МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1996

УДК 532.592

 А.А. АБРАШКИН

СТОЯЧИЕ ВИХРЕВЫЕ ВОЛНЫ НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

Стоячие колебания свободной поверхности бесконечно глубокой жидкости существуют в присутствии слабого, порядка амплитуды волны, сдвигового течения. В результате взаимодействия с течением волны приобретают завихренность, пропорциональную кубу амплитуды.

Классические стоячие волны являются потенциальными [1–3]. В настоящей заметке обращается внимание на то, что стоячие колебания свободной поверхности бесконечно глубокой жидкости могут существовать и на слабом (порядка амплитуды волны) сдвиговом течении. В результате взаимодействия с течением волны приобретают собственную завихренность, пропорциональную кубу амплитуды. Таким образом, одному и тому же закону движения свободной поверхности отвечают два разных типа волновых движений в глубине – "обычные" потенциальные и изучаемые ниже вихревые стоячие волны.

1. Рассмотрим плоские колебания свободной поверхности бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости. Будем полагать, что смещение свободной границы соответствует стоячей волне. Для изучения течений воспользуемся лагранжевыми координатами. Уравнения двумерной гидродинамики в этих переменных можно записать в виде [1]

$$X_{tt} = Y_a H_b - Y_b H_a, \qquad Y_{tt} = H_a X_b - H_b X_a$$
$$X_a Y_b - X_b Y_a = 1, \qquad H = \frac{p}{\rho} + gY \tag{1.1}$$

Здесь X, Y – координаты траекторий жидких частиц с лагранжевыми координатами – горизонтальной a и вертикальной b, p – давление, ρ – плотность. Граничными условиями для этой системы служат условия постоянства давления на свободной поверхности, отвечающей значению $b = 0$, и обращения в нуль скорости на дне, где $b = -\infty$. Завихренность течения предполагается заданной функцией $\Omega(b)$.

Введем модифицированную лагранжеву переменную $q = a + \sigma(b)t$, $\tau(b)$ – некоторая, пока произвольная функция, описывающая неоднородный по вертикали дрейф жидких частиц [4]. В новых координатах q, b, t система (1.1) запишется так

$$X_q Y_b - X_b Y_q = [X, Y] = 1$$
$$\sigma^2 X_{qq} + 2\sigma X_{qt} + X_{tt} = [Y, H]$$
$$\sigma^2 Y_{qq} + 2\sigma X_{qt} + Y_{tt} = [H, X]$$

Здесь квадратные скобки обозначают операцию взятия якобиана по q и b. Эти уравнения будем решать методом теории возмущений по малому параметру крутизны волны ε относительно плоскопараллельного течения $X = q$, $Y = b$. Возмущения такого потока ξ, η ($X = q + \xi$, $Y = b + \eta$) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\xi_q + \eta_b = -[\xi, \eta] \\ &\sigma^2\xi_{qq} + 2\sigma\omega\xi_{q\mu} + \omega^2\xi_{\mu\mu} = -H_q + [\eta, H] \\ &\sigma^2\eta_{qq} + 2\sigma\omega\eta_{q\mu} + \omega^2\eta_{\mu\mu} = -H_b + [H, \xi], \quad \mu = \omega t \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь ω – частота волны. Функции ξ, η определяют структуру поверхностной волны. Чтобы она была стоячей, необходимо положить $\sigma(0) = 0$, что соответствует требованию отсутствия дрейфа жидких частиц вдоль свободной границы.

Представим завихренность и все неизвестные функции, входящие в систему (1.2), рядами

$$(\xi, \eta, H, \sigma(b), \Omega(b)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (\xi_n, \eta_n, H_n, \sigma_n(b), \Omega_n(b))$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots, \qquad \sigma_n(0) = 0$$

Функции σ_n, как будет показано ниже, определяются по известной завихренности данного приближения и решением предыдущих приближений. Граничные условия и требования неизменности среднего уровня жидкости запишем в виде

$$\begin{aligned} &H_n - g\eta_n = \text{const}, \quad b = 0; \quad \eta_\mu = \xi_\mu = 0, \quad b = -\infty \\ &\int_{-\pi/k}^{\pi/k} \eta(1 + \xi_q) \,\big|_{b=0} dq = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь k – волновое число.

