

УДК 532.51.011 : 536.242

© 1996 г. А.В. КАШЕВАРОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА И ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОСТИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПРАНДТЛЯ

Решена задача теплообмена при обтекании эллиптического цилиндра и пластины несжимаемой жидкостью с малым числом Прандтля $Pr \ll 1$. Для продольного обтекания пластины проведено сравнение чисел Нуссельта Nu , полученных путем решения полного уравнения энергии и уравнения теплового пограничного слоя.

1. При рассмотрении задачи конвективного теплообмена в жидкости с малым числом Pr можно допустить, что обтекание тела является потенциальным [1]. Формально это соответствует тому, что число Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$, число $Pr \rightarrow 0$. В [1] приведены два точных решения задачи теплообмена при таких условиях: для продольного обтекания полубесконечной пластины и для течения в окрестности критической точки затупленного тела. Эти решения получены в приближении теплового пограничного слоя, которое, как считается, справедливо при числах Пекле $Pe = Re Pr \gg 1$.

В отличие от [1] в [2] для обтекания кругового цилиндра при $Pr \rightarrow 0$ найдено точное решение задачи теплообмена в предположении, что число $Pe = O(1)$. В такой постановке требуется решать полное уравнение энергии, которое для случая постоянных физических свойств жидкости и температуры поверхности тела T_w^* записывается для избыточной температуры T в виде

$$2\kappa(\mathbf{u}\nabla T) - \Delta T = 0$$

$$T = \frac{T^* - T_w^*}{T_\infty^* - T_w^*}, \quad \mathbf{u} = \text{grad}\varphi, \quad \kappa = \frac{Pe}{2} \quad (1.1)$$

Здесь φ – потенциал течения, и поле скоростей \mathbf{u} задано.

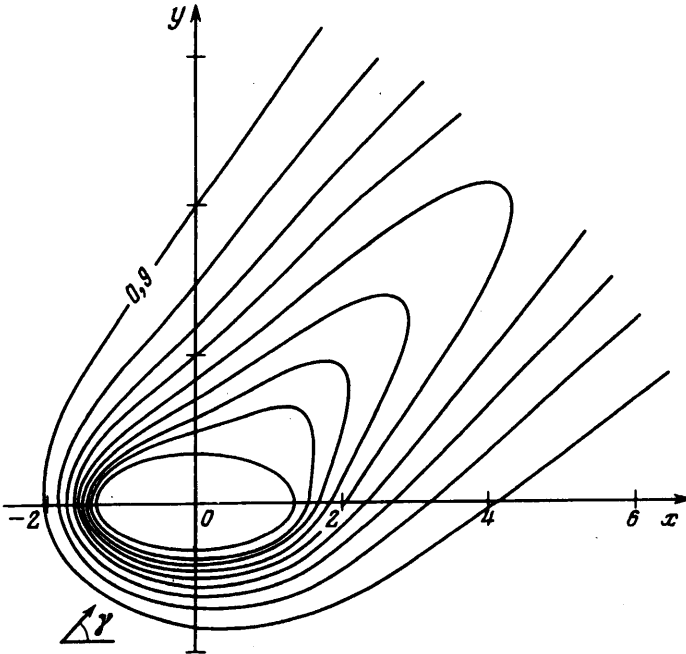
Легко убедиться, что подстановкой $T = 1 - \exp(\kappa\varphi)\vartheta$, пригодной как для плоских, так и для пространственных потенциальных течений, уравнение (1.1) приводится к виду

$$\Delta\vartheta = \kappa^2(\text{grad}\varphi)^2\vartheta = 0 \quad (1.2)$$

В ряде случаев оно может быть решено методом разделения переменных.

Рассмотрим плоское неизотермическое обтекание эллиптического цилиндра с большой полуосью a , малой полуосью b и межфокусным расстоянием $2c$ потенциальным потоком несжимаемой жидкости, причем обтекание происходит под углом атаки γ (фиг. 1). Решение уравнения (1.2) будем искать в эллиптических координатах (ξ, η) [3], в которых $a = c \operatorname{ch} \xi_0$, $b = c \operatorname{sh} \xi_0$, где ξ_0 – радиальная эллиптическая координата поверхности эллиптического цилиндра.

