МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1996

УДК 533.72

© 1996 г. А.В. ЛАТЫШЕВ, А.А. ЮШКАНОВ

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С ЧАСТОТОЙ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ

Построены точные решения модельного уравнения Больцмана с частотой столкновений, зависящей от скорости молекул, и с оператором столкновений БГК (Бхатнагара, Гросса и Крука) в задачах о слабом испарении и скачке температуры разреженного пара над плоской поверхностью. Приведены численные расчеты и сравнение с предшествующими результатами.

Формулировка граничных условий при теплообмене и испарении имеет очевидный теоретический и практический интерес [1–3]. В связи с этим не ослабевает интерес к получению граничных условий испарения и теплообмена (скачков температуры) с учетом разнообразных физических обстоятельств. Этим же обусловлен интерес к аналитическим решениям данных задач для модельных интегралов столкновений. Относительно недавно были получены точные решения граничных задач теплообмена и испарения для БГК-модели интеграла столкновений с постоянной частотой столкновений молекул [4, 5]. Однако предположение о постоянстве частоты столкновений (независимо от скорости молекул) представляется весьма идеализированным. Более реалистичными являются БГК-модели с зависящими от скорости молекул частотами столкновений [2]. Простейшая из них – это модель, в которой частота столкновений пропорциональна скорости молекул. При этом постоянна средняя длина свободного пробега молекул.

Целью настоящей работы является аналитическое решение двух граничных задач для модельного БГК-уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул. Это задача о слабом испарении и задача о скачке температуры разреженного пара над плоской твердой поверхностью. В работе преодолены трудности, связанные с решением векторной краевой задачи Римана – Гильберта с матричным (3×3) коэффициентом.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим случай слабого испарения пара, когда скорость пара много меньше звуковой. Будем также предполагать, что градиент температуры мал, т.е. относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул много меньше единицы. В этом случае задача линеаризуется, т.е. функцию распределения можно искать в виде

$$f = f_{eq}(1 + h) \tag{1.1}$$

$$f_{eq} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv'^2}{2}\right)$$

Здесь f_{eq} – невозмущенная функция распределения, m – масса молекулы, n – концентрация, T – равновесная температура, $\mathbf{v}$ – скорость молекул, h – линейная поправка к f_{eq}.

Решение этой задачи можно искать в линейном приближении по h. Перейдем к обезразмеренной скорости

$$\xi = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \mathbf{v}$$

Тогда линеаризованное по h БГК-уравнение с частотой столкновений, пропорциональной скорости, можно записать в виде (см., например, [2], с. 356, формула (9.1))

$$\mu = \frac{\partial h}{\partial x} + h = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int f_0'\xi' h' d\xi' + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\xi_1 \int \xi_1'\xi' f_0' h' d\xi' +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\xi^2 - 2)\int f_0'\xi'(\xi'^2 - 2)h' d\xi' \qquad (1.2)$$

$$\mu = \xi_1/\xi, \quad \xi_1 = \xi_x, \quad f_0 = \pi^{-3/2}\exp(-\xi^2)$$

При выводе уравнения (1.2) предполагалось, что течение газа носит стационарный характер и функция распределения зависит только от одной пространственной переменной x, т.е. задача носит одномерный характер.

Рассмотрим слабое испарение пара (слабое – в указанном выше смысле) с плоской поверхности. Будем считать, что ось x направлена перпендикулярно поверхности, при этом плоскость $x = 0$ соответствует самой поверхности испарения. Кроме того, вдали от поверхности может быть задан постоянный градиент температуры, перпендикулярный поверхности. Ввиду симметрии задачи функция распределения h зависит только от пространственной переменной x (но не от y и z).

Рассеяние молекул от поверхности будем считать чисто диффузным. Это приводит к следующему граничному условию на поверхности испарения:

$$\xi_1 > 0: \quad h(0,\xi) = 0 \qquad (1.3)$$

Вдали от поверхности функция распределения переходит в функцию распределения Чепмена – Энскога

$$h(x,\xi) = 2U\xi_1 + \delta_n + \delta_T\left(\xi^2 - \frac{3}{2}\right) + b\left[(x-\mu)\left(\xi^2 - \frac{5}{2}\right) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\xi\mu\right]$$

$$x \to +\infty, \quad \xi_1 < 0 \qquad (1.4)$$

$$\delta_n = \frac{n_\infty - n_s}{n_s}, \quad \delta_T = \frac{T_\infty - T_s}{T_s}$$

Здесь U – обезразмеренная скорость потока, δ_n – относительный скачок концентрации, δ_T – относительный скачок температуры, n_s – концентрация насыщенного пара на поверхности при температуре T_s. Отметим, что величины n_s, T_s совпадают с величинами n, T в выражении для f_{eq}, а n_∞, T_∞ – концентрация и температура пара вне слоя Кнудсена. Величина b пропорциональна асимптотическому значению градиента температуры,

$$b = \frac{1}{T_0}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=\infty}$$