2. Перейдем к анализу свойств волновых возмущений. В линейном приближении уравнения (1.2) записываются в виде

$$\omega_0^2\xi_{1\mu\mu} = -H_{1q}, \quad \omega_0^2\eta_{1\mu\mu} = -H_{1b}, \quad \xi_{1q} + \eta_{1b} = 0$$

Их решение, отвечающее стоячей волне, имеет вид

$$\begin{aligned} &H_1 = he^{kb}\cos kq \sin\mu, \quad \xi_1 = -\alpha e^{kb}\sin kq \sin\mu, \quad \eta_1 = \alpha e^{kb}\cos kq \sin\mu \\ &\alpha = kh / \omega_0^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь h – постоянная с размерностью квадрата скорости. Из граничного условия для давления (1.3) следует дисперсионное соотношение для волн $\omega_0^2 = gk$.

В отличие от свободной поверхности в глубине жидкости величина σ_1 отлична от нуля, поэтому жидкие частицы помимо колебательного участвуют еще и в изменяющемся с глубиной дрейфовом движении. В линейном приближении вихревые стоячие волны представляют наложение на потенциальную стоячую волну слабого, порядка амплитуды волны, дрейфового течения. Оригинальное свойство вихревых стоячих волн, таким образом, заключается в наличии дрейфа узлов волны. Закон изменения скорости дрейфа с глубиной определяется видом распределения завихренности первого приближения. В самом деле, выражение для завихренности в лагранжевых переменных записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{D(X_t, X)}{D(a,b)} + \frac{D(Y_t, Y)}{D(a,b)} = \\ &= \omega([X_\mu, X] + [Y_\mu, Y]) + \sigma([X_q, X] + [Y_q, Y]) - \sigma'(X_q^2 + Y_q^2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Подставляя в это соотношение решения (2.1), получим $\sigma_1' = -\Omega_1$, откуда вытекает, что

$$\sigma_1 = \int_b^0 \Omega_1(b)db \tag{2.3}$$

Функция Ω_1 должна быть ограниченной, в остальном ее выбор в значительной степени произволен. В частности, выражение для Ω_1 можно взять таким, чтобы профиль дрейфового течения $\sigma_1(b)$ имел точку перегиба.

3. Уравнения второго приближения имеют вид

$$\begin{aligned} &\xi_{2q} + \eta_{2b} = -[\xi_1, \eta_1] \\ &\omega_0^2 \xi_{2\mu\mu} = -H_{2q} - 2\omega_0\sigma_1\xi_{1q\mu} - 2\omega_0\omega_1\xi_{1\mu\mu} \\ &\omega_0^2 \eta_{2\mu\mu} = -H_{2b} + [H_1, \xi_1] - 2\omega_0\sigma_1\eta_{1q\mu} - 2\omega_0\omega_1\eta_{1\mu\mu} \end{aligned} \tag{3.1}$$

при записи второго уравнения этой системы было учтено, что $[\eta_1, H_1] = 0$. Решение (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), имеет вид

$$H_2 = \frac{k^2h^2}{4\omega_0^2}e^{2kb}(1-3\cos 2\mu) + \frac{k^2h^2}{2\omega_0^2}\cos 2\mu + \frac{2k^2h}{\omega_0}\Phi \sin kq \cos\mu$$

$$\eta_2 = \frac{k^3h^2}{4\omega_0^4}(1-\cos 2\mu)e^{2kb} - \frac{2k^3h}{\omega_0^3}e^{-kb}\Phi \sin kq \cos\mu; \quad \omega_1 = 0$$

$$\xi_2 = \frac{2k^2h}{\omega_0^3}(ke^{-kb}\Phi - \sigma_1 e^{kb})\cos kq \cos\mu, \quad \Phi(b) = \int_0^b \tau_1(b)e^{2kb}db$$

При $\sigma_1 \equiv 0$ оно переходит в решение для потенциальной волны [1]. Во втором приближении учет завихренности приводит к появлению дополнительных слагаемых в выражениях для "волновой" составляющей траекторий жидких частиц ξ_2, η_2. Вертикальная структура этих возмущений зависит от распределения завихренности первого приближения, или, что то же самое, от величины σ_1. Функция σ_2 влияет только на величину дрейфовой скорости. Подобно соотношению (2.3) эта функция связана с завихренностью данного приближения равенством

$$\sigma_2 = \int_b^0 \Omega_2(b)db$$

Таким образом, как и в линейном приближении, завихренность течения определяется лишь дрейфовой частью общего выражения для траекторий движения частиц.

