представлении силовых и тепловых характеристик воздействия среды на тело в некоторой точке его поверхности как функции местной величины скорости, угла между направлением скорости и нормалью к поверхности и "глобальных" параметров, сохраняющих одинаковые значения для всех точек поверхности.

В обзоре прослеживается зарождение и развитие теории. Дан анализ результатов по основным направлениям: построение конкретных моделей локального взаимодействия, расчет интегральных характеристик и определение формы оптимальных тел, общие свойства модели и основанные на них прикладные методы; нетрадиционные области использования локальных моделей.

Важнейшие области применения локальной теории – аэродинамика, газовая динамика и динамика разреженного газа, чему наряду с результатами общего характера уделяется основное внимание.

1. Математическая модель локализованного взаимодействия среды с поверхностью тела. Пусть на покоящееся тело набегаёт среда с постоянной скоростью u_∞ и задача заключается в расчете характеристик воздействия среды на поверхность тела.

Математические модели и методы расчета воздействия среды на движущееся в ней тело существенно зависят от того, какая это среда (жидкость, газ, грунт и т.д.), ее характеристик (плотность, скорость и др.); свойств поверхности и формы тела, условий взаимодействия поверхности тела со средой, его ориентации и других факторов. Моделированием конкретных ситуаций "среда – тело" занимаются соответствующие разделы физики, механики, техники. В "классическом" варианте теории локального взаимодействия, когда тело движется поступательно, исследуются задачи для моделей взаимодействия среды с поверхностью вида

$$C_F = \frac{1}{q_\infty} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \Omega_p(\mathbf{a}, \xi) n^\circ + \Omega_\tau(\mathbf{a}, \xi) \tau^\circ$$

$$C_Q = \frac{1}{v_\infty q_\infty} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \Omega_Q(\mathbf{a}, \xi)$$

$$\xi = v_\infty^\circ n^\circ, \quad q_\infty = \frac{\rho_\infty v_\infty^\circ}{2}$$
(1.1)

Здесь ΔF , ΔQ – сила и теплоток, действующие со стороны среды на малую площадку площади ΔS , касательную к поверхности тела в данной точке; C_F , C_Q – локальные коэффициенты силы и теплоток; q_∞ – скоростной напор; ρ_∞ – плотность;

$\mathbf{n}^\circ, \boldsymbol{\tau}^\circ$ – векторы внутренней нормали и касательной в данной точке поверхности соответственно, причем $\boldsymbol{\tau}^\circ$ лежит в плоскости векторов \mathbf{v}_∞ и \mathbf{n}° ; \mathbf{a} – вектор "глобальных" параметров; $\Omega_p, \Omega_\tau, \Omega_Q$ – функции, характеризующие модель взаимодействия среда – тело; индекс ∞ относится к среде; индекс "о" отмечает единичные вектора.

Глобальные параметры характеризуют среду, тело и процесс их взаимодействия и не изменяют свои значения при переходе от одной точки поверхности к другой. В общем случае предполагается, что они сохраняют свои значения также при изменении ориентации тела в среде и при изменении формы тела. Конкретизация границ неизменности значений глобальных параметров вытекает из области применимости конкретных моделей либо постулируется при разработке общих методов теории.

Локальный коэффициент момента вводится по формуле

$$\mathbf{m} = \frac{1}{l_*} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{C}_F$$

где l_* – характерный размер, \mathbf{r} – радиус-вектор точки поверхности тела, \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точки, относительно которой вычисляется момент.

Так как представление для теплопотока аналогично таковому для скалярных характеристик силового воздействия (проекции \mathbf{C}_F на определенным образом выбранные оси), многие результаты, получаемые для сил, распространяются на теплопотоки. Поэтому в очевидных случаях эта возможность далее специально не оговаривается.

"Освещенной" называют ту часть поверхности тела, на которой $\xi > 0$; соответственно на "затененной" $\xi < 0$. Предполагается, что среда воздействует только на освещенную часть поверхности тела. Это не исключает применения локализованного подхода и к тем явлениям, для которых модели в области $\xi < 0$ имеют содержательный смысл, ибо воздействие среды на затененную область можно рассмотреть отдельно, на основе тех же методов. Суммарные силовые и тепловая характеристики (интегральные характеристики) определяются путем интегрирования соответствующих локальных коэффициентов по освещенной поверхности тела.

Требование невогнутости поверхности тела не обязательно, но может наряду с другими вводиться при обосновании методов решения тех или иных задач.

Моделям локального взаимодействия можно поставить в соответствие некоторый гипотетический процесс воздействия среды на поверхность тела. Сформулируем важнейшие свойства этого процесса, не вдаваясь в детали механизма их реализации. Эти свойства иногда называют основными постулатами теории локального взаимодействия.

Свойство 1. Все точки поверхности тела взаимодействуют со средой автономно, независимо друг от друга. Процесс взаимодействия в любой точке не влияет на внешнюю среду, т.е. не сказывается на характеристиках среды, существенных для процесса ее воздействия в других точках поверхности.

Свойство 2. При взаимодействии тел со средой при одинаковых значениях глобальных параметров в каждой точке поверхности вектор действующей со стороны среды силы лежит в плоскости векторов \mathbf{v}_∞ и \mathbf{n}° , а количественная характеристика силового и (или) теплового воздействия определяется только значением угла $\theta = \arccos \xi$. При этом предполагается, в частности, что поверхность тела обладает свойством изотропности.

Тот факт, что некоторый процесс взаимодействия среды с поверхностью тела описывается локальной моделью, означает лишь то, что он гипотетически может быть представлен как физический процесс, характеризующийся сформулированными выше свойствами. Однако это не означает, что именно такая интерпретация в максимальной степени отвечает физической сущности процесса.

Возможен и другой подход, когда конкретная модель взаимодействия не известна либо не точна и есть основания полагать, что описание взаимодействия среды с поверхностью тела целесообразно искать или уточнять на основе локальных моделей. Здесь путь рассуждений: от свойств взаимодействия – к конкретной модели. Характерный пример такого подхода – моделирование в промежуточной области течения разреженного газа.

Возможности использования "локализованного" подхода выходят за рамки классического варианта теории, в чем можно будет убедиться из дальнейшего изложения.

2. Зарождение и общие тенденции развития теории. Конкретные локальные модели были известны достаточно давно и широко использовались как в теоретических исследованиях, так и в приложениях; отметим некоторые наиболее распространенные локальные модели, используемые в газовой динамике и аэромеханике.

В случае плоского сверхзвукового течения газа с малыми возмущениями при обтекании тонкого профиля под малым углом атаки в первом и во втором приближениях модель принадлежит рассматриваемому классу, причем в числе глобальных параметров число Маха во внешнем потоке M_∞ и отношение удельных теплоемкостей γ , $\Omega_\tau = 0$. Известны и высшие приближения: в третьем приближении в выражении для Ω_p появляется дополнительный глобальный параметр θ_0 – значение угла θ в передней части контура.