По условию задачи уравнение (1.2), граничные условия (1.3) и (1.4) и функция h зависят от скоростных переменных μ и ξ и не зависят от полярного угла φ в плоскости (ξ_2, ξ_3). После интегрирования по углу φ от 0 до 2π уравнение (1.2) можно преобразовать к виду

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}+1\right)h(x,\xi,\mu)=\int\limits_0^\infty e^{-\xi'^2}\xi'^3\,d\xi'\int\limits_{-1}^{1}\left[1+\frac{3}{2}\xi\mu\xi'\mu'+\frac{1}{2}(\xi'^2-2)(\xi^2-2)\right]h(x,\xi',\mu')d\mu' \tag{1.5}$$

Если искать функцию h в виде

$$h = Y_1(x,\mu) + \xi Y_2(x,\mu) + (\xi^2-2)Y_3(x,\mu)$$

то получим векторную граничную задачу, состоящую в решении векторного уравнения

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\mu)+Y(x,\mu)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}K(\mu,\mu')Y(x,\mu')d\mu' \tag{1.6}$$

с граничными условиями

$$Y(0,\mu)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad 0<\mu<1 \tag{1.7}$$

$$Y(x,\mu)=\begin{bmatrix}\delta_n+\dfrac{1}{2}\delta_T-\dfrac{1}{2}b(x-\mu)\\[2mm] \left(2U-\dfrac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)\mu\\[2mm] \delta_T+b(x-\mu)\end{bmatrix}+o(1),\quad x\to+\infty,\quad -1<\mu<0 \tag{1.8}$$

$$K(\mu,\mu')=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4} & 0\\[2mm] \dfrac{9}{8}\sqrt{\pi\mu\mu'} & 3\mu\mu' & \dfrac{9\sqrt{\pi}}{16}\mu\mu'\\[2mm] 0 & \dfrac{3\sqrt{\pi}}{16} & 1\end{bmatrix}$$

$$Y(x,\mu)=\begin{bmatrix}Y_1(x,\mu)\\Y_2(x,\mu)\\Y_3(x,\mu)\end{bmatrix}$$

Здесь $K(\mu,\mu')$ – ядро уравнения, $Y(x,\mu)$ – неизвестный вектор-столбец.

Целью работы является нахождение скачков температуры и концентрации: δ_T и δ_n.

Впервые задача о температурном скачке с постоянной частотой столкновений рассматривалась М. Смолуховским [6]. Поэтому задачу нахождения скачков температуры и концентрации, когда скорость испарения равна нулю, будем называть задачей Смолуховского. Случай, когда $\nu(\xi)=\text{const}$, для задач скольжения газа рассматривался в работах [7–10].

2. Собственные векторы дискретного и непрерывного спектров. Следуя [11], будем искать решение уравнения (1.6) в виде

$$Y_\eta(x,\mu)=\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)$$

Получим векторное характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta\int\limits_{-1}^{1}K(\mu,\mu')\Phi(\eta,\mu')d\mu' \tag{2.1}$$

Введем нулевой и первый моменты вектора $\Phi(\eta,\mu)$:

$$n^{(\alpha)}(\eta)=\int\limits_{-1}^{1}\Phi(\eta,\mu')\mu'^{\alpha}\,d\mu' \quad (\alpha=0,1)$$

Вычисляя правую часть уравнения (2.1), находим

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta\left[K_0 n^{(0)}(\eta)+3\mu K_1 n^{(1)}(\eta)\right] \tag{2.2}$$

$$K_0=\begin{bmatrix}1 & 4\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1\end{bmatrix},\quad K_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 2\alpha & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\alpha=\frac{3\sqrt{\pi}}{16}$$

Проинтегрировав по μ от -1 до 1 уравнение (2.2), получаем уравнение, из которого находим

$$n^{(1)}(\eta)=\eta(E-K_0)n^{(0)}(\eta),$$

где E – единичная матрица.

Теперь характеристическое уравнение (2.2) упрощается

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta\Delta(\mu\eta)n^{(0)}(\eta) \tag{2.3}$$

$$\Delta(\mu\eta)=K_0+3\mu\eta K_1(E-K_0)=\begin{bmatrix}1 & 4\alpha & 0\\ 0 & 3c\mu\eta & 0\\ 0 & \alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$c=1-9\alpha^2=1-\frac{81\pi}{256}=0{,}00598$$

Решение характеристического уравнения (2.3) при $\eta\in(-1,1)$ возьмем в пространстве обобщенных функций (см., например, [12])

$$\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta\Delta(\mu\eta)P\frac{1}{\eta-\mu}n^{(0)}(\eta)+g(\eta)\delta(\eta-\mu) \tag{2.4}$$

где $g(\eta)$ – вектор, определяемый из условия нормировки, Px^{-1} – символ главного значения интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Подставляя собственные векторы (2.4) в выражение для нулевого момента

$$n^{(0)}(\eta)=\int\limits_{-1}^{1}\Phi(\eta,\mu')d\mu'$$

получаем

$$g(\eta)=\Lambda(\eta)n^{(0)}(\eta),\quad \Lambda(z)=E+\frac{1}{2}z\int\limits_{-1}^{1}\Delta(\mu z)\frac{d\mu}{\mu-z}$$

где $\Lambda(z)$ – дисперсионная матрица-функция.

