

УДК 533.6.011.35

© 1996 г. С.В. ЯГУДИН

О СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В МИНИМАЛЬНОМ СЕЧЕНИИ СОПЛА

Рассмотрена задача профилирования сверхзвукового сопла с равномерным потоком на выходе, когда контур строится от точки, расположенной на заданной сужающейся части сопла. Показано, что существуют контуры, в минимальных сечениях которых течение на запертых режимах является сверхзвуковым (в отличие от известных представлений о смешанном или равномерном звуковом). Анализируется влияние неравномерности потока в минимальном сечении на тягу сверхзвукового сопла.

При проектировании сопла Лавала контуры сужающейся (дозвуковой) и расширяющейся (сверхзвуковой) его частей обычно профилируют независимо [1].

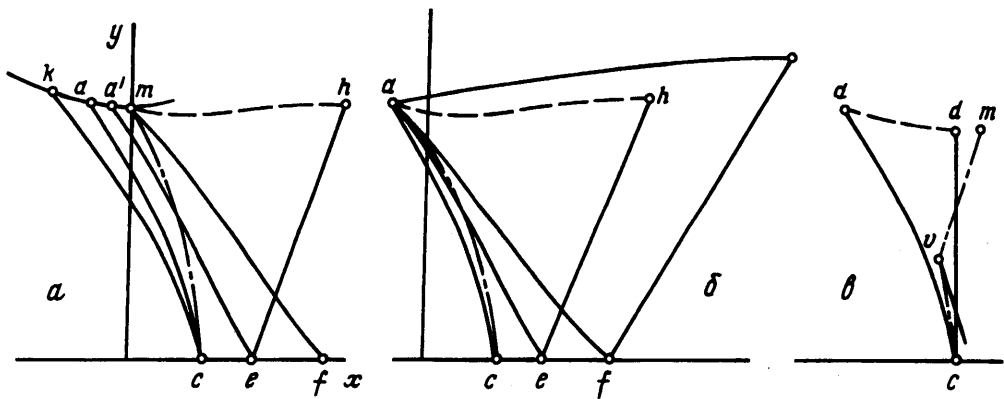
До недавнего времени профилирование сужающейся части сводилось в основном к построению контура, обеспечивающего равномерный звуковой поток в минимальном сечении (например, [2]). В работе [3] при профилировании сужающегося сопла ставилось противоположное требование – обеспечить как можно более неравномерное безотрывное течение на выходе (с целью увеличения тяги).

Одной из наиболее известных задач профилирования расширяющейся части сопла Лавала является задача о построении контура, дающего равномерный сверхзвуковой поток в выходном сечении. Построение такого контура обычно начинается от минимального сечения или несколько ниже от него по потоку, от заданного участка контура. Поток в минимальном сечении, как правило, принимается равномерным звуковым (с прямой звуковой линией). Если сужающаяся часть не спрофилирована на число $M = 1$, звуковая линия, как известно, является криволинейной (в основном она смещена за минимальное сечение и лишь незначительная ее часть около сужающейся стенки располагается перед ним).

Влияние формы звуковой линии на интенсивность разгона потока в веере волн разрежения и на распределения параметров вдоль контуров плоских сопел с угловой точкой в минимальном сечении и равномерным потоком на выходе с $M_e \approx 4$ исследовалось в [4].

Ниже рассматривается практически не изученный случай профилирования контура сверхзвукового сопла с равномерным потоком на выходе, когда контур строится не от минимального сечения, а от точки, расположенной перед ним, на заданной сужающейся части сопла.