Применительно к сверхзвуковым и гиперзвуковым течениям для расчета давления на освещенной части поверхности тела широко используются классическая и модифицированная модели Ньютона [96], а также ее "локальные аналогии" (например, [117]); метод касательных конусов (клиньев) [96] с различными способами расчета давления на поверхности касательного тела.

Различные модификации локальной модели широко используются для описания силового и теплового воздействия сверхзвукового свободномолекулярного потока при обтекании выпуклых тел [22, 23, 70, 71, 73].

Воздействие светового потока при параллельном падении лучей также описывается локальной моделью [104]. В силу аналогии моделей, многие результаты, полученные для разреженного газа, могут быть перенесены на случай воздействия светового потока [31, 51, 53].

Принадлежащие рассматриваемому классу модели появлялись обычно в результате анализа тех или иных физических явлений (часто – в предельных случаях), а исследования на их основе ограничивались рамками соответствующей области механики. До конца 1960-х годов гипотеза локальности не рассматривалась как основа объединения исследований для физически различных условий взаимодействия среды с поверхностью тела, развития достаточно универсальных методов расчета и анализа количественных характеристик такого воздействия.

Это не означает, что локальность как специфическое свойство моделей ранее вообще не замечалась; уместно в этой связи упомянуть аналогию между обтеканием свободномолекулярным потоком и потоком света. В [96] при обосновании перехода от модели Ньютона к методу касательных конусов отмечается свойство локальности взаимодействия потока с поверхностью тела, а упомянутые модели интерпретируются как возможные способы количественного описания этого взаимодействия.

Важную роль в формировании представления о моделях локального взаимодействия как о специфическом классе моделей механики сплошной среды сыграла опубликованная в 1969 г. работа [25], посвященная аэродинамическому расчету в промежуточной области течения разреженного газа. В этот период запросы практики, связанные с интенсивным развитием авиационно-космической техники, потребовали создания эффективных методов расчета аэродинамических характеристик тел, которые охватывали бы весь диапазон высот полета. При этом наиболее сложной являлась и остается до сих пор проблема моделирования обтекания тел в промежуточном диапазоне высот, расположенном между областью справедливости уравнений Навье-Стокса и областью свободномолекулярного течения.

Учитывая локальный характер моделей гиперзвукового обтекания тел потоком "плотного" газа и свободномолекулярным потоком, авторы [25] предложили "интерполировать локальность" и на промежуточную область. Аналогичный подход был предложен также в [54], опубликованной в общедоступном виде в 1977 г., но выполненной, как указывают ее авторы, в 1968 г.

Несмотря на богатую предысторию использования локальных моделей в механике, зарождение теории локального взаимодействия связывается с появлением в конце 60-х годов сознательного взгляда на моделирование физического процесса через "призму локальности", т.е. с включением соответствующего подхода в арсенал априорно известных средств, из которых осуществляется выбор подходящего метода при проведении теоретических либо прикладных исследований.

С этого времени в научный лексикон входят и становятся общепринятыми применительно к рассматриваемому подходу термины локальность, локальный метод, теория (закон, гипотеза) локальности (локального взаимодействия). Эти словосочетания становятся привычными в наименованиях публикаций (см. библиографию), они выносятся в названия секций научных конференций, состояние исследований по соответствующей тематике становится предметом специального анализа в докладах, монографиях и обзорных статьях [9, 20, 22, 23, 33, 34, 80, 100,103]. Важную роль сыграли тематические сборники [21], освещавшие результаты исследований по различным направлениям теории.

В эволюции теории рельефно проявляются две взаимосвязанные тенденции: с одной стороны, осуществление обобщения на весь класс моделей результатов, установленных ранее для частных случаев, с другой – выявление и исследование весьма общих закономерностей, распространяющихся на широкую совокупность физически различных условий взаимодействия среды с поверхностью тела. В тесном переплетении с этими процессами развиваются специфические ветви теории, существенным образом опирающиеся на особенности моделируемых конкретных физических процессов.

"Новейшая история" теории локального взаимодействия охватывает лишь 30-летний период, в течение которого осуществлялся сложный, иногда противоречивый процесс интеграции отдельных, относительно независимых исследований в единую теорию. При выборе конкретных направлений работ и методов исследований в большой мере сказывались традиции соответствующих научных школ и ориентация организаций, где они развивались, а также научные интересы отдельных ученых. Относительная независимость в выборе тематики и внутренняя логика исследований по различным направлениям приводили к неравномерности развития отдельных ветвей теории, что затрудняет хронологический принцип анализа развития теории в целом и оправдывает ее декомпозицию с этой целью на отдельные ветви.

Ниже дан краткий анализ развития и современного состояния основных разделов теории. Обзор не претендует на полноту охвата проблемы, библиография по которой насчитывает многие сотни публикаций. Авторы вынуждены исключить из рассмотрения либо лишь вскользь упомянуть многие по-своему интересные работы, прямо или косвенно связанные с рассматриваемым комплексом проблем, но основанные на традиционно используемых моделях, экспериментальные исследования, а также отказаться от подробного анализа большинства работ, отдав предпочтение их группировке по признакам единства подхода или направления исследований.

3. Методы построения конкретных моделей. Хотя ряд разрабатываемых подходов к построению конкретных моделей обладает определенной степенью общности, они развивались в основном применительно к промежуточной области течения разреженного газа. Задачи построения конкретных моделей рассматривались в двух аспектах: выявление достаточно общих представлений для задающих модель функций Ω_p и Ω_r как основы для создания эффективных методов расчета аэродинамических характеристик и идентификации параметров конкретных моделей и собственно моделирование конкретных условий взаимодействия среды с поверхностью тела.

В одной из первых публикаций [25] выбор вида зависимостей осуществляется в классе функций

$$\Omega_{\delta} = \sum_i \lambda_{\delta}^{(i)}(\mathbf{a}) \varphi_{\delta}^{(i)}, \quad \delta = p, \tau \quad (3.1)$$

что позволяет представить любую интегральную силовую характеристику воздействия среды на тело (составляющую силы) в виде

$$G = \sum_{\delta=p,\tau} \sum_i \lambda_{\delta}^{(i)} g_{\delta}^{(i)} \quad (3.2)$$

где функции формы $g_{\delta}^{(i)}$ при заданных $\lambda_{\delta}^{(i)}$ зависят только от формы тела и его ориентации относительно скорости поступательного движения, а коэффициенты режима $\lambda_{\delta}^{(i)}$ определяются в основном условиями взаимодействия среды с поверхностью тела и ее свойствами.

Представление в форме (3.1) оказалось весьма удобным и преимущественно использовалось впоследствии по двум причинам. Во-первых, линейный характер зависимости правой части соотношения (3.2) от $\lambda_{\delta}^{(i)}$ облегчает решение задач идентификации параметров модели по известным интегральным характеристикам и первые процедуры такого рода были разработаны уже на начальном этапе исследования [77]. Во-вторых, структура зависимости (3.1) позволяет развить эффективные методы расчета.