Таким образом, собственные векторы непрерывного спектра определяются с точностью до произвольного неособого нулевого своего момента $n^{(0)}(\eta) \equiv n(\eta)$

$$\Phi(\eta,\mu) = \Phi^*(\eta,\mu)n(\eta)$$

$$\Phi^*(\eta,\mu) = \left[\frac{1}{2}\eta\Delta(\mu\eta)P\frac{1}{\eta-\mu} + \Lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)\right] \qquad (2.5)$$

Далее понадобится представление дисперсионной матрицы в явном виде

$$\Lambda(z) = \begin{bmatrix} \lambda_C(z) & 2\alpha z t(z) & 0 \\ 0 & \omega(z) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha z t(z) & \lambda_C(z) \end{bmatrix}$$

Здесь $\lambda_C(z) = 1 + \frac{1}{2} z t(z)$ – дисперсионная функция Кейза [11]

$$t(z) = \int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \omega(z) = 1 + 3cz^2\lambda_C(z)$$

Дисперсионной функцией $\lambda(z)$ по определению называется определитель дисперсионной матрицы

$$\lambda(z) \equiv \det\Lambda(z) = \lambda_C^2(z)\omega(z)$$

Без доказательства сообщим, что дисперсионная функция $\lambda(z)$ имеет нуль четвертого порядка в точке $z = \infty$. Применяя принцип аргумента из теории функций комплексного переменного (см., например, [13]), убеждаемся, что $\lambda(z)$ имеет еще два нуля $\pm\eta_0$, причем согласно [2, с. 358–359] $\eta_0 = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon \approx 3 \cdot 10^{-40}$. Итак, дискретный спектр характеристического уравнения состоит из четырехкратной точки $z = \infty$ и двух точек $\pm\eta_0$. Этим точкам отвечают шесть дискретных решений уравнения (1.6)

$$Y^{(1)}(x,\mu) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y^{(2)}(x,\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y^{(3)}(x,\mu) = \mu\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y^{(4)}(x,\mu) = (x-\mu)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{\pm\eta_0}(x,\mu) = \frac{1}{2}(\pm\eta_0)\Delta(\pm\mu\eta_0)\exp\left(-\frac{x}{\pm\eta_0}\right)n(\pm\eta_0)$$

Далее понадобится убывающее по x дискретное решение $Y_{\eta_0}(x,\mu)$, содержащее значение в точке η_0 нормировочного вектора $n(\eta_0)$. Подставляя $Y_{\eta_0}(x,\mu)$ в исходное уравнение (1.6), получаем, что вектор $n(\eta_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\Lambda(\eta_0)n(\eta_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

причем

$$\det\Lambda(\eta_0) = 0$$

Векторное уравнение (2.6) эквивалентно системе скалярных уравнений

$$\lambda_C(\eta_0)n_1(\eta_0)+2\alpha\eta_0 t(\eta_0)n_2(\eta_0)=0$$

$$\omega(\eta_0)n_2(\eta_0)=0$$

$$\frac{1}{2}\alpha\eta_0 t(\eta_0)n_2(\eta_0)+\lambda_C(\eta_0)n_3(\eta_0)=0$$

в которой

$$\omega(\eta_0)=0 \tag{2.7}$$

Из этих уравнений видно, что все компоненты вектора $n(\eta_0)$ ненулевые, т.е. вектор $n(\eta_0)$ – неособый. Все последние уравнения удовлетворяются, если взять, например

$$n(\eta_0)=\begin{bmatrix} 2\alpha\eta_0 t(\eta_0) \\ -\lambda_C(\eta_0) \\ \frac{1}{2}\alpha\eta_0 t(\eta_0) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Выразим второе граничное условие (1.8) через дискретные моды

$$Y(x,\mu)=Y_{as}(x,\mu)+o(1),\quad x\to+\infty,\quad -1<\mu<0$$

$$Y_{as}(x,\mu)=\left(\delta_n+\frac{1}{2}\delta_T\right)Y^{(1)}(x,\mu)+\delta_T Y^{(2)}(x,\mu)+\left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)Y^{(3)}(x,\mu)-\frac{1}{2}bY^{(4)}(x,\mu)$$

3. Разложение решения по собственным векторам и векторная краевая задача Римана – Гельберта. В этом разделе формулируется теорема о разложении решения исходной граничной задачи по собственным векторам характеристического уравнения, которая сводится к решению векторной краевой задачи Римана – Гельберта с матричным коэффициентом. Заканчивается доказательство в разд. 4 и 5.