1. В области минимального сечения потока с выпуклой внутрь его границей km (фиг. 1, *a*) можно выделить, как известно, звуковую линию kc , предельную характеристику C_0^- второго семейства (линию ac) и линию tc (пунктирную) с углом наклона вектора скорости $\theta = 0$, пересекающую все волны разрежения от участка am . Верхняя граница потока может быть либо стенкой, либо границей струи с постоянным давлением на ней. Точка a характеристики C_0^- может совпадать с точкой k , что имеет мес-



Фиг. 1. Построение контура сопла от служащейся его части. Штриховые кривые – контур, пунктирные кривые – $\theta = 0$

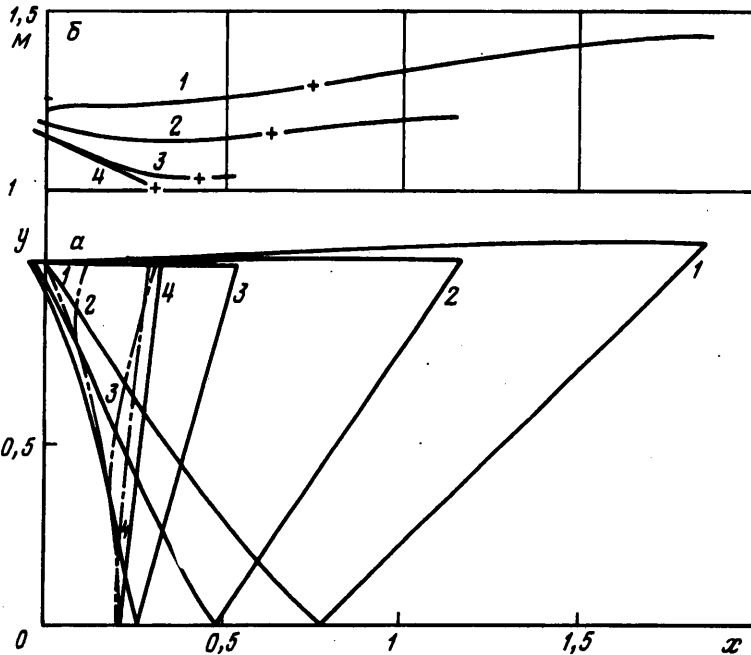
то, например, при запортом режиме истечения струи из конического сопла с концевой точкой контура k .

В дальнейшем часть границы вплоть до точки a считается неизменной, а правее ее строится новый контур (штриховая линия), который дает равномерный поток с заданным значением числа M_e в выходном сечении. Делается это известным образом.

Вниз по потоку от характеристики C_0^- осуществляется ускорение течения до заданного числа M_e в точке e на оси x . Из точки e проводится равномерная характеристика и между нею и граничной характеристикой разгонного участка решается задача Гурса. Ускорить течение до заданного значения M_e можно, пристраивая к точке a различные участки контура (в том числе с угловой точкой), но такие, чтобы обтекание их не приводило к нарушению течения на предельной характеристике C_0^- (по крайней мере необходимо, чтобы они были выпуклыми в сторону потока). Интересным, позволяющим уменьшить длину сопла является случай, когда волны разрежения, ускоряющие течение от числа $M = 1$ до заданного M_e , исходят из точки a (фиг. 1, б). Линия $\theta = 0$, показанная пунктиром, пересекает все волны разрежения с $\theta < 0$ в точке a .

В [4] течение на характеристике mf , ускоренное в волнах разрежения, которые идут от участка am линии тока струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками, ускорялось в волнах разрежения из точки m . Принимая в качестве начального течения на mf , можно построить лишь контуры с $M_e \geq M_f$ (в плоском случае $M_f = M_m$). Чтобы получить $M_e < M_f$, нужно, чтобы верхняя точка граничной характеристики разгонного участка находилась перед минимальным сечением (т.е. на сужающейся части сопла), а θ в ней было отрицательным и уменьшалось от 0 до θ_a при уменьшении M_e от M_f до 1. Последнее просто достигается, например, при укорочении участка am до нуля или с помощью угловой точки a .