При создании конкретных моделей для промежуточной области течения разреженного газа использовались интуитивно-правдоподобные соображения, которые наиболее четко сформулированы в [9, 22, 25] и впоследствии принимались во внимание большинством исследователей: требование непрерывного перехода к предельным режимам, требование удовлетворения заданным условиям при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$, простота и эффективность; последняя связывалась с рекомендацией использовать полные минимальные системы ортогональных функций. Исходя из этих требований была предложена конкретная система тригонометрических функций. Более широкое распространение получил введенный в [31] подкласс моделей (3.1) вида

$$\Omega_p = \sum_i A_i \cos^i \theta, \quad \Omega_{\tau} = \sin \theta \sum_i B_i \cos^i \theta \quad (3.3)$$

включающий большое число известных частных случаев и дающий определенные преимущества при разработке специфических методов расчета интегральных характеристик.

Применительно к промежуточной области течения разреженного газа проблема создания конкретных моделей, учитывающих влияние газодинамических условий обтекания (в первую очередь, чисел Кнудсена и Рейнольдса) стояла как в теоретическом, так и в практическом плане.

Простейший подход к решению этой проблемы, сохраняющий свою актуальность до настоящего времени [61], предусматривает использование полуэмпирических методов определения аэродинамических коэффициентов в промежуточной области на базе их значений в "плотном" газе и в свободномолекулярном потоке.

Такой подход обсуждается в обзорной лекции [105], автор которой с соответствующими ссылками приводит формулу вида

$$C_{xa} = \beta C_{xa}^{\infty} + (1 - \beta) C_{xa}^0 \quad (3.4)$$

где C_{xa} , C_{xa}^{∞} , C_{xa}^0 – значения коэффициента сопротивления тела в промежуточном режиме, при свободномолекулярном обтекании ($Kn \rightarrow \infty$) и в "плотном" газе ($Kn \rightarrow 0$) соответственно; β – эмпирический коэффициент, зависящий от числа Кнудсена Kn . Анализ конкретных зависимостей вида (3.4) можно найти в [102]; в [109] соответ-

ствующий подход развивается применительно как к силовым, так и к тепловым характеристикам, предложено использовать интерполяцию "граничных режимов" для расчета распределения давления по поверхности тела.

В русле этого подхода выполнен цикл работ [2, 5, 11, 27, 59, 60, 79, 80, 81, 82, 112], в которых с привлечением данных экспериментов конкретизируется и исследуется представление для β в выражении (3.4) в зависимости от параметров течения. В [11] предложена конкретная формула для функции $\beta(Kn)$ и установлена универсальность этой зависимости для типичных тел (сфера, цилиндр, конус). В [2] на основании обработки данных по острым круговым конусам получены иные значения параметров функции $\beta(Kn)$. В [59, 60] предложены и обоснованы формулы

$$\beta = \psi(\Delta), \quad \Delta = t_w^{-0,1} Re_0^*$$

Здесь Re_0^* – число Рейнольдса, $t_w = T_w/T_0$ – температурный фактор, T_w, T_0 – температура поверхности тела и температура торможения соответственно; ψ – функция, полученная на основе обработки экспериментальных данных. Оказалось, что существенным фактором, влияющим на точность этих моделей, является способ выбора характерного размера [60, 80].

В теории локального взаимодействия значение моделей вида (3.3) и в особенности установленного свойства независимости ее параметра β от формы тела (для некоторого набора конфигураций) выходит за рамки возможности расчета лишь коэффициентов сопротивления тел в промежуточном режиме течения разреженного газа. Значения C_{xa} , вычисленные по (3.4), могут играть роль экспериментальных данных в задачах идентификации параметров модели, если известен ее вид, например для линейных моделей (3.1) на основе равенств (3.2) [2]. Предложены и другие приемы [60, 80], позволяющие выразить коэффициенты режима для промежуточной области через таковые для "предельных" режимов в аналитическом виде. В результате появляется возможность расчета не только коэффициента сопротивления тел, но и других составляющих силы и момента.

В теоретических и экспериментальных исследованиях [62–64] были выявлены и обоснованы параметры подобия, в числе которых число Маха набегающего потока M_∞ , число Рейнольдса Re_0 , при расчете которого коэффициент вязкости μ вычисляется по температуре торможения T_0 ; показатель степени n в законе, отражающем зависимость вязкости от температуры; отношение удельных теплоемкостей γ ; температурный фактор t_w . При больших значениях числа M_∞ важнейшими параметрами являются Re_0, t_w, γ . Весьма удачной оказалась модель [54] вида (3.3) для режима гиперзвукового обтекания, включающая функциональные зависимости коэффициентов режима от параметров Re_0, t_w, γ . Дальнейшее развитие методики [54] в основном применительно к тонким телам, осуществлено в [55, 72]; в коэффициенты моделей вводятся дополнительные параметры, отражающие влияние геометрических размеров летательного аппарата в продольном и поперечном направлениях, а также M_∞ . Несколько иные, по сравнению с [54, 55], аппроксимационные формулы были получены в [7]. Предложены и иные локальные и квазилокальные модели и методы, учитывающие конечность чисел Маха [8, 10], кривизну поверхности [26], ее шероховатость [94], разработаны варианты моделей для тонких тел [22, 24, 81].

Совершенствуются методы идентификации модели по значениям интегральных характеристик тел и пластины, полученным из эксперимента [78, 81, 95]. Достаточно общие методы решения обратных задач для тел вращения и соответствующий обзор представлены в работе [80].

В связи с тем что локальные модели, предлагаемые для промежуточной области течения разреженного газа, носят полуэмпирический характер, весьма важна проверка их адекватности с привлечением экспериментальных данных. В той или иной степени эта проблема затрагивается в большинстве работ соответствующей тематики, однако она становится и предметом специальных исследований [4].

В предельном случае свободномолекулярного потока локальный характер взаимодействия потока с поверхностью тела имеет достаточно высокий уровень теоретического обоснования, однако неопределенность в выборе некоторых параметров моделей оставляет место для их совершенствования. В числе различных подходов к этой проблеме (например, [101]) отметим в качестве способа повышения точности модели учет зависимости коэффициентов, характеризующих передачу импульса к поверхности тела, от угла θ [28, 82, 111].

