

УДК 532.5.013.4:532.546:536.25

© 1996 г. Х.Г. МАГОМЕДБЕКОВ, М.М. РАМАЗАНОВ

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПОЛОСТИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

Рассмотрена задача о конвективной неустойчивости в бесконечном горизонтальном пористом слое кольцевого сечения, расположенном в непроницаемом массиве. С использованием метода Бубнова – Галеркина найдены значения первых семи критических чисел Рэлея. Установлены формы соответствующих критических движений. Проведен анализ смены форм неустойчивости критических движений при изменении толщины пористого слоя.

Численные и экспериментальные исследования свободноконвективных течений в кольцевом слое пористого материала показали [1] наличие в кольце двухъячейковых структур. В [2, 3] исследованы термоконвективные процессы в тонких замкнутых пористых контурах в упрощенной постановке в предположении о том, что тангенциальная скорость и температура однородны по поперечному сечению пористого слоя, а теплообмен со стенками происходит по закону Ньютона. Определены условия возникновения свободноконвективного течения и показано, что устанавливается стационарный поток жидкости в контуре. В работе [4] рассмотрена естественная конвекция в тонком пористом кольце. На основе двумерных уравнений конвекции получено интегродифференциальное уравнение в нулевом приближении по малому параметру – относительной толщине кольца. Показано, что при определенных условиях в кольце устанавливается тангенциальный поток жидкости с небольшими изменениями скорости в радиальном направлении.

1. Постановка задачи. Пусть внутренний радиус и толщина пористого слоя составляют соответственно R и h . Направим ось y вдоль оси слоя, а ось z по вектору ускорения свободного падения g (фиг. 1). Бесконечная протяженность слоя в горизонтальном направлении приводит к возможности существования как плоских (в плоскости сечения), так и продольных (вдоль горизонтали) критических течений. В данной работе рассматривается случай плоских возмущений. Возмущения скорости, температуры и давления не зависят от продольной координаты z .

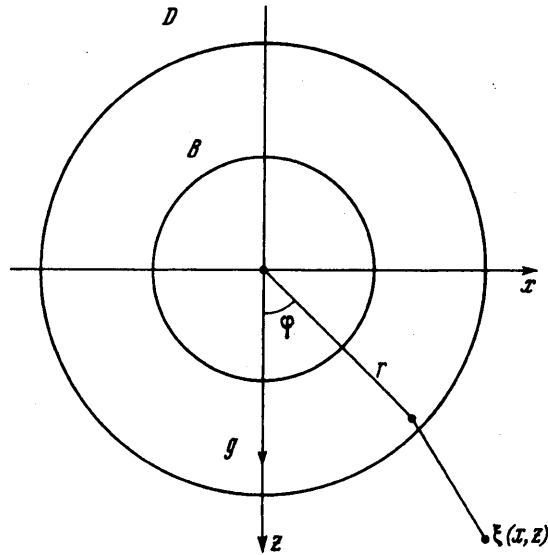
Введем в плоскости сечения $y = 0$ обозначения

$$D = \{(x, z) : |x| < \infty, |z| < \infty\}$$

$$B = \{(x, z) : 1 \leq (x^2 + z^2)^{1/2} \leq 1 + h\} = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq 1 + h, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

где r и φ – полярные координаты, связанные с центром кольца. Обозначим через $\Omega = D \setminus B$ – дополнение B до D , т.е. совокупность всех точек $\xi(x, z)$ из D , которые не содержатся в B .

Свободноконвективное течение жидкости в кольцевом сечении в приближении



Фиг. 1

Дарси – Буссинеска в безразмерных переменных описывается системой уравнений

$$\mathbf{u} = -\nabla P + Ra (\delta - T) \mathbf{e}_z, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (r, \varphi) \in B$$

$$P_T \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T = \Delta T \quad (1.1)$$

$$\{\mathbf{u}, P, T\}(r, \varphi, t) = \{\mathbf{u}, P, T\}(r, \varphi + 2\pi, t)$$

$$\mathbf{u} \mathbf{n} = 0, \quad (r, \varphi) \in \partial B$$

где \mathbf{u} – вектор скорости фильтрации; P – давление в жидкой фазе; T – температура в пористой среде; ∂B – граница пористой области; \mathbf{n} – вектор нормали к ∂B ; \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z .