Независимо от способа ускорения течения общим является следующее. Если угол наклона вектора скорости в верхней точке граничной характеристики неотрицательный, то минимальное сечение проходит через точку с $\theta = 0$, т.е. через точку m (фиг. 1, а) или точку a (фиг. 1, б). Если же угол отрицательный, то контур за этой точкой должен сначала сужаться, а затем, при $M_e > 1$, расширяться (штриховые линии на фиг. 1, а, б), поскольку поток в минимальном сечении, как известно из одномерной теории сопла, равномерным сверхзвуковым быть не может. При этом линия $\theta = 0$ будет совпадать с mc или ac лишь частично, до точки пересечения с граничной характеристикой разгонного участка. Выше нее линия $\theta = 0$ будет отклоняться вправо и



Фиг. 2. Контуры сопел 1-4 и распределения чисел M вдоль них. Пунктирные кривые $-\theta = 0$

идти в точку m минимального сечения построенного контура. Такой результат достаточно очевиден в плоском случае, когда течение выше граничной характеристики с $M_e > 1$ является простой волной и значения параметров просто переносятся на контур сопла по прямолинейным характеристикам первого семейства (что позволяет, в отличие от осесимметричного случая, рассчитывать течение в $a'eh$ или aeh по конечным формулам, без использования метода характеристик).

О построении контура сопла с $M_e = 1$ (фиг. 1, в) будет отмечено особо.

2. Были рассчитаны методом характеристик при сравнительно небольших неравномерностях параметров на предельной характеристике контуры плоских и осесимметричных сопел с значениями M_e вплоть до 4, но основное внимание было уделено расчету сопел с сужающимися-расширяющимися участками (при этом значения M_e составляли менее 1, 6). Начальные данные на C_0^- были получены с помощью известных аналитических решений прямой задачи о течении совершенного невязкого и нетеплопроводного газа в области минимального сечения сопла Лавала. В плоском случае – решение [5] с тремя членами разложения по $1/R$ (R – радиус кривизны контура в области минимального сечения). В осесимметричном случае – решение [6] с тремя членами разложения по $1/(R + \eta)$ (η – параметр). Отношение удельных теплоемкостей газа κ при расчетах принималось равным 1,4.

На фиг. 2, а для примера приведены контуры четырех осесимметричных сопел с $M_e = 1,436, 1,210, 1,037$ и $1,006$, соответствующие им равномерные и граничные характеристики разгонных участков, а также линии $\theta = 0$, показанные пунктиром. Концевые точки контуров и линии $\theta = 0$ отмечены цифрами 1-4. Начальные данные на граничных характеристиках получены при $R = 1$ и $\eta = 1$. За единицу длины принята ордината минимального сечения исходного сопла при $x = 0$.

Минимальные сечения сопел с $M_e \geq 1,436$ для сопла 1 проходят через сечение $x = 0$. При этом линия $\theta = 0$ является «обычной», т.е. полностью располагается за минимальным сечением.

При уменьшении M_e до значения 1,118 минимальное сечение смещается к сечению, проходящему через центр сопла, $x_m \rightarrow x_c$ (минимальное сечение сопла 2 занимает промежуточное положение). При этом течение в минимальном сечении в соответствии с общепринятыми представлениями является смешанным (дозвуковым в центральной части и сверхзвуковым около стенки), как и в соплах с $M_e \geq 1,436$. Но линия $\theta = 0$ уже отличается от «обычной» тем, что верхняя ее часть располагается перед минимальным сечением. Такого рода, но сильноградиентное течение в минимальном сечении было получено и при профилировании оптимальных сопел в работе [7].

При дальнейшем уменьшении M_e минимальное сечение продолжает смещаться вниз по потоку (уже ниже сечения $x_c = \text{const}$, сопло 3), но затем, при $M_e < 1,021$, начинает двигаться в обратном направлении, к сечению x_c при $M_e \rightarrow 1$ (сопло 4). В соплах с $x_m \geq x_c$ линия $\theta = 0$ располагается полностью перед минимальным сечением. Значения M_e , при которых $x_m \geq x_c$, увеличиваются до 1,188 при $R = 0,625$.