Модель, используемая для расчета теплотокота к поверхности тела при свободномолекулярном обтекании разреженным газом, принадлежит классу локальных моделей. Существование локальных моделей для расчета теплотокота применительно к обтеканию "плотным" газом – основа для ряда исследований [16, 17], базирующихся на общем представлении зависимости теплотокота от угла θ ; в указанных работах приводятся ссылки на конкретные зависимости. В [14] и последующих работах, анализ которых содержится в обзоре [18], проведено исследование распределения лучистых теплотокотов по поверхности пространственных тел и тел вращения при обтекании воздухом при полете со скоростями от 8 до 18 км/с на высотах 40–80 км; в широком диапазоне варьировались размеры тела. В результате предложена формула для расчета локального теплотокота при пространственном и осесимметричном обтекании, которая приводит к локальной модели для тел вращения. Локальность по теплотокотам наблюдается с достаточно высокой точностью и для некоторых классов пространственных тел, например, для эллиптических параболоидов при гиперзвуковом обтекании применительно к конвективной теплопередаче [66].

Таким образом, локальность по теплотокотам имеет место для свободномолекулярного обтекания и в ряде ситуаций для обтекания плотным газом. Следовательно, для допущения о локальном характере теплового воздействия в промежуточной области течения разреженного газа имеются те же предпосылки, что и в случае моделирования силового воздействия. Это позволило распространить на процесс передачи энергии для промежуточного режима методологию, отработанную ранее применительно к передаче импульса [23, 110].

4. Расчет и оптимизация интегральных характеристик на основе конкретных локальных моделей. Если известна модель взаимодействия среды с поверхностью тела, позволяющая определить локальные характеристики силового или теплового воздействия в каждой ее точке, то вычисление суммарных характеристик может осуществляться непосредственно путем интегрирования соответствующей характеристики по поверхности тела. В случае конкретных моделей вида (3.1) упрощение расчетов функций формы для типовых тел может достигаться их табулированием [9], или иными способами [35, 80].

Проблемы возникают применительно к телам сложной формы (в частности, орбитальным космическим аппаратам с раскрытыми солнечными батареями) в связи со сложностью определения освещенной поверхности. Даже в случае простейших локальных моделей (без учета воздействия отраженных молекул) необходимость уменьшения времени расчета, особенно в ситуациях, когда нужно оперативно учитывать изменение ориентации тела при его движении в потоке, приводит к необходимости разработки специальных методов и алгоритмов [6, 68]. Эта проблематика имеет общий характер и степень эффективности найденных приемов инварианта относительно выбора той или иной конкретной модели.

Метод "дифференциальных уравнений" является специфическим для теории локального взаимодействия методом расчета. Его суть заключается в сведении задачи расчета суммарных характеристик во всем диапазоне углов, определяющих ориентацию тела относительно характерного движения среды, к решению рекуррентной системы дифференциальных уравнений типа Пуассона (в случае пространственных тел) либо Лежандра (для тел вращения). Так как вид общих решений таких уравнений известен, дело сводится к определению частных решений и констант. Эффективность методики по сравнению с обычным интегрированием по поверхности определяется

возможностью повышения быстродействия и получения приближенных зависимостей путем представления решений в виде рядов. Можно выделить два основных этапа эволюции метода.

Первый этап, представленный [107, 113, 114] охватывает период с 1965 по 1973 гг., когда метод развивался применительно к простейшей модели Ньютона. Начало второго этапа связывается с переходом к классу моделей (3.3) в связи с обобщением метода. Теоретические основы такого обобщенного подхода разработаны в [31, 32, 45, 115]; последующие публикации [27, 46–48, 92 и др.] связаны с развитием различных его аспектов, созданием методов, алгоритмов и программ расчета на его основе и т.д. К концу 1970-х годов развитие теоретических и практических аспектов метода для класса моделей (3.3) позволило включить его в арсенал стандартных способов расчета интегральных характеристик.

Дальнейшее развитие метода связано с использованием в (3.1) функций более общего вида, чем (3.3), последовательно соответствующий подход изложен в монографии [80], где приводится библиография.

В связи с запросами практики естественным образом возникла проблема определения аэродинамических характеристик тел при их непоступательном движении. Использование для этих целей локальных моделей имеет давние традиции применительно к расчету сил и моментов при свободномолекулярном обтекании [53, 70]; при этом обычно использовалась упрощенная модель [116]. Более детальный анализ поведения аэродинамических характеристик осуществлялся на основе вычисления и исследования вращательных производных; среди работ, базирующихся на локальных моделях, отметим [106] (модель Ньютона), цикл работ [28, 69, 98] (свободномолекулярный режим), а также работу [3], численно подтвердившую аналитические формулы в сопоставимых условиях.

Одна из сложных проблем, возникающих при расчете нестационарных аэродинамических характеристик на основе локальных моделей, связана с тем, что граница освещенной области оказывается зависящей от угловой скорости тела и для упрощения расчетов такой зависимостью часто пренебрегают. Исследование этой проблемы явилось одним из существенных моментов работы [98], где применительно к гипертепловому приближению [116] показано, что вращение не влияет на структуру освещенной области на поверхности тела.

С середины 1970-х годов начинают развиваться исследования рассматриваемого направления применительно к промежуточной области течения разреженного газа. В [87] приводятся результаты численных расчетов вращательных производных некоторых классов тел. Дальнейшие исследования [45, 56, 90] осуществлялись с использованием аналитических методов на основе модели [54, 55]. Они привели к появлению формул для расчета аэродинамических характеристик, вращательных производных первого и второго порядка, выявлению особенностей влияния вращения тела на значения составляющих сил и моментов. На численные решения с учетом вращения тела ориентирована модель [72].

До настоящего времени почти отсутствуют экспериментальные исследования и "точные" расчеты, позволившие бы проанализировать адекватность теоретических результатов для нестационарного движения тел в промежуточной области течения разреженного газа, основанных на моделях, апробированных применительно к стационарному движению тел.

Аналогичная ситуация имеет место и в связи с исследованиями по оптимизации формы тел в переходной области течения разреженного газа, которые начали развиваться с конца 1970-х годов [37, 42, 44, 49, 85]. Тем не менее результаты, полученные для затупленных тел вращения, можно считать относительно надежными ввиду всесторонней апробации модели [54], на которой основывались исследования.

Вариационные задачи оптимизации формы тел на базе локальных моделей применительно к свободномолекулярному режиму и режиму сверхзвукового обтекания

"плотным" газом исследовались в основном в рамках подходов [74, 118], причем авторы некоторых публикаций (например, [29]) возвращались к задачам [118] с целью их более внимательного и корректного рассмотрения.

В последние годы все большее внимание уделяется исследованию задач оптимизации формы тел, летящих в "плотном" газе, когда в качестве критерия либо ограничения фигурирует тепловой поток к поверхности. Обзор соответствующих работ можно найти в [18]; эта тематика является предметом исследований и в последующих публикациях [19, 57]. Для расчета давления на поверхности тела используется "локальная" модель Ньютона; для расчета теплоточков – как локальные, так и более сложные модели. Примером применения локальной модели может служить работа [19], в которой для расчета лучистого теплопотока к поверхности пространственного тела использовалась модель [14] с учетом "правил площадей" [16]. Задачи оптимизации формы тел по своей сути являются многокритериальными; традиционный способ учета этого фактора – вынесение главного критерия в целевой функционал и учет остальных через ограничения. В большей степени адекватен ситуации подход [57], при котором многокритериальность изначально учитывается при формализации задачи.