В качестве характерного размера возьмем полусумму $(a + b)/2$, так что связь между обезразмеренными таким образом декартовыми координатами (x, y) и эллиптическими



Фиг. 1. Картина изотерм при обтекании эллиптического цилиндра для $\xi_0 = 0,5$, $Pe = 4$, $\gamma = 45^\circ$. Шаг по температуре $\Delta T = 0,1$, начиная с $T = 0,2$

(ξ, η) будет даваться соотношениями

$$x = 2 \exp(-\xi_0) \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = 2 \exp(-\xi_0) \operatorname{sh} \xi \sin \eta \quad (1.3)$$

При $\xi = \xi_0 \rightarrow \infty$ соотношения (1.3) представляют собой параметрическое задание окружности единичного радиуса, то есть соответствуют обтеканию кругового цилиндра. При $\xi_0 = 0$ имеем предельный случай пластины с характерным размером, равным четверти ее длины $L/4$.

Коэффициенты Ламе для преобразования координат (1.3) равны

$$h_\xi = h_\eta = 2 \exp(-\xi_0) (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}$$

Из комплексного потенциала обтекания эллипса [4] получим

$$\varphi = 2 \operatorname{ch}(\xi - \xi_0) \cos(\eta - \gamma) \quad (1.4)$$

Записывая уравнение (1.2) в эллиптических координатах и используя (1.4), имеем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - 2\kappa^2 [\operatorname{ch} 2(\xi - \xi_0) - \cos 2(\eta - \gamma)] \vartheta = 0 \quad (1.5)$$

После разделения переменных в (1.5) получим, как и в случае кругового цилиндра [2], обыкновенные дифференциальные уравнения Матье. Окончательно для распределения температуры вокруг эллиптического цилиндра имеем

$$T = 1 - \exp[2\kappa \operatorname{ch}(\xi - \xi_0) \cos(\eta - \gamma)] \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{Fe}_n(\xi - \xi_0, -q) \operatorname{ce}_n(\eta - \gamma, -q) \quad (1.6)$$

Здесь C_n – постоянные интегрирования, Fe_n – модифицированные функции Матье второго рода, ce_n – обычные функции Матье первого рода [3], $q = \kappa^2$.

Для сравнения приведем аналогичное решение для кругового цилиндра в полярных координатах (r, θ) [2]

$$T = 1 - \exp[\kappa(r + r^{-1})\cos\theta] \sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{Fe}_n(\ln r, -q) c e_n(\theta, -q) \quad (1.7)$$

Решение (1.7) может быть получено из (1.6), полагая в нем $\eta - \gamma = \theta$ и принимая во внимание, что $\exp(\xi - \xi_0) \rightarrow r$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi_0 \rightarrow \infty$.

Постоянные C_n , как можно видеть из (1.6), полагая в нем $T = 0$ при $\xi = \xi_0$, не зависят ни от формы эллипса, определяемой параметром ξ_0 , ни от угла атаки γ , а только от числа Pe . Кроме того, при одном и том же числе Pe постоянные C_n одинаковы как для эллиптического, так и для кругового цилиндра.

В случае кругового цилиндра эти постоянные определялись в [2], но неоптимальным образом. Их можно получить в явном виде, разлагая функцию $\exp(-2\kappa \cos \theta)$ непосредственно в ряд по функциям Матье. В результате имеем

$$C_{2n} = \frac{2 c e_{2n}(0, -q) A_0^{(2n)}}{c e_{2n}(0, q) \text{Fe}_{2n}(0, -q)}$$

$$C_{2n+1} = -\frac{2 c e_{2n+1}(0, -q) \kappa B_1^{(2n+1)}}{s e'_{2n+1}(0, q) \text{Fe}_{2n+1}(0, -q)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $A_0^{(2n)}$ и $B_1^{(2n+1)}$ – коэффициенты разложений в тригонометрические ряды функций $c e_{2n}(\theta, q)$ и $s e_{2n+1}(\theta, q)$ соответственно, штрих означает производную.