Теорема. Существует единственное разложение решения граничной задачи (1.6)–(1.8), представимое в виде разложения по собственным векторам характеристического уравнения

$$Y(x,\mu)=Y_{as}(x,\mu)+A_0Y_{\eta_0}(x,\mu)+\int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi^*(\eta,\mu)A(\eta)d\eta \tag{3.1}$$

В этом разложении A_0, δ_T и δ_n – неизвестные коэффициенты (скалярные), отвечающие дискретному спектру, $A(\eta)$ – неизвестная векторная функция, являющаяся коэффициентом непрерывного спектра. Приводимое ниже доказательство позволяет найти в явном виде неизвестные коэффициенты дискретного и непрерывного спектров.

Доказательство. Используя граничное условие (1.7), перейдем от разложения (3.1) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$Y_{as}(0,\mu)+A_0Y_{\eta_0}(0,\mu)+\Lambda(\mu)A(\mu)+\frac{1}{2}\int_0^1 \eta\Delta(\mu\eta)A(\eta)\frac{d\eta}{\eta-\mu}=0,\quad 0<\mu<1 \tag{3.2}$$

Введем вспомогательную вектор-функцию

$$N(z)=\int_0^1 \eta\Delta(z\eta)A(\eta)\frac{d\eta}{\eta-z} \tag{3.3}$$

для которой ее граничные значения на разрезе (0,1) по некасательным путям сверху и снизу связаны формулами Сохоцкого – Племеля

$$
\begin{aligned}
&N^+(\mu)-N^-(\mu)=2\pi i\mu\Delta(\mu^2)A(\mu)\\
&N^+(\mu)+N^-(\mu)=2\int\limits_0^1 \eta\Delta(\mu\eta)A(\eta)\frac{d\eta}{\eta-z},\quad 0<\mu<1
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Приведем такие же равенства для дисперсионной матрицы-функции

$$
\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)=\pi i\mu\Delta(\mu^2),\quad \Lambda^+(\mu)+\Lambda^-(\mu)=2\Lambda(\mu)
\tag{3.5}
$$

С помощью второго из уравнений (3.4) преобразуем уравнение (3.2) к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big(N^+(\mu)+N^-(\mu)\Big)+\Lambda(\mu)\Delta^{-1}(\mu^2)\Delta(\mu^2)A(\mu)+Y_{as}(0,\mu)+A_0Y_{\eta_0}(0,\mu)=0,\\
&0<\mu<1
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Уравнение (3.6) умножим слева на первое из равенств (3.5). Будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)][N^+(\mu)+N^-(\mu)]+\Delta(\mu^2)\Lambda(\mu)\Delta^{-1}(\mu^2)2\pi i\mu\Delta(\mu^2)A(\mu)+\\
&+2[\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)][Y_{as}(0,\mu)+A_0Y_{\eta_0}(0,\mu)]=0,\quad 0<\mu<1
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Введем новую дисперсионную матрицу-функцию

$$
L(z)=\Delta(z^2)\Lambda(z)\Delta^{-1}(z^2)
\tag{3.8}
$$

Заметим, что на разрезе (–1,1) для разности граничных значений сверху и снизу этой матрицы справедливы следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&L^+(\mu)-L^-(\mu)=\Delta(\mu^2)\Lambda^+(\mu)\Delta^{-1}(\mu^2)-\Delta(\mu^2)\Lambda^-(\mu)\Delta^{-1}(\mu^2)=\\
&=\Delta(\mu^2)[\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)]\Delta^{-1}(\mu^2)=\pi i\mu\Delta(\mu^2)=\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Теперь, используя равенства (3.4), (3.5), (3.7) и (3.8), приведем уравнение (3.7) к векторной краевой задаче Римана – Гильберта

$$
\begin{aligned}
&L^+(\mu)[N^+(\mu)+2Y_{as}(0,\mu)+2Y_{\eta_0}(0,\mu)]-\\
&-L^-(\mu)[N^-(\mu)+2Y_{as}(0,\mu)+2Y_{\eta_0}(0,\mu)]=0,\quad 0<\mu<1
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Матричный коэффициент этой задачи имеет вид

$$
G(\mu)=[L^+(\mu)]^{-1}L^-(\mu)=\Delta(\mu^2)[\Delta^+(\mu)]^{-1}\Lambda^-(\mu)\Delta^{-1}(\mu^2)
\tag{3.11}
$$

4. Факторизация матричного коэффициента. Для задачи (3.10) рассмотрим соответствующую однородную задачу, или задачу факторизации коэффициента (3.11)

$$
G(\mu)=X^+(\mu)\Big[X^-(\mu)\Big]^{-1},\quad 0<\mu<1
$$

или, в симметричной форме

$$
L^+(\mu)X^+(\mu)=L^-(\mu)X^-(\mu),\quad 0<\mu<1
\tag{4.1}
$$

где $X(\mu)$ – искомая факторматрица.