В области, занятой непроницаемым массивом, температурное поле $T_m(t, x, z)$ определяется решением задачи

$$P_T \frac{\partial T_m}{\partial t} = \Delta T_m, \quad (x, z) \in \Omega \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial z} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \infty); \quad T = T_m, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T_m}{\partial n} \quad (x, z) \in \partial B \quad (1.3)$$

Здесь предполагается, что теплопроводности пористой среды и непроницаемого массива совпадают.

В задаче (1.1)–(1.3) R – характерный масштаб длины, $k\rho_0/\mu$ – времени, AR – температуры, $\lambda/C_f R$ – скорости, $\mu\lambda/C_f k$ – давления, где A – геотермический градиент; k , λ и C_m – соответственно непроницаемость, теплопроводность и объемная теплоемкость пористой среды; C_f , k , μ , ρ_0 , β_T – соответственно объемная теплоемкость, динамическая вязкость, плотность (при температуре T_0) и коэффициент температурного расширения жидкости; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Рассматриваемая задача содержит безразмерные параметры

$$Ra = \frac{k\rho_0 g \beta_T A C_f R^2}{\lambda \mu}, \quad P_T = \frac{C_m^2 R \mu}{k \lambda \rho_0}, \quad \delta = \frac{1 + \beta_T T_0}{\beta_T A R} \quad (1.4)$$

Здесь Ra – фильтрационное число Рэлея, вычисленное по внутреннему радиусу кольца R ; P_T, δ – постоянные для фиксированной среды.

2. Линеаризация в окрестности механического равновесия. Механическому равновесию соответствует линейное распределение температуры в системе и квадратичное распределение давления в жидкой фазе [5]

$$T^{(0)} = z = r \cos \varphi$$

$$P^{(0)} = -Ra (0,5z^2 + \delta z) + P_0 = -Ra (0,5r \cos \varphi + \delta) r \cos \varphi + P_0 \quad (2.1)$$

Представим величины T_m, T и P в виде

$$T_m = T^{(0)} + T_m^{(1)}, \quad T = T^{(0)} + T^{(1)}, \quad P = P^{(0)} + P^{(1)} \quad (2.2)$$

где $T_m^{(1)}$ – возмущение температуры в массиве; $T^{(1)}$ и $P^{(1)}$ – возмущение температуры и давления в пористой среде.

Линеаризируя систему (1.1)–(1.3) около состояния равновесия и опуская верхний индекс 1, получаем

$$\nabla \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u} = -\nabla P - Ra T \mathbf{e}_z, \quad P_T \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \mathbf{e}_z \quad \Delta T \quad (2.3)$$

$$P_T \frac{\partial T_m}{\partial t} = \Delta T_m$$

Эта система уравнений имеет частные решения вида $\{\mathbf{u}, P, T, T_m\} \sim \exp(-\lambda t)$. Для нейтральных ($\lambda = 0$) возмущений имеем [5]

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = -\nabla P - Ra T \mathbf{e}_z \quad (2.4)$$

$$\Delta T = \mathbf{u} \mathbf{e}_z, \quad \Delta T_m = 0$$

$$\mathbf{u} \mathbf{n} = 0, \quad \{\mathbf{u}, P, T\}(r, \varphi) = \{\mathbf{u}, P, T\}(r, \varphi + 2\pi) \quad (2.5)$$

$$T_m \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty); \quad T = T_m; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T_m}{\partial n}, \quad (r, \varphi) \in \partial B$$

Система (2.4)–(2.5) представляет задачу о собственных значениях, собственными числами которого являются критические значения числа Рэлея, а собственными функциями – соответствующие конвективные движения (возмущения), определенные как критические или нейтральные [5].