2. На фиг. 1 представлен пример расчета по (1.6) картины изотерм при обтекании эллипса под углом атаки γ .

Для локального числа Нуссельта Nu из (1.6), вводя угол $\theta = \eta - \gamma$, отсчитываемый от задней критической точки, имеем

$$Nu(\theta) = |\text{grad } T| \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{1}{2} \exp \xi_0 (\text{ch}^2 \xi_0 - \cos^2(\theta + \gamma))^{-1/2} Nu_c(\theta) \quad (2.1)$$

$$Nu_c(\theta) = -\exp(2\kappa \cos \theta) \sum_{n=0}^{\infty} C_n F e'_n(0, -q) c e_n(\theta, -q)$$

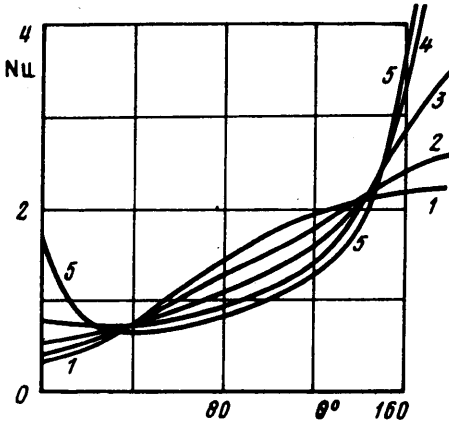
Здесь $Nu_c(\theta)$ – распределение локального числа Нуссельта по обводу кругового цилиндра.

Таким образом, для того чтобы определить число Nu в некоторой точке поверхности эллиптического цилиндра любой вытянутости и обтекаемого под любым углом атаки, достаточно рассчитать зависимость $Nu_c(\theta)$ для кругового цилиндра. Искомая величина для эллиптического цилиндра получается затем простым пересчетом.

На фиг. 2 приведены зависимости $Nu(\theta)$ для эллиптического цилиндра, обтекаемого при $Pe = 4$ вдоль большой оси ($\gamma = 0^\circ$) при различных ξ_0 . Максимальные значения числа Nu при всех ξ_0 достигаются в передней критической точке цилиндра ($\theta = 180^\circ$). Минимальные значения при не слишком малых ξ_0 имеют место в задней критической точке ($\theta = 0^\circ$). При уменьшении параметра ξ_0 , т.е. когда эллипс становится все более вытянутым, приближающимся к пластине, в задней критической точке появляется локальный максимум.

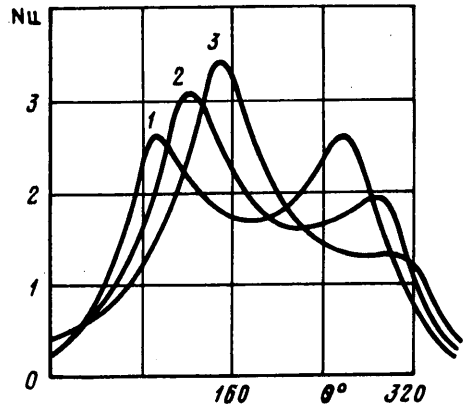
Для пластины при $\xi_0 = 0$ из (2.1) следует, что число Nu принимает бесконечные значения на острых краях при $\theta = -\gamma$ и $\theta = \pi - \gamma$. Скорость при потенциальном обтекании также имеет в этих точках бесконечные значения [4].

Проследим, как меняются зависимости $Nu(\theta)$ при изменении угла атаки γ . Ясно, что влияние γ сказывается тем больше, чем меньше ξ_0 . Эти зависимости в случае $Pe = 4$, $\xi_0 = 0,5$ представлены на фиг. 3, причем кривая 1 соответствует обтеканию эллипса вдоль малой оси.