Умножая обе части задачи (4.1) слева на матрицу $\Delta^{-1}(\mu^2)$, получаем

$$P^+(\mu)X^+(\mu) = P^-(\mu)X^-(\mu), \quad 0<\mu<1 \tag{4.2}$$

$$P(z) = \Lambda(z)\Delta^{-1}(z^2)$$

Вернемся к дисперсионной матрице и представим ее в виде, линейном относительно функции $\lambda_C(z)$, имеющей скачок при переходе через разрез $(-1,1)$

$$\Lambda(z) = \lambda_C(z)\Delta(z^2)+K$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -4\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Следовательно, матрица $P(z)$ имеет вид

$$P(z) = \lambda_c(z)E + \frac{1}{3cz^2}K$$

Далее без вывода приведем матрицу S, приводящую к диагональному виду матрицу K, и обратную к ней

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3\alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det S = 1$$

Нетрудно вычислить, что

$$S^{-1}KS = \mathrm{diag}\{0,0,1\}$$

$$S^{-1}P(z)S \equiv \Omega(z) = \mathrm{diag}\left\{\lambda_C(z), \lambda_C(z), \frac{\omega(z)}{3cz^2}\right\}$$

Закончив диагонализацию матрицы $P(z)$, вернемся к решению задачи (4.2). Будем искать ее решение в виде

$$X(z) = SX_0(z)S^{-1} \tag{4.3}$$

$$X_0(z) = \mathrm{diag}\{U(z), U(z), V(z)\}$$

где $X_0(z)$ – новая неизвестная диагональная матрица.

Подставляя (4.3) в (4.2), получаем матричную краевую задачу Римана – Гильберта

$$\Omega^+(\mu)X_0^+(\mu) = \Omega^-(\mu)X_0^-(\mu), \quad 0<\mu<1$$

эквивалентную трем скалярным задачам (из которых первые две совпадают, поэтому выписывается лишь одна из них)

$$\frac{U^+(\mu)}{U^-(\mu)} = \frac{\lambda_C^-(\mu)}{\lambda_C^+(\mu)}, \quad 0<\mu<1 \tag{4.4}$$

$$\frac{V^+(\mu)}{V^-(\mu)} = \frac{\omega^-(\mu)}{\omega^+(\mu)}, \quad 0<\mu<1 \tag{4.5}$$

Пусть $\theta(\mu) = \arg\lambda_C^+(\mu)$ и $\varepsilon(\mu) = \arg\omega^+(\mu)$ – главные значения аргументов. Приведем без вывода решение задачи (4.4)

$$U(z) = z\exp(-u(z)), \quad U(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\theta(\tau)-\pi}{\tau - z}d\tau$$

и задачи (4.5)

$$V(z) = z\exp(-\upsilon(z)), \quad \upsilon(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varepsilon(\tau)-\pi}{\tau - z}d\tau$$

Итак, матрица $X_0(z)$ построена, следовательно, построена и факторматрица $X(z)$, которая вычисляется согласно (4.3)

$$X(z) = \begin{bmatrix} U(z) & 4\alpha(U(z)-V(z)) & 0 \\ 0 & V(z) & 0 \\ 0 & \alpha(U(z)-V(z)) & U(z) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Найдем асимптотику функций $U(z)$ и $V(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки

$$U(z) = z - U_1 + o(1), \quad |z| \to \infty \tag{4.7}$$

$$V(z) = z - V_1 + o(1), \quad |z| \to \infty$$

Здесь

$$U_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 [\theta(\tau)-\pi]d\tau, \qquad V_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 [\varepsilon(\tau)-\pi]d\tau$$

есть лорановские коэффициенты при z^{-1} разложений функций $u(z)$ и $\upsilon(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Формула для U_1 интегрированием по частям приводится к известной формуле (4.21) (см. [2], с. 334)

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\tau d\tau}{(1-\tau^2)\left[\lambda_C^2(\tau) + \left(\tfrac{1}{2}\pi\tau\right)^2\right]}$$

Следовательно, асимптотика матрицы $X(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки такова

$$X(z) = zE - \begin{bmatrix} U_1 & 4\alpha(U_1 - V_1) & 0 \\ 0 & V_1 & 0 \\ 0 & \alpha(U_1 - V_1) & U_1 \end{bmatrix} + o(1), \quad |z| \to \infty$$