3. Плоские возмущения. С помощью функции тока систему (2.4) представим в виде

$$\Delta \Psi = Ra \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \Delta T = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$u_\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$$

$$\Psi = 0 \quad (r = 1), \quad \Psi = C_0 h \quad (r = 1 + h) \quad (3.2)$$

Для отыскания критических чисел Рэлея и критических движений воспользуемся методом Бубнова – Галеркина [5]. Аппроксимируем функцию тока выражением вида

$$x = r \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi$$

$$\sum_{i=0}^6 C_i \Psi_i = C_0(r-1) + (r-1-h) (C_1 + C_2 x + C_3 z + C_4 xz + C_5 x^2 + C_6 z^2) \quad (3.3)$$

удовлетворяющим граничным условиям (3.2). Соответствующее принятой аппрок-

симации функции тока (3.3) температурное поле находим путем точного решения второго уравнения в системе (3.1) (при $1 \leq r \leq 1+h$) совместно с уравнением теплопроводности в массиве $\Delta T_m = 0$ (при $r \leq 1$ и $r \geq 1+h$). Неизвестные коэффициенты, входящие в решения этих уравнений, находим из условия непрерывности поля температур и величин теплового потока на границах кольца (и при $r = 1$ и при $r = 1+h$), т.е. из граничных условий (2.5).

Таким образом, при $1 \leq r \leq 1+h$ имеем

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=0}^6 C_i T_i \\
 T_0 &= f_0(r) \sin \varphi, \quad T_1 = f_1(r) \sin \varphi \\
 T_2 &= f_2^{(1)}(r) + f_2^{(2)}(r) \cos 2\varphi \\
 T_3 &= f_3(r) \sin 2\varphi, \quad T_4 = f_4^{(1)}(r) \cos \varphi + f_4^{(2)}(r) \cos 3\varphi \\
 T_5 &= f_5^{(1)}(r) \sin \varphi + f_5^{(2)}(r) \sin 3\varphi \\
 T_6 &= f_6^{(1)}(r) \sin \varphi + f_6^{(2)}(r) \sin 3\varphi \\
 f_0(r) &= \frac{1}{6} \left[3(1+h)r - \frac{1}{r} - 2r^2 \right] \\
 f_1(r) &= \frac{1}{12} \left[-6(1+h)r + \frac{1+2h}{r} + 4(2+h)r^2 - 3r^3 \right] \\
 f_2^{(1)}(r) &= \frac{1}{24} \left[-6(1+h)r^2 + 4(2+h)r^3 - 3r^4 \right] + d \\
 f_2^{(2)}(r) &= \frac{1}{120} \left[15(1+h)r^2 - \frac{1+3h}{r^2} - 12(2+h)r^3 + 10r^4 \right] \\
 f_3(r) &= -\frac{1}{120} \left[15(1+h)r^2 - \frac{1+3h}{r^2} - 12(2+h)r^3 + 10r^4 \right] \\
 f_4^{(1)}(r) &= \frac{1}{96} \left[-2(8+h)(1+h)^3 r + \frac{9(1+h)}{r} - 3(1+h)r^3 + 8(2+h)r^4 - 6r^5 \right] \\
 f_4^{(2)}(r) &= \frac{1}{672} \left[28(1+h)r^3 - \frac{1+4h}{r^3} - 24(2+h)r^4 + 21r^5 \right] \\
 f_5^{(1)}(r) &= \frac{1}{240} \left[5(1-h)(1+h)^3 r + \frac{2(1+3h)}{r} - 60(1+h)r^3 + 44(2+h)r^4 - 35r^5 \right] \\
 f_5^{(2)}(r) &= \frac{1}{672} \left[28(1+h)r^3 - \frac{1+4h}{r^3} - 24(2+h)r^4 + 21r^5 \right] \\
 f_6^{(1)}(r) &= \frac{1}{240} \left[-5(1-h)(1+h)^3 r + \frac{2(1+3h)}{r} + 4(2+h)r^4 - 5r^5 \right] \\
 f_6^{(2)}(r) &= -\frac{1}{672} \left[28(1+h)r^3 - \frac{1+4h}{r^3} - 24(2+h)r^4 + 21r^5 \right]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Постоянная d в $f_2^{(1)}(r)$ определяется из граничных условий (2.5).