В плоском случае возможность $x_m \geq x_c$ строго доказывается следующим образом (фиг. 1, в). На вертикали, проходящей через центр сопла, отметим точку d с ординатой $y_d = G/\rho_* u_*$ (G – расход газа через сопло, ρ_* , u_* – критические плотность и скорость). На линии $\theta = 0$ исходного течения (на mc или ac) выберем точку v с ординатой меньше $y_d/2$. Проходящая через v граничная характеристика второго семейства выпукла в сторону выхода сопла (до предельной характеристики C_0^+ первого семейства, выходящей из точки c), поэтому касательная к ней в точке v пересечет cd в точке над осью x . Из построения ясно, что проходящая через точку v прямолинейная характеристика первого семейства пересечет вертикаль ниже точки d и, следовательно, конечная ее точка m , в которой достигается расход газа через cm , равный G , лежит правее cd .

Таким образом, существуют сопла с $x_m \geq x_c$, в минимальных сечениях которых течение идеального газа является сверхзвуковым по всему сечению. В таких соплах переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым происходит до минимального сечения. После ускорения в волнах разрежения поток сначала тормозится в пристеночной области, а затем вновь ускоряется и выравнивается. Торможение потока в плоском сопле происходит до предельной характеристики C_0^+ .

В осесимметричных соплах, как показывает анализ результатов расчета, торможение потока около стенки заканчивается раньше точки попадания на нее характеристики C_0^+ , но может продолжаться и за минимальным сечением, на расширяющемся контуре (как в плоских соплах с равномерной [4] и в соплах с вариационной [7] характеристиками). Подтверждают последнее распределение чисел M вдоль контуров сопел 1–3, приведенные на фиг. 2, б, где точками отмечены значения M в точках попадания на контур характеристик C_0^+ .

Если часть контура сопла с $M_e > 1$ и неравномерным сверхзвуковым течением в минимальном сечении укоротить (по крайней мере до минимального сечения или даже до сечения $x_c = \text{const}$), то окажется, что неравномерное сверхзвуковое изоэнтропическое течение на выходе сопла можно получить не только с помощью сужающегося-расширяющегося, но и с помощью сужающегося сопла. Неравномерное сверхзвуковое течение в минимальном сечении сопла с изломом контура перед ним было получено в расчетах [8], но оно не было изоэнтропическим из-за образования скачка уплотнения при обтекании излома.

При $M_e = 1$ задача профилирования сводится к построению такого контура ad , который приводит к торможению и выравниванию неравномерного потока на ac до равномерного звукового в выходном сечении, т.е. на отрезке вертикали cd (фиг. 1, в). Ордината точки d легко определяется из уравнения расхода.

Задача профилирования плоского сопла отмеченным выше образом рассмат-

ривалась в [9]. Полагая, что при $M_e = 1$ течение в aeh является простой волной, было показано, что при этом прямолинейные (в соответствии с принятым допущением) характеристики первого семейства, идущие от прилегающего к центру сопла участка характеристики ac , должны пересекаться с характеристикой первого семейства, выходящей из c (т.е. с отрезком cd). Затем, опираясь на непрерывность решений, был сделан вывод, что пересечение характеристик первого семейства должно происходить «по крайней мере и при значениях скорости на выходе из сопла, близких к скорости звука, что означает невозможность спрофилировать контур сопла, исходя из условия равномерного потока на выходе».

Здесь нужно отметить следующее. При $M_e > 1$ течение в aeh (фиг. 1, б) в плоском случае является простой волной (это известно и следует из условий совместности вдоль характеристик обоих семейств). Однако предположение о том, что течение является таким и при $M_e = 1$ (в области acd , фиг. 1, в), не обосновано. Из анализа поля характеристик при $M_e = 1$ около особой линии cd (являющейся характеристикой обоих семейств, звуковой линией и линией $\theta = 0$) следует, что характеристики первого семейства не могут быть прямолинейными и не должны пересекать отрезок cd (как рассматривалось в [9]), иначе условия совместности вдоль них не будут выполняться (учитывая, что на звуковой линии значения $\theta < 0$). Вопрос об особенностях и устойчивости течения перед линией cd открыт и требует специальных аналитических исследований течения в окрестности прямолинейной звуковой линии в дополнение к [10–12].