Для обратной матрицы

$$X^{-1}(z) = \begin{bmatrix} U^{-1}(z) & 4\alpha(U^{-1}(z) - V^{-1}(z)) & 0 \\ 0 & V^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \alpha(U^{-1}(z) - V^{-1}(z)) & U^{-1}(z) \end{bmatrix}$$

асимптотика находится также на основании равенств (4.7) и имеет вид

$$X^{-1}(z) = \frac{1}{z}E + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \to \infty$$

5. Условия разрешимости и завершение решения краевой задачи. Вернемся к решению неоднородной краевой задачи (3.10). С помощью задачи (4.1) и равенства

(3.11) преобразуем задачу (3.10) к задаче по нулевому скачку

$$\left[X^+(\mu)\right]^{-1}\left[N^+(\mu)+2Y_{as}(0,\mu)+2Y_{\eta_0}(0,\mu)\right]-$$
$$-\left[X^-(\mu)\right]^{-1}\left[N^-(\mu)+2Y_{as}(0,\mu)+2Y_{\eta_0}(0,\mu)\right]=0, \quad 0<\mu<1 \tag{5.1}$$

Учитывая поведение векторов и матриц, входящих в задачу (5.1), и их асимптотику в бесконечно удаленной точке, получим ее общее решение

$$N(z)=-2Y_{as}(0,z)-2Y_{\eta_0}(0,z)+X(z)\left[\frac{B}{z-\eta_0}+C\right] \tag{5.2}$$

где B и C – произвольные векторы с элементами B_i и C_i, $i=1, 2, 3$.

Решение (5.2) имеет простые полюсы в точке η_0 и в точке $z=\infty$, в то время как вектор-функция $N(z)$, определяемая ранее равенством (3.3), в точке η_0 является аналитической, а в точке $z=\infty$ исчезают ее первый (верхний) и третий (нижний) элементы, а второй элемент имеет конечный предел.

Для устранения указанных особенностей перейдем к условиям разрешимости. Для этого решение (5.2) запишем в явном виде

$$N(z)=-2\begin{bmatrix}\delta_n+\frac{1}{2}\delta_T+\frac{1}{2}bz\\ \left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)z\\ \delta_T-bz\end{bmatrix}+A_0\eta_0\Delta(z\eta_0)n(\eta_0)\frac{1}{z-\eta_0}+X(z)\left[\frac{B}{z-\eta_0}+C\right] \tag{5.3}$$

Из выражения (5.3) видно, что полюс в точке η_0 уничтожается одним векторным условием

$$\eta_0A_0\Delta(\eta_0^2)n(\eta_0)+X(\eta_0)B=0 \tag{5.4}$$

эквивалентным трем скалярным уравнениям

$$\eta_0A_0(n_1(\eta_0)+4\alpha n_2(\eta_0))+U_0B_1+4\alpha(U_0-V_0)B_2=0$$

$$3c\eta_0^3A_0n_2(\eta_0)+V_0B_2=0$$

$$\eta_0A_0(\alpha n_1(\eta_0)+n_3(\eta_0))+\alpha(U_0-V_0)B_2+U_0B_3=0$$

$$U_0=U(\eta_0), \quad V_0=V(\eta_0)$$

Заметим, что согласно (2.8)

$$n_1(\eta_0)+4\alpha n_2(\eta_0)=-4\alpha, \qquad \alpha n_1(\eta_0)+n_2(\eta_0)=-\alpha$$

а согласно уравнению (2.7), $3c\eta_0^2\lambda_C(\eta_0)=-1$. Итак, уравнения, устраняющие полюс в точке η_0, упрощаются

$$-4\alpha\eta_0A_0+U_0B_1+4\alpha(U_0-V_0)B_2=0 \tag{5.5}$$

$$\eta_0A_0+V_0B_2=0 \tag{5.6}$$

$$-\alpha\eta_0A_0+\alpha(U_0-V_0)B_2+U_0B_3=0 \tag{5.7}$$

Из этой системы находим:

$$B_1=4\alpha\eta_0A_0V_0^{-1}, \quad B_2=-\eta_0A_0V_0^{-1}, \quad B_3=\alpha\eta_0A_0V_0^{-1} \tag{5.8}$$

Напомним, что вектор (2.8), удовлетворяющий условию (2.6), определен с точностью до произвольной мультипликативной скалярной постоянной. Поэтому на первый взгляд кажется, что возможен произвол в условиях, устраняющих полюс в точке η_0. Чтобы рассеять эти сомнения, возьмем дисперсионную матрицу $\Lambda(z)$ и подставим ее в уравнение (2.6). Имеем

$$\lambda_C(\eta_0)\Delta(\eta_0^2)n(\eta_0)+Kn(\eta_0)=0$$

откуда

$$\Delta(\eta_0^2)n(\eta_0)=-\frac{1}{\lambda_C(\eta_0)}Kn(\eta_0)=\begin{bmatrix}-4\alpha\\ 1\\ -\alpha\end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Подставляя теперь (5.9) в (5.4), получим в точности уравнения (5.5)–(5.7).

