

УДК 533.6.011

© 1996 г. Л.М. ЗИГАНГАРЕЕВА, О.М. КИСЕЛЕВ

## ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ ДИСКА ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ И ТЕЛА С НАИБОЛЬШИМИ КРИТИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ МАХА

С помощью метода, предложенного в [1], получено решение задачи об отрывном обтекании диска осесимметричным дозвуковым потоком идеального совершенного газа с показателем адиабаты  $k = 1,4$  по схеме Рябушинского. Приведены формулы, характеризующие зависимость основных параметров течения от коэффициента донного давления и числа Маха на свободной поверхности. Получены также формулы для определения формы тел вращения, реализующих максимальное критическое число Маха в потоке того же газа.

1. Для анализа отрывных течений газа при больших числах Рейнольдса можно использовать различные схемы стационарных струйных течений идеальной жидкости, предполагающие постоянство давления в зоне отрыва [2]. Ниже отрывное обтекание диска осесимметричным потоком газа исследуется с использованием схемы Рябушинского. Согласно этой схеме, свободная поверхность, сходящая с диска, плавно сопрягается со вторым, "фактивным" диском, соосным с первым и равновеликим ему; течение обладает симметрией относительно некоторой плоскости, перпендикулярной скорости набегающего потока.

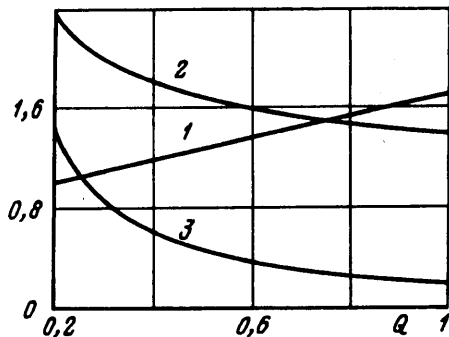
Будем рассматривать стационарное дозвуковое обтекание диска по схеме Рябушинского осесимметричным потенциальным изэнтропическим потоком идеального совершенного газа. Газодинамические параметры рассматриваемого течения связаны известными соотношениями

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \lambda^2 \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{-1}, \quad p = p_0 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(1-k)} \quad (1.1)$$
$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{1/(1-k)}, \quad a^2 = \frac{kp}{\rho}$$

Здесь  $\lambda$  – приведенная скорость,  $M$  – число Маха,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $a$  – скорость звука,  $k$  – показатель адиабаты,  $p_0$  и  $\rho_0$  – значения  $p$  и  $\rho$  в заторможенном потоке. Идеальный совершенный газ, для которого  $k = 1,4$ , будем в дальнейшем называть воздухоподобным газом.

Пусть  $p_a, \rho_a, M_a$  и  $a_a$  – значения  $p, \rho, M$  и  $a$  в невозмущенном потоке,  $V_a$  – скорость невозмущенного потока,  $p_c$  и  $M_c$  – значения  $p$  и  $M$  на свободной поверхности,  $X$  – сопротивление диска,  $L$  – длина зоны отрыва,  $R$  – радиус сечения зоны отрыва плоскостью симметрии,  $R_0$  – радиус диска, причем  $R_0 = 1$ . Коэффициент сопротивления  $C_x$  и коэффициент давления в зоне отрыва (коэффициент донного давления)  $Q$  определяются по формулам

$$C_x = 2X / (\pi \rho_a V_a^2 R_0^2), \quad Q = 2(p_a - p_c) / (\rho_a V_a^2)$$



Фиг. 1

Из последнего выражения с помощью (1.1) получается соотношение

$$M_c^2 = \frac{2}{k-1} \left[ \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{2} k Q M_a^2 \right)^{(1-k)/k} - 1 \right] \quad (1.2)$$

В работе [1] предложен эффективный численно-аналитический метод расчета обтекания кругового конуса потоком сжимаемой жидкости по схеме Рябушинского при произвольно заданных зависимостях  $M(\lambda)$  и  $v(\lambda)$  ( $v = \rho/\rho_0$ ). При обтекании диска потоком несжимаемой жидкости ( $M_a = M_c = 0$ ) основные характеристики течения (будем отмечать их в этом случае верхним индексом ноль) на интервале  $0,15 \leq Q \leq 1$  могут быть вычислены по формулам [1]

$$\begin{aligned} C_x^o &= 0,72084 + 0,11178(1+Q)^{-1} + 0,92960Q \\ R^o &= 0,96034 + 0,08936Q^{-1} \ln Q + 0,42422Q^{-1} \\ L^o &= 0,20970 - 0,60585Q^{-1} \ln Q + 1,78362Q^{-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