Фиг. 2

Фиг. 2. Распределение локального числа Nu по обводу эллиптического цилиндра при $Pe = 4$, $\gamma = 0^\circ$ для $\xi_0 = 10, 1, 0,5, 0,25, 0,1$ (кривые 1-5 соответственно)



Фиг. 3

Фиг. 3. Распределение локального числа Nu по обводу эллиптического цилиндра при $Pe = 1$, $\xi_0 = 0,5$ для $\gamma = 90, 60, 30^\circ$ (кривые 1-3)

Минимум числа Nu достигается в задней критической точке, максимум в окрестности точки максимальной кривизны эллипса $\theta = \pi - \gamma$ с наветренной стороны. Лишь для эллипса близкого к окружности число Nu будет иметь максимум в передней критической точке.

Среднее на единицу длины обвода цилиндра число $\langle Nu \rangle$ определяется выражением

$$\langle Nu \rangle = \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} Nu(\eta - \gamma) h_\eta d\eta = \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} Nu_c(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{l} \langle Nu_c \rangle$$

$$l = 8 \exp(-\xi_0) \operatorname{ch} \xi_0 E(e), \quad e = \frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0}$$

Здесь l – длина эллипса, $E(e)$ – полный эллиптический интеграл второго рода, e – эксцентриситет. Для круга ($\xi_0 \rightarrow \infty$) $l = 2\pi$, для пластины ($\xi_0 = 0$) $l = 8$.

Таким образом, число $\langle Nu \rangle$ для эллиптического цилиндра легко находится по рассчитанному числу $\langle Nu_c \rangle$ для кругового цилиндра. Зависимость $\langle Nu_c \rangle (Pe)$ представлена на фиг. 4.

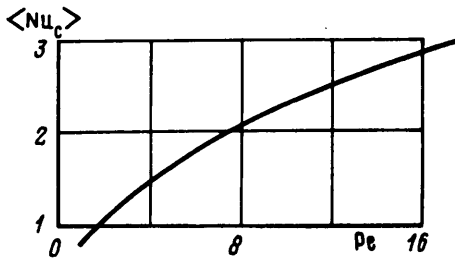
Число $\langle Nu \rangle$ для заданного эллиптического цилиндра в рассматриваемой здесь постановке не зависит от угла атаки γ , под которым происходит обтекание эллипса. Число $\langle Nu \rangle$ для пластины остается конечным, несмотря на то что местное число Nu принимает бесконечные значения на острых краях.

При определении числа Nu для пластины целесообразно перейти от характерного размера, принятого в настоящей работе, к общепринятому, т.е. к длине пластины L . Тогда для среднего числа $\langle Nu_L \rangle$ при использовании длины L в качестве характерного размера имеем простую связь с числом $\langle Nu_c \rangle$ кругового цилиндра $\langle Nu_L \rangle = \pi \langle Nu_c \rangle$, а число $Pe_L = 4Pe$.

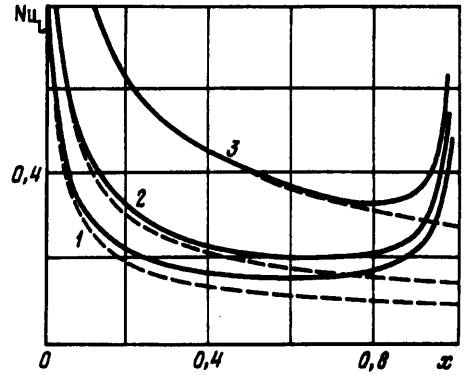
3. Для продольного обтекания полубесконечной пластины жидкостью с числом $Pr \ll 1$ известно также точное решение уравнения теплового пограничного слоя [1]. Сравним результаты, которые дают два точных решения.

Для полубесконечной пластины рассмотрим отрезок длиной L , начинающийся от передней кромки. Тогда результат [1] можно переписать в виде

$$Nu_L(x) = \sqrt{\frac{Pe_L}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (3.1)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимость от числа Re среднего числа $\langle Nu_c \rangle$ для кругового цилиндра

Фиг. 5. Распределения локального числа Nu_L по длине пластины для $Re_L = 0,4; 1; 4$ (кривые 1–3). Штриховые линии – приближение пограничного слоя, сплошные – решение полного уравнения энергии

Здесь $0 < x \leq 1$ – расстояние от передней кромки, обезразмеренное через характерную длину L .