Интересно, что численное решение обратной задачи сопла Лавалья, а также разложение решения в ряд в окрестности прямолинейной звуковой линии [12], полученные с заданным законом изменения скорости вдоль оси x , свидетельствуют о существовании второй звуковой линии, идущей от сужающейся стенки и попадающей на прямолинейную звуковую линию, но не по касательной, как линия kc , а по нормали к ней между точками c и d . Не исключено, что существует точное решение, описывающее течение в acd .

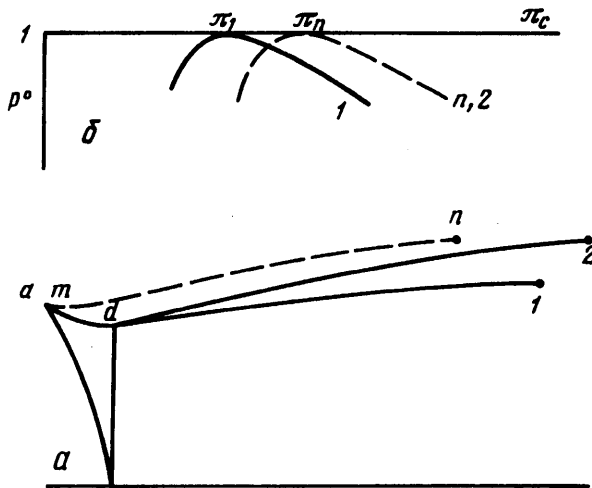
Учитывая трудности расчета методом характеристик течений с числами $M \approx 1$ и отсутствие точных данных на характеристике C_0^- (известно, что точность решений [5, 6] не высока и снижается при удалении от минимального сечения), рассчитать контур сопла с $M_e = 1$ можно лишь приближенно. Без применения специальных мер по увеличению точности расчетов методом характеристик при трансзвуковых скоростях в осесимметричном случае были построены контуры с $M_e = 1,006$ (при $R = 1$) и $1,008$ (при $R = 0,625$), а в плоском при $R = 2,0$ и $1,5$ значение M_e удалось уменьшить лишь до $1,009$ и $1,018$ соответственно (из-за невысокой точности решения [5], о чем отмечалось в [1]). При существенно неравномерном течении на C_0^- , отвечающем истечению плоской струи из отверстия с вертикальными стенками, минимальное значение M_e составило $1,02$. Возможно, контуры сопел с более близкими к единице значениями M_e удастся построить, если начальные данные на C_0^- получать при численном решении обратной задачи сопла.

Проведенные расчеты дают основания предположить, что неравномерное течение на характеристике C_0^- можно изоэнтропически перевести в равномерное звуковое.

Сравнительно короткий контур, переводящий неравномерное дозвуковое течение в равномерное звуковое, дает граница предельного течения Чаплыгина – граница струи с критической скоростью на ней [2]. Очевидно, что контур ad короче упомянутого выше.

3. Рассмотрим вопрос о влиянии на коэффициент тяги $P^0 = P/GV_i$ неравномерности течения в минимальном сечении двумерного (плоского или осесимметричного) сопла с равномерным сверхзвуковым потоком на выходе. Здесь V_i – идеальная скорость, определяемая по формуле

$$V_i = u_* \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1) / (1 - \pi_c^{(1-\kappa)/\kappa})}$$



Фиг. 3. Влияние неравномерности течения в минимальном сечении на тяговую характеристику сопла: 1, 2 – равномерное течение, n – неравномерное

где $\pi_c = p_0 / p_\infty$ – степень понижения давления – отношение полного давления газа к давлению внешней среды.

Контур an сопла n с неравномерным течением на ac и расходом G показан на фиг. 3, a штриховой линией. Течение на ac с помощью контура ad переводится сначала в равномерное звуковое на cd , а затем с помощью контура l – в равномерное сверхзвуковое. Относительные площади выхода сопел l и n (отнесенные к площадям минимальных сечений) обозначим $F_1^\circ = F_1 / F_d$ и $F_n^\circ = F_n / F_m$ ($F_m = F_a$, если контур an расширяется).