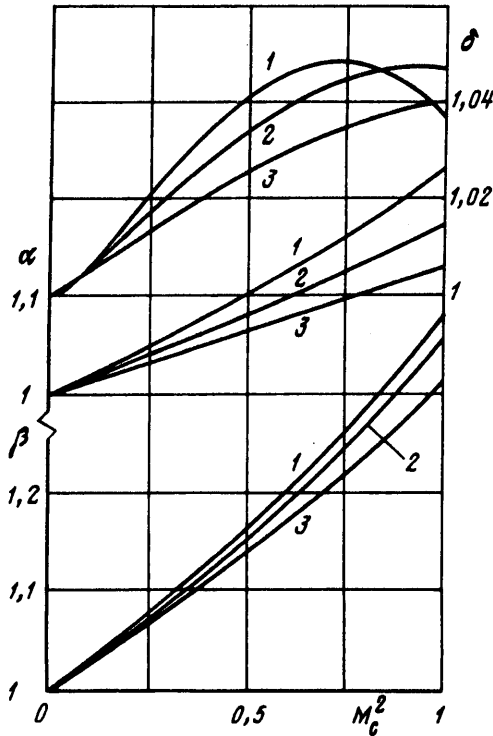
На фиг. 1 показана зависимость параметров  $C_x^o$ ,  $L^o$ ,  $R^o$  от  $Q$  (кривые 1-3 отвечают величинам  $C_x^o$ ,  $R^o$  и  $0,1 L^o$ ).

С помощью метода [1] выполнены расчеты отрывного обтекания диска воздухоподобным газом при  $Q = 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$  и  $M_c^2 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$  на сетке  $50 \times 50$  (значение числа Маха набегающего потока  $M_a$ , соответствующее заданным значениям  $Q$  и  $M_c$ , может быть найдено из (1.2)). На основе полученных результатов с помощью метода наименьших квадратов построены аппроксимационные формулы для параметров  $C_x, L, R$  следующего вида:

$$\begin{aligned} C_x &= \alpha C_x^o, \quad L = \beta L^o, \quad R = \delta R^o \\ \mu &= 1 + f M_c^2 + g M_c^3 + h M_c^4, \quad \mu = \alpha, \beta, \delta \\ d &= d_1 + d_2 Q^{-1} \ln Q + d_3 Q^{-1}, \quad d = f, g, h, \quad d_j = f_j, g_j, h_j \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $C_x^o, L^o, R^o$  – функции  $Q$ , определенные формулами (1.3). Значения коэффициентов  $f_j, g_j, h_j$  для аппроксимационных формул (1.4) и значения  $\epsilon$  максимальных относительных погрешностей аппроксимации приводятся в табл. 1. На фиг. 2 показана зависимость параметров  $\alpha, \beta, \delta$  от  $M_c^2$  при  $Q = 0,25; 0,4; 0,6$  (кривые 1-3 соответственно).

Формулы (1.3) и (1.4) совместно с табл. 1 позволяют определить величины  $C_x, L, R$  в области  $0,25 \leq Q \leq 0,6; 0 \leq M_c \leq 1$ . Заметим, что для всех рассмотренных вариантов радиус поперечного сечения зоны отрыва монотонно возрастает при движении от диска к плоскости симметрии потока, при этом кривизна дуги свободной поверхности в плоскости меридионального сечения монотонно убывает по модулю.



Фиг. 2

2. Важной характеристикой тела, обтекаемого потоком идеального газа, является критическое число Маха  $M_*$ , т.е. то минимальное значение числа Маха набегающего потока  $M_a$ , при котором где-то на поверхности тела возникает скорость, равная критической. Практический интерес представляют тела, которые в классе тел, удовлетворяющих определенным геометрическим ограничениям, реализуют максимально возможное значение  $M_*$ .

Рассмотрим тела вращения, обтекаемые осесимметричным потоком идеального газа и удовлетворяющие одному из условий

$$R/L \geq r_0, \quad S/L^2 \geq s_0, \quad W/L^3 \geq w_0 \quad (2.1)$$

где  $L$  – длина тела,  $R$  – радиус миделевого сечения,  $S$  – площадь сечения в меридианной полуплоскости,  $W$  – объем тела,  $r_0, s_0, w_0$  – заданные константы. Среди тел описанного класса максимальное значение  $M_*$  реализуют тела вращения, образованные двумя равновеликими соосными дисками, расположенными поперек потока, и соединяющей их поверхностью тока, в каждой точке которой скорость газа равна критической [3] ( $\max M_*$  достигается при условии строгого равенства в (2.1)).