4. Уравнения третьего приближения записываются в форме

$$\begin{aligned} &\xi_{3q} + \eta_{3b} = -[\xi_1, \eta_2] - [\xi_2, \eta_1] \\ &\omega_0^2\xi_{3\mu\mu} = -H_{3q} + [\eta_1, H_2] + [\eta_2, H_1] - \sigma_1^2\xi_{1qq} - 2\sigma_2\omega_0\xi_{1q\mu} - 2\sigma_1\omega_0\xi_{2q\mu} - 2\omega_0\omega_2\xi_{1\mu\mu} \\ &\omega_0^2\eta_{3\mu\mu} = -H_{3b} + [H_2, \xi_1] + [H_1, \xi_2] - \sigma_1^2\eta_{1qq} - 2\sigma_1\omega_0\eta_{2q\mu} - 2\sigma_2\omega_0\eta_{1q\mu} - 2\omega_0\omega_2\eta_{1\mu\mu} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Две наиболее важные характеристики волны – поправка к дисперсионному соотношению и выражение для завихренности, можно получить не выписывая в явном виде полное решение этой системы. Для нахождения величины ω_2 достаточно рассмотреть в соотношениях для ξ_3 и η_3 слагаемые с множителями $\sin kq \sin\mu$ и $\cos kq \sin\mu$ (множители, входящие в формулы для возмущений ξ_1 и η_1). Используя граничное условие для давления (1.3), нетрудно найти, что $\omega_2 = -k^4h^2/2\omega_0^3$. Значение ω_2 не зависит от распределения завихренности и совпадает с квадратичной по амплитуде поправкой к дисперсионному уравнению потенциальной волны. Этот результат является следствием принятого условия о неизменности динамики свободной границы независимо от распределения завихренности. Видимо, он останется справедлив и для высших приближений.

Выражение для завихренности находится прямым вычислением по формуле (2.2) с учетом уравнений (4.1). Для удобства расчета следует воспользоваться тем, что завихренность зависит только от координаты b, а потому в выражении для нее по переменным q и μ можно проводить усреднение. В третьем порядке теории возмущений завихренность определяется равенством

$$\Omega_3 = -\sigma_3' + \frac{k^4 h^2}{2\omega_0^4}(\sigma_1' + 2k\sigma_1)e^{2kb}$$

Помимо "дрейфовой" составляющей $-\sigma_3'$, оно содержит также и "волновую", связанную с колебательным движением жидких частиц. Наличие этой компоненты завихренности в отличие от двух первых приближений служит проявлением эффекта нелинейного взаимодействия волны со слабым сдвиговым течением.

Для нахождения траекторий жидких частиц, очевидно, следует стандартным образом разрешить уравнения (4.1). Здесь не приводятся выражения для решения этой системы ввиду их громоздкости.

Стоячие вихревые волны могут существовать только на поверхности такого сдвигового потока, величина которого зависит от амплитуды волны. Данное обстоятельство указывает на главную трудность, которую следует преодолеть при возбуждении таких волн в лабораторных условиях: согласовать амплитуду колебаний свободной поверхности с величиной дрейфового течения. Сделать это можно путем взаимной подстройки силы ветра, обдувающего свободную поверхность сосуда с жидкостью и создающего приповерхностное сдвиговое течение, и параметров тряски дна сосуда, за счет которой возбуждаются стоячие волны.

Укажем также, что результаты Дюбреиль – Жакотэн, рассмотревшей стационарные волны на поверхности слабозавихренного потока, получаются, если в уравнениях (1.2) положить

$$\frac{\partial}{\partial\mu} = 0, \quad \sigma = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_n(b), \qquad \sigma_0 \doteq \text{const}$$

и решить их методом теории возмущений. Эти результаты удается обобщить на случай сильнозавихренной жидкости [4], когда величина σ_0 зависит от b, при этом $\sigma_0(b)$ определяет профиль невозмущенного сдвигового потока.

Заключение. Эффект завихренности стоячих волн проявляется в глубине жидкости: если колебания свободной границы совпадают с движением свободной поверхности в потенциальной стоячей волне, то динамика жидких частиц внутри жидкости имеет принципиально различный характер. Помимо чисто колебательного движения, свойственного потенциальной волне, жидкие частицы участвуют также в неоднородном по глубине дрейфе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. Нелинейные волновые процессы / Под ред. В.Н. Николаевского. М.: Мир, 1987. 296 с.
3. *Schwartz L.W., Whitney A.K.* A semi-analytic solution for nonlinear standing waves in deep water // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 147–171.
4. *Абрашкин А.А., Зенькович Д.А.* Вихревые стационарные волны на сдвиговом потоке // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 1. С. 35–46.

Москва

Поступила в редакцию
19.IX 1994