Зависимости (3.1) для различных Re_L приведены на фиг. 5 штриховыми линиями. Сплошными линиями показаны зависимости $Nu_L(x)$, полученные с помощью (2.1). При $Re_L = 0,4$ (кривые 1) заметно различие между двумя зависимостями.

При малых $Re_L \ll 1$ из (2.1) можно получить следующую асимптотику для Nu_L при $x \rightarrow 0$, отличающуюся от (3.1)

$$Nu_L(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{C + \ln(Re_L/4)}$$

где $C = 0,577\dots$ – постоянная Эйлера.

При $Re_L = 1$ (кривые 2) значения $Nu_L(x)$, определенные по (3.1) и с помощью (2.1) уже мало отличаются друг от друга при $x < 0,1$. Различие не превышает 2%. При $Re_L = 4$ (кривые 3) обе формулы дают практически одинаковые результаты при $x < 0,5$.

При дальнейшем увеличении числа Re_L протяженность зоны, в которой точное решение уравнения теплового пограничного слоя дает числа Nu_L с пренебрежимо малой погрешностью по отношению к точному решению уравнения энергии увеличивается. Однако вблизи задней кромки всегда имеется существенное различие между числами Nu_L , найденными из двух упомянутых решений.

Можно утверждать, что при $Re_L \rightarrow \infty$ уравнение теплового пограничного слоя пригодно для расчета теплоотдачи на всей поверхности пластины, за исключением бесконечно малой окрестности задней кромки.

Различие между числами Nu_L , получающимися из двух решений, можно объяснить распространением возмущения, создаваемого задней кромкой вверх по потоку на расстоянии тем больше, чем меньше число Re_L .

В [2] проведено сравнение результатов расчета теплоотдачи с помощью двух точных решений для лобовой критической точки кругового цилиндра. Получено, что числа Nu , определенные в этой точке двумя способами, практически совпадают не только при $Re \gg 1$, но также и при достаточно малых числах $Re \sim 1$.

Для передней критической точки эллипса из [1] будем иметь

$$Nu_0 = \frac{\exp \xi_0}{\sqrt{ch^2 \xi_0 - \cos^2 \gamma}} \sqrt{\frac{Pe}{\pi}}$$

Расчеты показывают, что вывод, сделанный в [2] для передней критической точки кругового цилиндра, справедлив и для эллиптического цилиндра любой формы, включая пластину, и ориентации.

Выводы этого пункта, вероятно, можно распространить и на случай $Pr \sim 1$. Так, в [5] для задачи конвективного массопереноса теории электрического зонда, в математическом отношении эквивалентной задаче теплопереноса, проводилось сравнение результатов расчетов тока насыщения (что эквивалентно диффузионному числу Nu_d) в критической точке кругового цилиндра при диффузионном числе $Pr_d = 0,5$ на основе численных решений полного уравнения массопереноса и диффузионного пограничного слоя. Хорошее совпадение результатов имелось даже при $Re = 1$.

Заключение. Пределы применимости уравнения теплового пограничного слоя для определения числа Nu могут быть расширены. Для течения в окрестности передней критической точки оно пригодно не только при $Re \geq 1$, но вплоть до $Re = 1$. В случае продольного обтекания пластины конечной длины уравнение теплового пограничного слоя также возможно применять для расчета теплообмена при $Re \sim 1$, но лишь на некоторой части пластины, начинающейся от передней кромки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
2. Кашеваров А.В. Точное решение задачи конвективного теплообмена для кругового цилиндра в жидкости с малым числом Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 1. С. 43–48.
3. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матъе: М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
5. Кашеваров А.В. О плотности тока насыщения в критической точке электрического зонда // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33. № 1. С. 140–144.

Москва

Поступила в редакцию
16.V.1995