Таким образом, форма тел вращения, обладающих указанными свойствами (ниже для краткости будем называть их оптимальными), может быть найдена из решения задачи об обтекании газом диска по схеме Рябушинского при критической скорости на свободной поверхности. Несмотря на то, что указанный факт установлен уже достаточно давно, форма оптимальных тел вращения до сих пор не была найдена из-за отсутствия подходящего метода решения задачи.

С помощью метода [1] выполнены расчеты обтекания диска радиуса  $R_0$  по схеме Рябушинского осесимметричным потенциальным изэнтропическим потоком совершенного газа с показателем адиабаты  $k = 1,4$  при условии  $M_c = 1$  для значений

Таблица 1

$\mu$	$d_j$	$j = 1$	2	3	$\varepsilon \cdot 10^4$
$\alpha$	$f_j$	-0,10521	0,06738	0,17566	5
	$g_j$	0,24632	-0,07326	-0,19309	
	$h_j$	-0,16489	0,03909	0,12627	
$\beta$	$f_j$	0,20163	0,01268	0,04005	15
	$g_j$	-0,05491	0,00202	0,00625	
	$h_j$	-0,08536	0,06838	0,14857	
$\delta$	$f_j$	0,03122	0,02190	0,01362	11
	$g_j$	-0,11785	-0,02330	0,09410	
	$h_j$	0,04666	0,03428	-0,04260	

Таблица 2

$M_*$	$Q$	$L/(2R_0)$	$R/L$	$S/L^2$	$\Omega$
0,5	2,1334	0,4633	1,2999	1,2450	1,2462
0,55	1,6583	0,6390	0,9868	0,9361	0,9375
0,6	1,2943	0,8811	0,7549	0,7086	0,7102
0,65	1,0085	1,2216	0,5797	0,5378	0,5395
0,7	0,7791	1,7223	0,4426	0,4053	0,4071
0,75	0,5912	2,4773	0,3356	0,3031	0,3049
0,8	0,4346	3,6926	0,2499	0,2222	0,2240
0,83	0,3526	4,8283	0,2059	0,1813	0,1830
0,85	0,3020	5,8485	0,1793	0,1569	0,1585
0,87	0,2544	7,2425	0,1541	0,1338	0,1354

$M_a = M_* = 0,5; 0,55; 0,6; 0,65; 0,7; 0,75; 0,8; 0,83; 0,85; 0,87$ . Согласно сказанному выше, полученные при этом конфигурации являются оптимальными телами вращения для воздухоподобного газа.

На фиг. 3 показаны контуры найденных оптимальных тел в меридианной плоскости  $(x, r)$  слева от плоскости симметрии потока  $x = 0$  при  $M_* = 0,87; 0,85; 0,8; 0,7; 0,6$  (кривые 1-5 соответственно;  $R_0 = 1$ ). Основные геометрические характеристики оптимальных тел и значения коэффициента давления на их боковой поверхности  $Q$  приводятся в табл. 2, где  $\Omega = (W / (\pi L^3))^{1/2}$ , а коэффициент  $Q$ , согласно (1.2), определяется по формуле

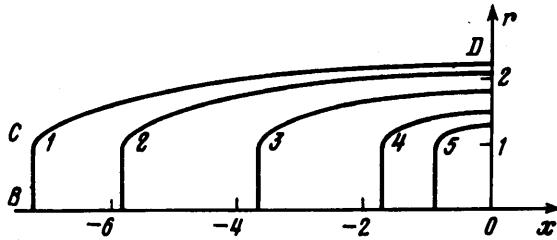
$$Q = \frac{2}{k M_a^2} \left[ 1 - \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M_a^2 \right)^{k/(k-1)} \right]$$

Очевидно, для произвольного тела вращения в потоке воздухоподобного газа имеют место соотношения вида  $M_* \leq F_1(R/L)$ ,  $M_* \leq F_2(S/L^2)$ ,  $M_* \leq F_3(\Omega)$ , где  $F_1, F_2, F_3$  — монотонно убывающие функции своих аргументов, а строгое равенство выполняется только для оптимальных тел. С помощью аппроксимации данных из табл. 2 и с учетом того, что  $F_1(0) = F_2(0) = F_3(0) = 1$ , построены формулы

$$\begin{aligned} F_1 &= (1 - 0,54152r_1 + 1,70875r_1^2 - 0,34186r_1^3)^{-1}, \quad r_1 = (R/L)^{1/3} \\ F_2 &= (1 - 0,48238s_1 + 1,69462s_1^2 - 0,35413s_1^3)^{-1}, \quad s_1 = (S/L^2)^{1/3} \\ F_3 &= (1 - 0,49209w_1 + 1,70871w_1^2 - 0,35938w_1^3)^{-1}, \quad w_1 = (\Omega)^{1/3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Погрешность аппроксимации расчетных данных формулами (2.2) не превышает 0,11% для  $F_1$  и 0,07% для  $F_2$  и  $F_3$  при  $F_1, F_2, F_3 \geq 0,4$ .