Рассмотрим сравнение тяговых характеристик сопел при условии $F_n^\circ = F_1^\circ = F^\circ$. Расчетные режимы для сопел n и l реализуются при значениях π_c , равных π_n и π_1 . Поскольку расход газа через сопла одинаковый, скорость на выходе сопла n больше, чем сопла l (так как $F_n > F_1$) и $\pi_n > \pi_1$. Неравномерность течения в минимальном сечении приводит к эффективному увеличению относительной площади выхода, в результате чего тяговая характеристика сопла n (штриховая линия на фиг. 3, б) смещается в сторону больших значений π_c и коэффициент тяги на режимах недорасширения ($\pi_c > \pi_n$) больше, чем сопла l , тяговая характеристика которого показана кривой l . Так как при фиксированной неравномерности на ac разность $\pi_n - \pi_1 \rightarrow 0$ как при $F^\circ \rightarrow 1$, так и при $F^\circ \rightarrow \infty$, то ясно, что существует диапазон значений F° , при которых неравномерность в минимальном сечении сказывается на коэффициенте тяги в наибольшей мере.

Результаты сравнения не изменятся, если размеры сопла l увеличить в $\mu^{-\vartheta}$ раз ($\mu = G / \rho_* u_* F_m$ – коэффициент расхода сопла n , $\vartheta = 1$ и 2 в плоском и осесимметричном случаях). Площадь минимального сечения такого сопла такая же, как и сопла n . Сравнение при равных площадях минимальных сечений обычно используется при модельных исследованиях сопел.

Очевидно, что при некотором укорочении контуров сопел n и l до одного и того же значения относительной площади выхода смещение тяговых характеристик укороченных сопел в направлении оси π_c останется. Но укорочение контуров сопел с равномерным потоком на выходе дает в плоском случае оптимальные сопла с вариационной характеристикой, а в осесимметричном – близкие к ним [1]. Поэтому вывод о влиянии неравномерности течения в минимальном сечении сопла с равномерным потоком на выходе относится и к оптимальным соплам (при $F_1^\circ = F_n^\circ$). Сравнительно малая неравномерность параметров в минимальном сечении (как при расчетах настоящей работы и в работе [13],

когда отличия коэффициентов расхода от единицы составляли менее 3%) незначительно влияет на тягу.

При увеличении площади выхода F_1 тяговая характеристика сопла I смещается в сторону больших значений π_c и, когда она становится равной F_n (сопла 2), участок тяговой характеристики сопла 2 при $\pi_c \geq \pi_n$ такой же, как и сопла n . Относительная площадь выхода сопла 2 равна $F_2^0 = F_n / F_d = F_n^0 / \mu$. Выбор для сравнения с соплом n сопла 2 с равномерным течением в минимальном сечении, но с относительной площадью выхода F_2^0 в $1/\mu$ раз больше, чем сопла n , компенсирует (исключает) эффективное увеличение относительной площади выхода сопла n , обусловленное неравномерностью течения в минимальном сечении.

Для сопел n и 2 проводились специальные расчеты импульса $I = I_m + X$, где I_m – импульс в минимальном сечении, X – интеграл сил давления, действующих на контур от минимального сечения до сечения с площадью F . При значениях F , близких к минимальному, импульс I_n сопла n несколько выше, чем сопла 2 (из-за того, что неравномерность течения при фиксированном расходе, согласно [14], увеличивает импульс). Затем I_n вплоть до сечения выхода (где $I_n = I_2$) оказывается незначительно ниже: неравномерность в минимальном сечении уменьшает X в большей мере, чем увеличивает I_m (что согласуется с результатами [7], полученными для оптимальных сопел). Поэтому влияние на тягу неравномерности в минимальном сечении укороченных до одного и того же значения площади выхода сопел n и 2 (а следовательно, и оптимальных) незначительное.