Для определения коэффициентов C_i составим систему интегральных условий метода Галеркина [5]. Умножая первое уравнение в (3.1) на Ψ_i и интегрируя по кольцевому сечению пористого слоя, имеем

$$\int \Delta^2 \Psi \Psi_i dt - Ra \int \frac{\partial T}{\partial x} \Psi_i dt = 0 \quad (3.5)$$

Подставляя (3.3)–(3.4) в (3.5), получим однородную систему уравнений относительно коэффициентов C_i

$$\sum_i (A_{ij} - Ra B_{ij}) C_i = 0 \quad (3.6)$$

$$A_{ij} = \int_1^{1+h} r dr \int_0^{2\pi} \Psi_i \Delta^2 \Psi_j d\phi, \quad B_{ij} = \int_1^{1+h} r dr \int_0^{2\pi} \Psi_i \frac{\partial T_j}{\partial x} d\phi \quad (3.7)$$

Таким образом, решение проблемы собственных значений для системы общего вида (3.6) позволяет определить приближенные значения первых семи критических чисел Рэлея, зависящих от толщины пористого слоя h и формы соответствующих конвективных возмущений жидкости (критических движений).

4. Основные результаты. Алгоритм вычисления собственных значений и собственных функций был взят из [6] и переработан в соответствии с потребностями.

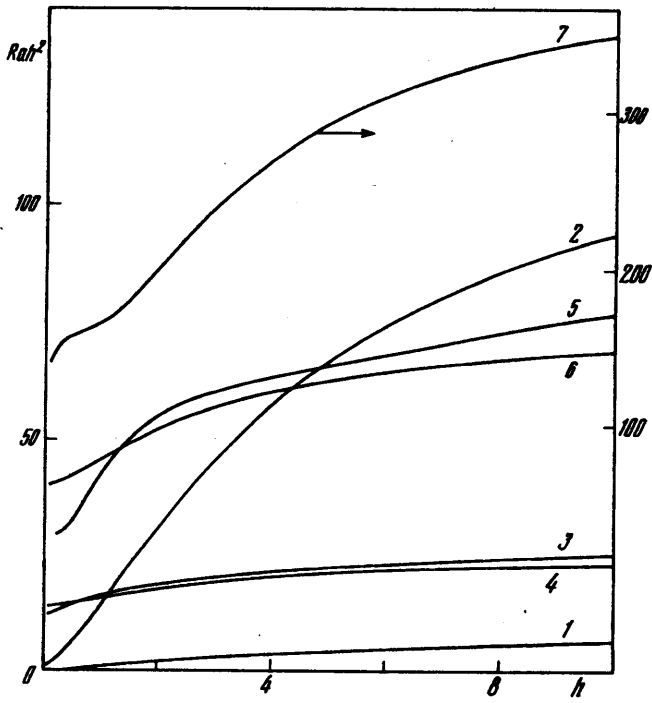
На фиг. 2 приведены графики зависимостей критических чисел Рэлея от толщины пористого слоя h . При этом для лучшего разрешения по оси ординат отложена величина Rah^2 . Соответствующие критические движения для $h = 1$ изображены на фиг. 3.

Нижний порог конвекции определяется наименьшим критическим числом Рэлея Ra_c и связанным с ним критическим возмущением. Если каким-либо образом «запереть» это критическое движение, то порог конвекции определяется следующим в порядке возрастания критическим числом Рэлея и т.д. Таким образом, при достижении критического числа Ra_i ($i = 1-7$) механическое равновесие становится неустойчивым относительно соответствующего критического движения Φ_i (фиг. 3), т.е. при переходе Ra через Ra_i соответствующий декремент затухания λ_i меняет знак с положительного на отрицательный.