Пусть  $BC$  – образующая диска,  $CD$  – образующая боковой поверхности оптимального тела в меридианной полуплоскости  $(x, r)$  (см. фиг. 3). Пусть  $\theta$  – угол наклона скорости к оси симметрии  $x$ ,  $\theta_0 = \pi/2$  – значение  $\theta$  на  $BC$ . В [1] показано, что кривизна



Фиг.3

дуги  $CD$  при приближении к точке  $C$  стремится к бесконечности. Более детальный анализ позволяет установить, что на дуге  $CD$  в окрестности точки  $C$

$$x/x_c + 1 = O(\sigma^3), \quad r/r_c - 1 = O(\sigma^2) \quad (\sigma \rightarrow 0) \quad (2.3)$$

где  $\sigma = \theta_0 - \theta$ ,  $x_c$  и  $r_c$  – значения  $x$  и  $r$  в точке  $C$  ( $x_c = -L/2$ ,  $r_c = R_0$ ). Введем параметрическое переменное  $t$ , положив  $x/x_c = \cos t$  на  $CD$ . Пусть  $t = \pi - \omega$ , тогда, согласно (2.3)

$$\sigma = O(\omega^{2/3}), \quad r/r_c - 1 = O(\omega^{4/3}) \quad (\omega \rightarrow 0)$$

С учетом высказанных соображений на основе результатов расчетов построены аппроксимационные формулы для определения формы образующей оптимальных тел вида

$$\frac{x}{R_0} = b \cos t, \quad b = \frac{L}{(2R_0)}, \quad t \in [0, \pi], \quad \frac{r}{R_0} = 1 + \left[ \sum_{k=1}^7 a_k \sin(2k-1)t \right]^{4/3} \quad (2.4)$$

Значения коэффициентов  $a_k$ , найденные с помощью гармонического анализа, приводятся в табл. 3. Там же даются значения  $\epsilon_1$  – максимальной относительной погрешности аппроксимации величины  $r$  и  $\epsilon_2$  – максимальной погрешности аппроксимации величины  $\theta$ :  $\epsilon_2 = |\theta - \arctg(r/x)|$ .

Дополнительные расчеты, выполненные для промежуточных значений  $M_*$ , показали, что использование формул (2.4) при сплайн-аппроксимации коэффициентов  $b$ ,  $a_k$  из табл. 2 и 3 обычно приводит к возрастанию значений  $\epsilon_1$ , но не более чем на порядок; при этом  $\epsilon_2$  меняется незначительно.

Таким образом, приведенные данные позволяют строить оптимальные тела вращения для воздухоподобного газа в диапазоне  $0,5 \leq M_* \leq 0,87$ . Метод [1] позволяет получить решение задачи и для значений  $M_d < 0,5$ , с выходом же за пределы диапазона  $M_d \leq 0,87$  происходит быстрое нарастание погрешностей (способ контроля точности решения указан в [1]), затем процесс итераций, используемый при решении задачи, перестает сходиться.

Авторы выражают признательность Г.Ю. Степанову за внимание к работе и полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00123).

Таблица 3

$M_*$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$\varepsilon_1 \cdot 10^4$	$\varepsilon_2 \cdot 10^4$
0,5	0,30838	0,00485	0,00088	0,00028	0,00012	0,00006	0,00004	0,3	10
0,55	0,37070	0,00614	0,00112	0,00036	0,00015	0,00008	0,00005	0,3	11
0,6	0,44250	0,00781	0,00145	0,00047	0,00020	0,00010	0,00006	0,5	12
0,65	0,52695	0,01002	0,00190	0,00061	0,00026	0,00013	0,00007	0,6	13
0,7	0,62749	0,01300	0,00256	0,00083	0,00035	0,00018	0,00010	0,9	15
0,75	0,74922	0,01709	0,00351	0,00115	0,00049	0,00024	0,00013	1,2	18
0,8	0,90073	0,02284	0,00495	0,00169	0,00073	0,00035	0,00019	1,6	22
0,83	1,01391	0,02729	0,00604	0,00207	0,00087	0,00041	0,00022	1,9	32
0,85	1,09814	0,03088	0,00694	0,00241	0,00101	0,00047	0,00025	1,8	45
0,87	1,19864	0,03494	0,00797	0,00280	0,00117	0,00055	0,00031	3,8	61

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93–107.
2. *Гогин Л.В., Степанов Г.Ю.* Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990. 382 с.
3. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Ration. Mech. and Analysis. 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.

Казань

Поступила в редакцию

27.II.1995