Успехи в области создания моделей, появление эффективных методов расчета послужили основой создания соответствующих программных комплексов ([1, 27, 48, 72, 99, 112] и др.), причем 1980-е годы ознаменовались переходом к широкому практическому использованию "локальных" методов. Помимо прикладного эта тенденция имеет важное значение и для развития самой теории, ибо наличие "обратной связи" служит источником получения обоснованных оценок для анализа локальных моделей и методов, стимулируя развитие теории в наиболее важных направлениях.

5. Исследования общих свойств локальных моделей и их приложения. Развитие теории локального взаимодействия с конца 1970-х годов характеризуется закономерно усиливающимся интересом к исследованию наиболее общих свойств локальных моделей, являющихся следствием именно специфики представления (1.1), а не конкретной модели, описывающей воздействие среды на тело в определенных условиях. Теория локального взаимодействия часто используется в условиях, когда отсутствует традиционное теоретическое обоснование вида модели, поэтому результаты, вытекающие из предположения о "локальности" могут оказаться более надежными, чем те, что базируются на конкретной модели, убедительные обоснования которой отсутствуют.

В исследованиях, которые привели к созданию методов расчета суммарных характеристик воздействия среды на поверхность движущегося в ней тела, не требующих знания конкретной модели взаимодействия, можно проследить некоторую аналогию с методами теории подобия [91]. Гипотеза локального взаимодействия по существу постулирует локальное подобие воздействия на одинаково ориентированные в потоке площадки, взаимодействующие со средой в "одинаковых условиях".

Предпосылки создания методов расчета, базирующихся на инвариантных соотношениях между интегральными характеристиками тел, были заложены в [36, 108], в которых разработан аппарат построения линейных соотношений, базирующийся на знании конкретных моделей. Принципиально новые результаты дали дальнейшие исследования [13, 65, 103], ибо они привели к универсальным (инвариантным) соотношениям, остающимся справедливыми при вариации модели взаимодействия среды с телами (с сохранением общего свойства локальности), а для тел вращения и некоторых тел более сложной формы – и угла атаки (одинакового для всех тел). Наличие таких соотношений позволяет рассчитать интегральные характеристики некоторого тела путем "разложения" по базисным телам, для которых они известны, т.е. метод работает в условиях, когда отсутствует конкретная модель, необходимая для прямого расчета. Заложенные в методе идеи нашли свое дальнейшее развитие применительно к построению аппроксимационных зависимостей [12].

Обобщенный подход оказался конструктивным и применительно к исследованию статической устойчивости тел. Для некоторых простых форм тел (прямой круговой

конус, клин, пластинка) независимость положения центра давления от угла атаки установлена на основе модели Ньютона либо более точных моделей [76]. Прямо или косвенно связаны с исследованием проблем устойчивости на основе модели Ньютона многие публикации [67, 83, 84 и др.] из большого цикла работ по исследованию тел звездобразной формы. В рассматриваемом аспекте работа [83] интересна тем, что ряд исследований в ней базируется не на конкретной модели, а на предположении о коническом характере течения на поверхности тела. В рамках такой общей модели установлена независимость положения центра давления острых эллиптических конусов от угла атаки и условий воздействия потока на тело по нормали к его поверхности.

Дальнейшие исследования [36, 103] показали, что свойством неизменности положения центра давления обладают кроме конусов следующие классы тел с эллиптической формой поперечного сечения: сегменты, цилиндры, а также комбинированные тела, включающие цилиндрические и конические элементы с плоским затуплением либо (при соответствующем выборе геометрических размеров) затуплением по эллипсоиду (в частности, сегментально-конические и сегментально-цилиндрические тела, двойные конуса и др.). Это свойство имеет место также для широкого класса конических тел, поперечное сечение которых ограничено отрезками прямых и дуг эллипса, в частности для правильных пирамид и ромбовидных крыльев. Разработан математический аппарат геометрического конструирования таких тел.

Правила площадей в соответствии с которыми интегральные характеристики тел близки, если одинаковы законы изменения площади поперечного сечения в направлении потока и выполняется ряд дополнительных условий, известны для широкого круга условий обтекания и различных конфигураций; соответствующий обзор содержится в [15]. В ряде работ для обоснования правил площадей использовались локальные подходы или близкие к ним. На основе модели Ньютона правила площадей для величины сопротивления выведены в [76]: исследование, базирующееся на концепции локальности, представлены в [15, 16] применительно к теплотокам и в [86] для следа за пространственным телом. Справедливость правил площадей для сопротивления тел, близких по форме к телам вращения, а также их аналоги для ряда других пространственных конфигураций установлены в [42] применительно к общему классу локальных моделей.

Рассмотрение задач оптимизации формы тел на основе общей локальной модели [40] привело к выявлению аэродинамических форм, оптимальные свойства которых сохраняются при изменении конкретной локальной модели.

Важным этапом развития общей теории локального взаимодействия являлось ее обобщение на случай нестационарно движущихся тел [39]. Если при поступательном движении тела скорость каждой точки его поверхности одна и та же и ее влияние на интегральные характеристики прямо или косвенно можно учесть через глобальные параметры взаимодействия тела со средой, то наличие вращения делает принципиальной необходимость учета распределения скорости по поверхности тела. Учет этого фактора приводит в общем случае к необходимости введения в модель второго локального параметра – местной скорости. Однако большое число известных локальных моделей позволяет при обобщении на случай вращающихся тел сохранить описание с использованием функций лишь одного глобального параметра. Дальнейшие исследования [39, 41] проведены для достаточно общего подкласса локальных моделей. Получены формулы для расчета вращательных производных первого и второго порядка для тел вращения при малой угловой скорости. При этом удалось обобщить ряд закономерностей поведения суммарных характеристик, выявленных ранее для конкретных моделей.

В связи с обсуждением общих методов теории локального взаимодействия отметим монографию [80], характеризующуюся методологическим единством предпринятого подхода. Плодотворной оказалась установленная в ней связь локальной теории с проблемой моментов Маркова, что позволило, в частности, применить соответствующий математический аппарат для решения ряда задач.

6. Нетрадиционные области приложения теории локального взаимодействия. Использование локальных методов в сверхзвуковой аэродинамике и газовой динамике, а также для моделирования воздействия на тело светового потока можно отнести к традиционным направлениям их применения. Однако соответствующие подходы охватывают и другие области механики, иные условия взаимодействия среды с поверхностью тел.

В [88] сделана попытка использовать "локальный" подход применительно к условиям дозвукового обтекания тел. В [75, 93] предложена локализованная модель для описания воздействия на поверхность тела сильно разреженной плазмы и выведены формулы для расчета суммарных сил для тел простой формы. В [97] на основе подхода [43] к моделированию свободномолекулярных и близких к ним течений в решетках, каналах и проницаемых поверхностях предложена "локальная" модель для описания воздействия гиперзвукового свободномолекулярного потока на сетчатую поверхность.