Перейдем к корректному определению решения (5.2) в бесконечно удаленной точке. Для этого отыщем ее асимптотику в окрестности этой точки

$$N(z)=z\begin{bmatrix}-b+C_1\\ -2\left(2U-\dfrac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)+C_2\\ 2b+C_3\end{bmatrix}+ \tag{5.10}$$

$$+\begin{bmatrix}-2\delta_n-\delta_T+B_1-U_1C_1-4\alpha(U_1-V_1)C_2\\ B_2-V_1C_2+3cA_0\eta_0^2n_2(\eta_0)\\ -2\delta_T+B_3-\alpha(U_1-V_1)C_2-U_1C_3\end{bmatrix}+o(1),\quad |z|\to\infty$$

Устраняя полюс в бесконечно удаленной точке, потребуем, чтобы

$$C_1=b,\quad C_2=2\left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right),\quad C_3=-2b \tag{5.11}$$

Сделаем верхний и нижний элементы решения (5.10) исчезающими в бесконечно удаленной точке и приравняем конечные пределы в этой точке у второго элемента решения (5.10) и у второго элемента вспомогательной функции $N(z)$, определенной равенством (3.3). На этом пути с учетом равенств (5.8) и (5.11) получаем следующую систему уравнений, из которой находим:

$$\delta_n=-\frac{1}{2}\delta_T+2\alpha\eta_0\frac{A_0}{V_0}-\frac{1}{2}bU_1-4\alpha\left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)(U_1-V_1) \tag{5.12}$$

$$3c\int_0^1\eta^2A_2(\eta)d\eta=\eta_0\frac{A_0}{V_0}+2\left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)V_1 \tag{5.13}$$

$$\delta_T=\frac{1}{2}\alpha\eta_0\frac{A_0}{V_0}-\alpha\left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)(U_1-V_1)+bU_1 \tag{5.14}$$

Выражения (5.12) и (5.14) содержат одну неизвестную константу A_0. Определим ее из уравнения (5.13). Для этого найдем в явном виде элемент $A_2(\eta)$ вектора $A(\eta)$. Применим формулу Сохоцкого – Племеля ко второму элементу вектор-функции $N(z)$, определенных равенствами (3.3) и (5.2). Получим

$$3c\eta^2A_2(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\left[V^+(\eta)-V^-(\eta)\right]\left[\frac{B_2}{\eta(\eta-\eta_0)}+\frac{C_2}{\eta}\right]$$

Следовательно, согласно (5.13), находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \left[V^+(\eta)-V^-(\eta)\right]\left[\frac{B_2}{\eta_0(\eta-\eta_0)}+\left(C_2-\frac{B_2}{\eta_0}\right)\frac{1}{\eta}\right]d\eta =$$

$$= \eta_0 A_0 V_0^{-1}+C_2V_1-3A_0 c\eta_0^2 n_2(\eta_0) \tag{5.15}$$

Обозначим далее

$$J(\eta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{V^+(\eta)-V^-(\eta)}{\eta-\eta_0}d\eta \tag{5.16}$$

Тогда из уравнения (5.15) находим недостающий последний коэффициент дискретного спектра

$$A_0=\frac{J(0)-V_1}{J(\eta_0)-J(0)+\eta_0 V_0}2\left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)V_0 \tag{5.17}$$

Коэффициент непрерывного спектра находится, как уже указывалось, с помощью формулы Сохоцкого – Племеля

$$A(\eta)=\frac{\Delta^{-1}(\eta^2)}{2\pi i\eta}\left[X^+(\eta)-X^-(\eta)\right]\left[B\frac{1}{\eta-\eta_0}+C\right]$$

Итак, все коэффициенты разложения (3.1) найдены однозначно. Теорема доказана.

6. Точные формулы для скачков температуры и концентрации. Без доказательства сообщим, что, применяя технику контурного интегрирования, можно вычислить интегралы $J(\eta_0)$ и $J(0)$ (см. (5.16)):

$$J(\eta_0)=V_0+V_1-\eta_0,\qquad J(0)=V(0)+V_1$$

Следовательно, согласно (5.17)

$$A_0=-2\left(2U-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}\right)V_0$$