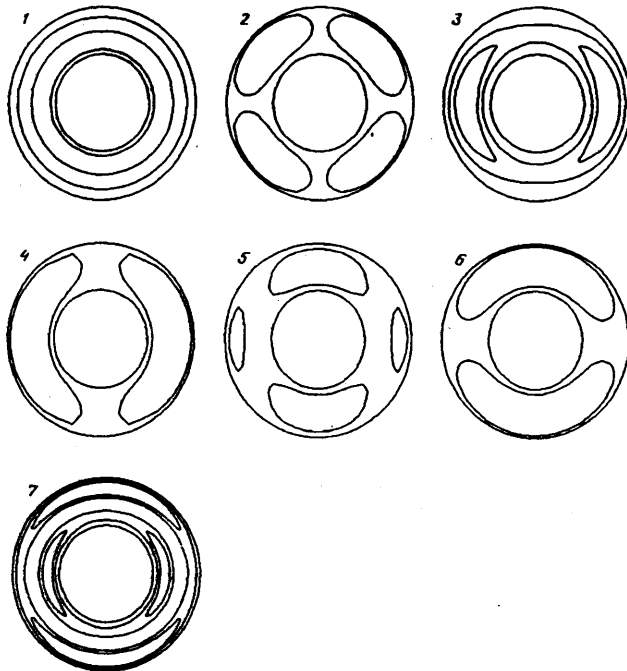
Расчеты показывают, что с увеличением h все критические числа Рэлея уменьшаются, т.е. устойчивость механического равновесия жидкости понижается. При этом во всем диапазоне изменений h ($0,1 \leq h \leq 100$) наиболее опасным является критическое движение, изолинии которого близки к окружностям (фиг. 3, 1). Для следующих пяти критических движений наблюдается смена форм неустойчивости, связанная с пересечением графиков зависимостей критических чисел Рэлея от толщины пористого слоя h (линий уровней спектра [5]). Ниже представлены значения h , при которых происходит это пересечение, и обозначения соответствующих критических движений Φ_i :

h	0,70	1,12	1,15	1,35	4,35	4,80
Φ_i	3-4	2-4	2-3	5-6	2-6	2-5

Согласно этим данным, второму в порядке возрастания критическому числу Рэлея соответствует четырехъячейковое движение (фиг. 3, 2) при $h < 1,12$ или двухъячейковое движение (фиг. 3, 4) при $h > 1,12$. Такие смены форм неустойчивости происходят и для других уровней. Так, например, при $h < 1,35$ более предпочтительным является движение, изображенное на фиг. 3, 5, по сравнению с движением, представленным на фиг. 3, 6, в то время как при $h > 1,35$ эти критические движения



Фиг. 2



Фиг. 3

меняются местами. Наконец, наибольшему критическому числу Рэлея во всем диапазоне изменений h отвечает движение, изображенное на фиг. 3, 7.

Критические движения 1, 3, 5 и 7 (фиг. 3) описываются собственными функциями вида

$$\Phi_i = C_{0i}(r-1) + (r-1-h)(C_{1i} + C_{5i}x^2 + C_{6i}z^2)$$

представляющими собой линейные комбинации базисных функций Ψ_0, Ψ_1, Ψ_5 и Ψ_6 . Движения 2, 4 и 6 представляют собой «чистые состояния» и описываются отдельными функциями тока Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 соответственно.

Заключение. Рассмотрена свободная термоконвекция жидкости в пористом кольце. Решение задачи получено в рамках линейной теории методом Бубнова–Галеркина. Эффективность метода подтверждается литературными данными [5].

Рассчитан спектр семи первых критических чисел Рэлея в зависимости от толщины пористого слоя. Установлены формы соответствующих конвективных (критических) движений. При переходе числа Рэлея через какое-либо критическое значение механическое равновесие жидкости становится неустойчивым относительно соответствующего критического возмущения. Проведен анализ смены форм неустойчивости критических возмущений при изменении толщины пористого слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charrier-Mojtabi M.C., Mojtabi A., Azaiez M., Labrosse G. Numerical and experimental study of multicellular free convection flows in an annular porous layer // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1991. V. 34. № 12. P. 3061–3074.
2. Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М. Качественный анализ гидротермальной конвекции в замкнутых флюидонасыщенных контурах. М., 1990. 15 с. – Деп. в ВИНТИ 20.06.90, № 3637 В90.
3. Магомедбеков Х. Г., Гайдаров Г.М., Осман-Заде Ш.С. Гидротермальная конвекция в разломных зонах // Геотермия. М.: Наука, 1991. Вып. 1. С. 113–117.
4. Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М. Гидротермальная конвекция в тонком пористом кольце // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 4–8.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. // Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. Уилкинсон Дж.Х., Райни С. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976. 390 с.

Махачкала

Поступила в редакцию
11.IV.1995