Заметное влияние на тягу существенно неравномерного течения по сравнению со слабонеравномерным получено в [7] при особом сравнении сопел – при одинаковых расходах и габаритных ограничениях на все сопло, включая дозвуковую часть. Причем дозвуковая часть сопла с «плавным входом», была выбрана достаточно длинной, равной удвоенному значению ординаты минимального сечения. Это позволило увеличить длину сверхзвуковой части сопла с «внезапным сужением» (т.е. уменьшить крутизну контура) и получить более высокий импульс, или тягу при $p_\infty = 0$ на выходе.

Рассмотренный выше анализ характеристик сопел n и 2 позволяет считать, что если тягу оптимального сопла с внезапным сужением сравнивать с тягой оптимального сопла с равномерным течением в минимальном сечении, дозвуковая часть которого, как и сопла 2, получена с помощью короткого выравнивающего контура ad , то различие в тягах будет незначительным.

Кроме коэффициента тяги P^0 эффективность сопла может быть охарактеризована [15] коэффициентами импульса $I_1^0 = I / I_1$ (I_1 – импульс, вычисленный по одномерной теории), удельного импульса $I_2^0 = I_1^0 / \mu$ и относительного импульса $I_3^0 = I_2^0 (\lambda + 1/\lambda) / (\lambda' + 1/\lambda')$ (значения λ и λ' приведенной скорости определяются из уравнений для приведенного расхода $q(\lambda) = 1/F_n^0$ и $q(\lambda') = \mu/F_n^0$). При равномерном течении в минимальном сечении ($\mu = 1$) коэффициенты равны 1, а при неравномерном $I_1 < 1$, $I_2 > 1$ и $I_3 = 1$. Влияние неравномерности потока в минимальном сечении при использовании I_3^0 , как и при сравнении коэффициентов тяги сопел с одинаковыми расходом и площадью выхода, устраняется [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Течения газа в соплах. М.: Изд-во МГУ, 1978. 351 с.
2. Подсыпанина Н.А., Шифрин Э.Г. Об одном методе профилирования коротких плоских сопел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 1. С. 54–58.
3. Тагиров Р.К. Определение удельной тяги на незапертых режимах и построение безотрывного контура сужающегося сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 158–164.
4. Камзолов В.Н., Пирумов У.Г. Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками // ПМТФ. 1967. № 2. С. 117–122.
5. Hall I.M. Transonic flow in two-dimensional and axiallysymmetric nozzles // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1962. V. 15. Pt 4. P. 487–508.
6. Dutton J.C., Addy A.L. Transonic flow in the throat region of axisymmetric nozzles // AIAA Journal. 1981. V. 19. № 6. P. 801–804.
7. Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Шербаков С.А. Сравнение интегральных характеристик и

- формы профилированных контуров сопел Лаваля с «плавным» и с «внезапным» сужениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 129–137.
8. Ягудин С.В. О течении невязкого газа в сопле с изломом контура перед минимальным сечением // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 130–136.
 9. Шифрин Э.Г. Об использовании течений с прямой звуковой линией в соплах с угловыми точками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 1. С. 168–170.
 10. Овсянников Л.В. Исследование газовых течений с прямой звуковой линией // Тр. ЛКВВИА им А.Ф. Можайского. 1950. Вып. 33. С. 3–24.
 11. Рыжов О.С. Исследование транзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
 12. Пирумов У.Г. Расчет течения в сопле Лаваля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 5. С. 10–22.
 13. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Об учете неравномерности потока в минимальном сечении при оптимальном профилировании расширяющейся части сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 184–186.
 14. Крайко А.Н., Соколов В.Е. Об удельном импульсе потока в минимальном сечении сопла Лаваля и в выходном сечении сужающегося сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 186–188.
 15. Идиятулина Ф.Л., Лаврухин Г.Н., Михайлов Б.Н. и др. Расчетные и экспериментальные исследования влияния радиуса кривизны контура в области критического сечения на характеристики сверхзвуковых сопел // Уч. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 4. С. 159–164.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1994