Выпишем формулы для скачков температуры и концентрации согласно (5.14) и (5.12)

$$\delta_T=2U\beta+\left(-\frac{2\beta}{3\sqrt{\pi}}+U_1\right)b,\qquad \delta_n=2U(3{,}5\beta)+\left(-\frac{7\beta}{3\sqrt{\pi}}-U_1\right)b \tag{6.1}$$

$$\beta=\frac{3\sqrt{\pi}}{16}\left[-\eta_0-U_1+V_1\right]$$

В задаче о слабом испарении, когда относительный градиент температуры b равен нулю, получим из (6.1)

$$\delta_T=2U\beta,\qquad \delta_n=2U(3{,}5\beta) \tag{6.2}$$

В задаче о скачке температуры, когда скорость испарения равна нулю $U=0$, получаем

$$\delta_T=(\gamma+U_1)b,\qquad \delta_n=(3{,}5\gamma-U_1)b\qquad \gamma=-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\beta \tag{6.3}$$

Приведем результаты численных расчетов. Так, как $V_0=0$, $U_1=0{,}71045$, $V_1=0{,}99770$, то $\beta=-0{,}23687$, а $\gamma=0{,}08909$. Следовательно, согласно (6.2) в задаче о слабом испарении имеем:

$$\delta_T = -2U \cdot 0,23687 \qquad \delta_n = -2U \cdot 0,82905$$

В задаче Смолуховского скачок температуры и скачок концентрации соответственно равны

$$\delta_T = 0,79954b, \qquad \delta_n = -0,39863b$$

Выражая коэффициенты этих скачков в единицах той же средней длины свободного пробега, что и в [2], из формул (6.3) получим:

$$\delta_T = 1,49914\frac{l}{\Pr} = 2,24871l, \qquad \delta_n = -0,74744\frac{l}{\Pr} = -1,12112l$$

7. Заключение. Итак, для модельного уравнения Больцмана с оператором столкновения БГК и с частотой, пропорциональной скорости молекул, получены точные выражения для скачков температуры и концентрации в задаче о слабом испарении и в задаче Смолуховского. Остановимся на принципиальных моментах решения. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению и дисперсионной функции, нули которой составляют дискретный спектр характеристического уравнения. Найдены обобщенные собственные векторы характеристического уравнения, отвечающие непрерывному спектру, который совпадает с интервалом (–1,1) действительной оси, и собственные векторы дискретного спектра. Установлено существование и единственность разложения решения общей граничной задачи (включающей две рассматриваемые) по собственным векторам непрерывного и дискретного спектров. Это разложение сводится к векторной краевой задаче Римана – Гильберта с матричным (3×3) коэффициентом. Решение краевой задачи имеет простые полюсы в бесконечности и в одной конечной точке. Условия разрешимости позволяют устранить полюсы и однозначно определить коэффициенты разложения, в том числе искомые величины скачков температуры и концентрации. Отметим, что величина скачка температуры δ_T в точности совпадает с найденной ранее методом Винера – Хопфа (см. [2], с 359, формулы (9.21) и (9.22)). Величина δ_n в [2] не приводится. Задача о слабом испарении для уравнения (1.1) ставится и решается впервые.

Приведем сравнение с результатами работы [5] для случая $\nu(\xi) = \text{const}$. В этом случае в задаче Смолуховского $\delta_T = 2,15897l$ и $\delta_n = -1,23035l$. Значит, учет зависимости $\nu = \nu(\xi)$ приводит к росту величины температурного скачка на 4,16% и уменьшению величины скачка концентрации на 9,74%. В задаче о слабом испарении [5] для случая $\nu(\xi) = \text{const}$ $\delta_T = -2U \cdot 0,22437$ и $\delta_n = -2U \cdot 0,84350$. Сравнение показывает, что учет зависимости частоты столкновения от скорости приводит к уменьшению величины температурного скачка на 5,57% и к увеличению скачка концентрации на 1,71%.

Авторы благодарят Г.В. Слободского за помощь в численных расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Точное решение уравнения Больцмана с оператором столкновений БГК в задаче о слабом испарении // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 6. С. 55–63.
5. *Долгошеина Е.Б., Латышев А.В., Юшканов А.А.* Точные решения модельного БГК-уравнения Больцмана в задачах о скачке температуры и слабом испарении // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 163–171.

6. *Smoluchowski M.* Über Wärmeleitung in verdünnten Gasen // Ann. Phys. Chem. 1898. B. 64. S. 101–130.
7. *Cercignani C.* The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency // Ann. Phys. 1966. V. 40. № 3. P. 469–481.
8. *Cercignani C., Foresti P., Sernagiotto F.* Dependence of the slip coefficient on the form of the collision frequency // Il. Nuovo Cimento Ser B. 1968. V. 57. № 2. P. 297–306.
9. *Williams M.M.R.* Boundary-value problems in the kinetic theory of gases. Pt I. Slip flow // J. Fluid. Mech. 1969. V. 36. Pt 1. P. 145–159.
10. *Pao J.-P.* Some boundary value problems in the kinetic theory of gases // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 11. P. 2285–2290.
11. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
12. *Владимиров B.C.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
13. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.IX.1994