В ряде работ [30, 50, 85] модели локального взаимодействия используются для описания воздействия грунтов и металлов на поверхность тел в задачах оптимизации их формы при высокоскоростном движении в этих средах или проникании в них; определенные предпосылки для такого подхода содержатся в [30, 52, 89]. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что использование модели Ньютона приводит к формам ударников, обладающих хорошими проникающими свойствами применительно к грунтам и металлам. Задачи оптимизации формы проникающих тел принципиально отличаются от таковых для движущихся в среде тел, ибо в качестве критерия выступает некоторая интегральная характеристика (обычно глубина проникания), которая определяется в результате интегрирования уравнения движения тела, составленного с учетом изменения поверхности контакта в процессе внедрения тела в среду [89].

В ряде сложных задач локальные модели используют в качестве нулевого приближения при поиске решения в форме разложения по характерному для исследуемой задачи малому параметру. Например, при исследовании пространственного обтекания крыльев гиперзвуковым потоком газа известным асимптотическим методом тонкого ударного слоя решение задачи обтекания ищется в форме разложения по малому параметру, характеризующему отношение плотностей на сильном головном скачке уплотнения [58], причем нулевым приближением, соответствующим бесконечно тонкому сжатому слою является Ньютонская схема обтекания.

Таким образом, подходы с позиций теории локального взаимодействия оказались весьма плодотворными в различных областях механики, причем в процессе развития теории расширяются границы ее применения. Это позволяет прогнозировать новые интересные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамович Ю.В., Широкопояс Е.П.* Инженерная методика расчета на ЭВМ аэродинамических характеристик летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях // *Тр. ЦАГИ.* 1974. Вып. 1580. С. 3–29.
2. *Абрамовская М.Г., Басс В.П.* Исследование аэродинамических характеристик круговых конусов в переходном режиме обтекания // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1980. Т. 11. № 1. С. 122–126.
3. *Абрамовская М.Г., Басс В.П.* Аэродинамические характеристики вращающихся тел в многокомпонентном потоке разреженного газа // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 6. С. 166–169.
4. *Абрамовская М.Г., Басс В.П.* К расчету аэродинамических характеристик тел в переходном режиме обтекания // *Космические исследования на Украине.* Киев: Наука. думка, 1982. Вып. 16. С. 29–34.
5. *Абрамовская М.Г., Басс В.П., Лиманский А.В., Тимошенко В.И.* К расчету аэродинамических характеристик тел в переходном режиме обтекания // *Прикладная аэродинамика космических аппаратов.* Киев: Наук. думка, 1977. С. 69–75.
6. *Абрамовская М.Г., Басс В.П., Перминов В.Д., Шведов А.В.* О некоторых усовер-

- шенствованных алгоритмах расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов в свободномолекулярном потоке // Тр. ЦАГИ. 1990. Вып. 2436. С. 68–74.
7. Аксенова О.А. Зависимость коэффициента режима в теории локального взаимодействия от параметров режима // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1989. Вып. 1. № 1. С. 100–102.
 8. Алексеева Е.В., Алексеева С.Н. Учет влияния конечности чисел Маха на коэффициенты режима в теории локального взаимодействия // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. Вып. 11. С. 243–247.
 9. Алексеева Е.В., Баранцев Р.Г. Локальный метод аэродинамического расчета в разреженном газе // Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 210 с.
 10. Алексеева С.Н., Баранцев Р.Г., Эндер И.А. Теория локального взаимодействия с учетом конечности чисел Маха // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ. 1976. Вып. 8. С. 162–171.
 11. Алексеева С.Н., Мирошин Р.Н. О зависимости параметров локального взаимодействия от числа Кнудсена // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. Вып. 7. С. 180–190.
 12. Антонец А.В. Аппроксимирование сложных зависимостей величин подбором весовых коэффициентов в формулах осреднения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 161–165.
 13. Антонец А.В., Дубинский А.В. Метод вычисления аэродинамических характеристик тел на основе инвариантных соотношений теории локального взаимодействия // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 872–874.
 14. Апиштейн Э.З., Вартамян Н.В., Сахаров В.И. О распределении лучистых тепловых потоков по поверхности пространственных и осесимметричных тел при сверхзвуковом обтекании их идеальным газом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 92–97.
 15. Апиштейн Э.З., Колотилова Н.Г. Правило площадей для интегральных величин // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 157–159.
 16. Апиштейн Э.З., Пилюгин Н.Н. Правило площадей для коэффициента теплообмена пространственных аблирующих тел при тепловых потоках, локально зависящих от угла наклона поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 71–76.
 17. Апиштейн Э.З., Пилюгин Н.Н. Стационарная форма тел при их разрушении под действием тепловых потоков, зависящих от угла наклона поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 137–143.
 18. Апиштейн Э.З., Пилюгин Н.Н., Севастьяненко В.Г., Турский Г.А. Радиационный теплообмен при входе тел в атмосферу Земли и планет со сверхорбитальными скоростями // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газов. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 23. С. 116–236.
 19. Аргучинцева М.А., Пилюгин Н.Н. Пространственные формы тел с минимальным нагревом поверхности при гиперзвуковом движении в атмосфере // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 5. С. 615–628.
 20. Аэрогидродинамика / Под ред. Е.Н. Бондарев, В.Т. Дубов, Ю.А. Рыжов и др. М.: Машиностроение, 1993. 608 с.
 21. Аэродинамика разреженных газов // Вып. 1–11. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963–1983.
 22. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 343 с.
 23. Баранцев Р.Г. Локальная теория передачи импульса и энергии на поверхности тел в разреженном газе // Математическое моделирование, аналитические и численные методы в теории переносов. Минск, 1982. С. 90–98.
 24. Баранцев Р.Г. Вариант локального метода для тонких тел в разреженном газе // Вестн. ЛГУ. 1982. Сер. 1. № 13. Вып. 3. С. 99–101.
 25. Баранцев Р.Г., Васильев Л.А., Иванов Е.В., Козачек В.В., Минайчев А.Д., Михайлов Л.В., Мурзов Н.В. Аэродинамический расчет в разреженном газе на основе гипотезы локальности // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. Вып. 4. С. 170–184.
 26. Баранцев Р.Г., Федорова В.М. Неизотропный эффект кривизны в теории локального взаимодействия // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. Вып. 10. С. 192–197.
 27. Басс В.П., Тимошенко В.И. Применение метода локального взаимодействия к расчету аэродинамических характеристик тел сложной формы в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 28–37.

28. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев.: Наук. думка, 1984. 187 с.
29. *Бердичевский В.Л.* О форме тела минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке газа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1975. № 3. С. 90–96.
30. *Бондарчук В.С., Ведерников Ю.А., Дулов В.Г., Минин В.Ф.* К оптимизации звездобразных ударников // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1982. № 13. Вып. 3. С. 60–65.
31. *Бунимович А.И.* Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 89–95.
32. *Бунимович А.И.* Аэродинамические характеристики осесимметричных тел при обтекании в условиях "закона локальности" // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1974. № 4. С. 97–102.
33. *Бунимович А.И.* "Закон локальности" в аэродинамике и динамике разреженного газа // Тр. 4-й Всесоюз. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. Москва, 1975. М.: ЦАГИ, 1977. С. 399–404.
34. *Бунимович А.И.* Теория локального взаимодействия в динамике разреженного газа // Аэротермогазодинамика в разреженных потоках. М.: Изд-во МАИ, 1988. С. 25–39.
35. *Бунимович А.И., Воротынецев М.А., Сазонова Н.И.* К вопросу об определении аэродинамических характеристик тел, обтекаемых поступательным потоком в условиях "закона локальности" // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1975. № 6. С. 111–116.
36. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* Обобщенные законы подобия при обтекании тел в условиях "закона локальности" // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 857–863.
37. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* Оптимальные тупоносые тела вращения в газе различной разреженности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 158–161.
38. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* О центре давления тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 129–133.
39. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* Аэродинамические характеристики произвольно вращающихся тел в газе различной разреженности // Космич. исслед. 1989. Т. 27. № 2. С. 180–185.
40. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* О телах минимального сопротивления в разреженном газе // Волновые задачи механики деформируемых сред. М.: Изд-во МГУ, 1990 Ч. 1. С. 118–125.
41. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* О расчете вращательных производных при "локальном" взаимодействии потока с поверхностью тела // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 52–57.
42. *Бунимович А.И., Дубинский А.В., Кузьменко В.И.* Об аэродинамических и тепловых характеристиках и оптимальной форме тел, обтекаемых разреженным газом // Динамика разреженного газа: Тр. 6-й Всес. конф. 1979. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1980. Ч. 2. С. 49–54.
43. *Бунимович А.И., Каган М.Л.* Свободномолекулярное течение газа в плоских каналах и решетках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 129–131.
44. *Бунимович А.И., Кузьменко В.И.* Аэродинамические и тепловые характеристики пространственных звездчатых тел в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 181–183.
45. *Бунимович А.И., Сазонова Н.И.* Аналитический метод определения аэродинамических сил и моментов при нестационарном движении тел в газе различной разреженности // Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1979. Вып. 2. С. 32–43.
46. *Бунимович А.И., Чистолинов В.Г.* Аналитический расчет аэродинамических характеристик тел вращения в условиях закона локальности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 94–100.
47. *Бунимович А.И., Чистолинов В.Г.* Аналитический метод расчета аэродинамических сил в пространственной задаче в условиях "закона локальности" // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 466–472.
48. *Бунимович А.И., Чистолинов В.Г.* Аналитический метод определения аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке газа различной разреженности // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 11–27.

49. Бунимович А.И., Якунина Г.Е. Исследование формы поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 112–117.
50. Бунимович А.И., Якунина Г.Е. О форме тел вращения минимального сопротивления, движущихся в пластически сжимаемой и упругопластической средах // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 496–503.
51. Васильев Л.А. Определение давления света на космические летательные аппараты. М.: Машиностроение. 1985. 208 с.
52. Витман Ф.Ф., Степанов В.А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 10^2 – 10^3 м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–221.
53. Галкин В.С. Определение моментов и сил, действующих на вращающиеся тела в свободномолекулярном потоке и в потоке света // Инж. журн. 1965. Т. 5. № 5. С. 954–958.
54. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.
55. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. О приближенном методе аэродинамического расчета в разреженном газе // Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2111. С. 27–35.
56. Галкин В.С., Зворыкин Л.Л. Вращательные производные тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1984. Вып. 2220. С. 3–15.
57. Гильман О.А. Пилюгин Н.Н. Парето-оптимальные формы осесимметричных тел при движении с большими сверхзвуковыми скоростями // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 290–297.
58. Голубкин В.Н. Пространственное обтекание крыльев гиперзвуковым потоком газа // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 148–161.
59. Горенбух П.И. Корреляционная зависимость для коэффициентов лобового сопротивления тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 99–105.
60. Горенбух П.И. О приближенном расчете аэродинамических характеристик простых тел при гиперзвуковом обтекании разреженным газом // Тр. ЦАГИ. 1990. Вып. 2436. С. 28–43.
61. Гусев В.Н. Аэротермодинамика высотного полета // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 2. С. 142–152.
62. Гусев В.Н., Ерофеев А.И., Климова Т.В., Перепухов В.А., Рябов В.В., Толстых А.И. Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1855. С. 3–43.
63. Гусев В.Н., Климова Т.В., Липин А.В. Аэродинамические характеристики тел в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока // Тр. ЦАГИ. 1972. Вып. 1411. С. 3–53.
64. Гусев В.Н., Коган М.Н., Перепухов В.А. О подобии и изменении аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 1. С. 24–32.
65. Дубинский А.В. Соотношения между силами, действующими на различные по форме тела, движущиеся в газе // ПММ. 1980. Т. 44. № 1. С. 178–181.
66. Знаменский В.В., Зубарев А.В. Расчет конвективных тепловых потоков при трехмерном обтекании по заданному распределению давления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 160–167.
67. Зубин М.А., Остапенко Н.А. Аэродинамические характеристики и запас статической устойчивости конических звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 6. С. 142–150.
68. Зуева Е.Ю., Комаров М.М., Сазонов В.В. Представление аэродинамического момента в задачах математического моделирования вращательного движения искусственных спутников Земли. // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 771–779.
69. Иванов С.Г., Янишин А.М. Силы и моменты, действующие на тела, вращающиеся относительно оси симметрии в свободномолекулярном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 151–155.
70. Ковтуненко В.М., Камеко В.Ф., Яскевич Э.П. Аэродинамика орбитальных космических аппаратов // Киев: Наук. думка, 1977. 156 с.
71. Коган М.Н. Динамика разреженного газа // М.: Наука, 1967. 440 с.

72. Котов В.М., Лычкин Е.Н., Решетин А.Г., Щелконогов А.Н. Расчет аэродинамических характеристик тел сложной формы в промежуточной области // Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.: Наука, 1986. С. 115–124.
73. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
74. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
75. Курьшев А.П., Филиппов Б.В., Ярцев В.П. Влияние тепловых скоростей ионов на аэродинамические характеристики тел в сильно разреженной плазме // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. Вып. 4. С. 149–162.
76. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
77. Мирошин Р.Н. Линейный регрессионный анализ экспериментов в разреженном газе // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970. Вып. 5. С. 14–38.
78. Мирошин Р.Н. Линейная независимость функций формы острых круговых конусов в теории локального взаимодействия // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1986. Вып. 2. С. 69–76.
79. Мирошин Р.Н. О зависимости коэффициента сопротивления выпуклых тел в разреженном газе от числа Рейнольдса // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1989. Вып. 2. С. 48–51.
80. Мирошин Р.Н., Халидов И.А. Теория локального взаимодействия. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 274 с.
81. Нарича В.С. Анализ аппроксимаций аэродинамических коэффициентов тонких тел в разреженном газе // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1987. Вып. 2. С. 114–116.
82. Омелик А.И. Измерение коэффициентов передачи импульса к поверхностям различной структуры в гиперзвуковом свободномолекулярном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С. 176–179.
83. Остапенко Н.А. О центре давления конических тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 99–104.
84. Остапенко Н.А. Конические тела со звездообразным поперечным сечением, обладающие запасом статической устойчивости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 84–92.
85. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О телах наименьшего сопротивления, двигающихся в средах при наличии закона локальности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 1. С. 95–106.
86. Пилюгин Н.Н., Тихомиров С.Г., Чернявский С.Ю. Правило площадей для следа за пространственным телом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 148–150.
87. Пономарев В.Я., Серегин В.С. Расчет на основе гипотезы локального взаимодействия аэродинамических характеристик типовых тел при стационарном и нестационарном движении в разреженном газе // Тр. 4-й Всесоюз. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. Москва. 1975. М.: ЦАГИ, 1977. С. 392–398.
88. Ризо А.Е. Эмпирические формулы для конусов в дозвуковой аэродинамике // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1988. Вып. 2. № 8. С. 116–117.
89. Сагомонян А.Я. Проникание // М.: МГУ, 1974. 299 с.
90. Сазонова Н.И. К вопросу о неустановившемся обтекании тел в условиях закона локальности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 168–173.
91. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
92. Тимошенко В.И. Использование дифференциальных соотношений для сил и моментов в теории локального взаимодействия для уточнения аэродинамических характеристик тел в разреженном газе // Динамика разреженного газа: Тр. 6-й Всесоюз. конф. 1979. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1980. Ч. 2. С. 104–109.
93. Филиппов Б.В. Обтекание тел сильно разреженной плазмой // Аэродинамика разреженных газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. Вып. 4. С. 133–141.
94. Хабалов В.Д. Учет влияния шероховатости поверхности на коэффициенты режима в теории локального взаимодействия // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1989. Вып. 1. С. 80–83.
95. Холявин И.И. Определение коэффициентов режима локальной теории взаимодействия по данным о пластине // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1986. № 2. С. 125–128.
96. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
97. Шведов А.В. О расчете аэродинамических характеристик тел с сетчатыми поверхностями в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1990. Вып. 2436. С. 44–60.
98. Яншин А.М., Иванов С.Г. Расчет нестационарных аэродинамических сил и моментов в

- свободномолекулярном режиме обтекания // Космич. исслед. 1989. Т. 27. Вып. 3. С. 385–391.
99. Antonov S.G., Ivanov M.S., Koshkovsky A.V., Chistolinov V.G. Influence of atmospheric rarefaction on aerodynamic characteristics of flying vehicles // Rarefied Gas Dynamics: Proc. of 17th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Aachen, 1990. Weinheim, 1991. P. 522–530.
 100. Barantsev R.G. Analytical studies of gas-surface interaction // Rarefied Gas Dynamics. Selected Papers 13th Intern. Symp. Novosibirsk, 1982. N.Y.: Plenum-Press. 1985. P. 645–652.
 101. Bellomo N., Riganti R., Vacca M.T. Stochastic dynamics of a flat plate in molecular flow. // Rarefied Gas Dynamics. 2. Techn. Papers 12th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Charlottesville. Va. 1980. N.Y.: AIAA, 1981. Pt. 2. P. 1063–1080.
 102. Boylan D.E., Potter J.L. Aerodynamics of typical lifting bodies under condition simulating very high altitudes // AIAA J. 1967. V. 5. № 2. P. 226–232.
 103. Bunimovich A.I., Dubinskii A.V. Local methods in rarefied gas dynamics // Rarefied Gas Dynamics. Selected Papers 13th Intern. Symp. Novosibirsk, 1982. N.Y.: Plenum Press, 1985. V. 1, P. 431–438.
 104. Evans W.J. Aerodynamic and Radiation Disturbance Torques on Satellites Having Complex Geometry // J. Astronaut. Sci. 1962. V. 9. № 4. P. 93–99.
 105. Ferrari C. Aerodynamic problems of re-entry. // Meccanica. 1971. V. 6. № 1. P. 23–42.
 106. Hinderland F.J., Meisinger R. Anwendbarkeit der Newtonischen Theorie zur Berechnung aerodynamischer Beiwerte und Stabilitätsderivativa // Raumfahrtforschung. 1974. Bd 18. H. 2. S. 79–84.
 107. Jaslow H. Aerodynamic relationships inherent in newtonian impact theory // AIAA J. 1968. V. 6. № 4. P. 608–612.
 108. Jaslow H. Nonaffine similarity laws inherent in newtonian impact theory // AIAA J. 1970. V. 8. № 11. P. 2062–2064.
 109. Matting F.W. Approximate bridging relations in the transitional regime between continuum and free molecule flows // J. Spacecraft and Rockets. 1971. V. 8. № 1. P. 35–40.
 110. Monaco R., Orsi A.P. Molecular Gas-Flow over convex bodies: a physico-mathematical model for heat transfer calculation // Appl. Math. Modell. 1980. V. 4. № 5. P. 325–330.
 111. Musanov S.V., Nikiforov A.P., Omelik A.I., Freedlender O.G. Experimental determination of momentum transfer coefficient in hypersonic free molecular flow and distribution function recovery of reflected molecules // Rarefied Gas Dynamics. Selected Papers 13th Intern. Symp. Novosibirsk, 1982. N. Y.: Plenum Press, 1985. P. 669–676.
 112. Perminov V.D., Gorelow S.L., Freedlender O.G., Khmel'nitsky A.A. Approximate aerodynamic analysis for complicated bodies in rarefied gas flow // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 17th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Aachen, 1990. Weinheim: VCH, 1991. P. 554–561.
 113. Pike J. The lift and drag of axisymmetric bodies in newtonian flow // AIAA. J. 1969. V. 7. № 1. P. 185–186.
 114. Pike J. Newtonian aerodynamics forces from Poisson's equation // AIAA J. 1973. V. 11. № 4. P. 499–504.
 115. Pike J. Forces on convex bodies in free molecular flow // AIAA J. 1975. V. 13. № 11. P. 1454–1459.
 116. Schrello D.M. Approximate free molecule aerodynamics characteristics // ARS J. 1960. V. 30. № 8. P. 765–767.
 117. Tactical Missile Aerodynamics / Ed. M.J. Hemsch., J.N. Nielsen. // N. Y.: AIAA, 1986. 852 p.
 118. Theory of Optimum Aerodynamic Shapes. N. Y.; L.: Acad. Press, 1965. 455 p. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1994