

УДК 532.528:533.6.011.34

© 1996 г. А. Д. ВАСИН

## РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАВЕРН ЗА ДИСКОМ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Методом конечных разностей выполнен расчет кавитационного обтекания диска по схеме Рябушинского дозвуковым потоком воды при числе Маха  $M \leq 0,95$  и числе кавитации  $\sigma \sim 0,02$ . Проведено сравнение результатов расчета с результатами, полученными в теории тонкого тела и по приближенным формулам.

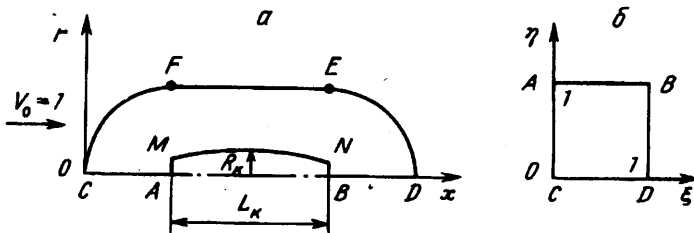
Влияние сжимаемости жидкости на развитые осесимметричные кавитационные течения исследовано в ряде работ. В [1] рассмотрен закон расширения каверны за телом при нулевом числе кавитации и сделано его обобщение на случай дозвукового потока. В [2, 3] исследовано влияние сжимаемости жидкости на тонкие осесимметричные каверны при дозвуковом обтекании и получена асимптотика, несколько отличающаяся от [1]. В [4] методом конечных разностей вычислен коэффициент сопротивления тонкого кругового конуса и определена форма каверны вблизи него для до- и сверхзвукового потока воды, однако форма каверны по всей ее длине не определена. В [5, 6] на основании теории тонкого тела выведено интегродифференциальное уравнение для профиля каверны в до- и сверхзвуковом потоке, определена форма каверны в средней ее части и получена зависимость удлинения каверны от числа кавитации и числа Маха.

Следует отметить, что теория тонкого тела для затупленных кавитаторов (диск, тупой конус и т. д.) не позволяет получить все данные о кавитационном течении, например: форму каверны непосредственно за кавитатором, величину кавитационного сопротивления. Кроме того, линейное уравнение для потенциала обтекания тонких осесимметричных тел сжимаемой жидкостью неприменимо в околозвуковом диапазоне скоростей.

В последнее время развитие численных методов и широкое внедрение ЭВМ позволяет эффективно рассчитывать кавитационные течения в сжимаемой жидкости. В [7] предлагается численно-аналитический метод решения задачи об обтекании произвольного кругового конуса по схеме Рябушинского осесимметричным дозвуковым потоком сжимаемой жидкости (газа), в частности приводятся результаты численного исследования кавитационного обтекания диска в диапазоне чисел кавитации  $0,15 \leq \sigma \leq 1$ .

В данной работе предлагается численный метод, который позволяет рассчитывать кавитационные течения в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости в широком диапазоне чисел кавитации. Сравнение результатов тестового расчета при  $\sigma \approx 0,16$  и  $M = 0,5$  с результатами [7] показало хорошее согласование.

1. Рассмотрим осесимметричное кавитационное обтекание диска потоком сжимаемой жидкости по схеме Рябушинского, в которой каверна замыкается на диск, имеющий одинаковый размер с диском-кавитатором. Ввиду симметрии течение исследуется в меридианной плоскости. Задача заключается в нахождении формы границы  $MN$ , которая удовлетворяет условию постоянства скорости и условию непротекания при заданной длине каверны  $L_k$  (фиг. 1,  $AM$  — диск-кавитатор,  $NB$  — замыкающий диск,  $CFED$  — внешняя граница,  $R_k$  — радиус миделя каверны). Переменные обезразмериваются следующим образом: геометрические



Фиг. 1

размеры относятся к радиусу диска  $R$ , величина скорости относится к скорости невозмущенного потока  $V_0$ , плотность жидкости относится к плотности невозмущенного потока  $\rho_0$ .

Запишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r) = 0 \quad (1.1)$$

где  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль оси симметрии,  $r$  — координата, перпендикулярная оси симметрии,  $v_x$  и  $v_r$  — составляющие скорости вдоль осей  $x$  и  $r$  соответственно,  $\rho$  — плотность жидкости.

В случае сжимаемой жидкости уравнение (1.1) является существенно нелинейным, для его решения применим метод конечных разностей. Для удобства задания граничных условий на поверхности каверны целесообразно отобразить расчетную область в координатах  $x, r$  на единичный квадрат в координатах  $\xi, \eta$  (фиг. 1, б), при этом поверхности кавитатора  $AM$ , каверны  $MN$  и замыкающего диска  $NB$  соответствует отрезок  $\eta = 1, 0 \leq \xi \leq 1$ ; внешней границе  $CFED$  соответствует отрезок  $\eta = 0, 0 \leq \xi \leq 1$ ; отрезку границы вдоль оси симметрии  $CA$  соответствует отрезок  $\xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1$ ; отрезку границы вдоль оси симметрии  $BD$  соответствует отрезок  $\xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1$ . Внешняя граница  $CFED$  состоит из трех участков:  $CF$  и  $ED$ , они представляют собой части окружностей с радиусом, равным 120, с центрами в точках  $A$  и  $B$  соответственно; участок  $FE$  параллелен оси симметрии и удален от нее на расстояние 120. После отображения уравнение (1.1) примет вид [8]

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho r U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho r V}{J} \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$U = \frac{\partial \xi}{\partial x} v_x + \frac{\partial \xi}{\partial r} v_r, \quad V = \frac{\partial \eta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \eta}{\partial r} v_r,$$

$$J = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

где  $U$  и  $V$  — контравариантные компоненты скорости в направлениях  $\xi$  и  $\eta$ ,  $J$  — якобиан преобразования.

Течение считаем потенциальным и компоненты скорости записываются в виде [8]

$$U = A_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + A_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad V = A_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

$$A_1 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2, \quad A_2 = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2$$

$$A_3 = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

где  $\Phi$  — потенциал скорости обтекания,  $A_1, A_2, A_3$  — метрические коэффициенты.

Связь между давлением и плотностью в воде берем в форме уравнения Тета [9]

$$P^* - P_0 = B(\rho^n - 1), \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad B = \rho_0 \frac{a_0^2}{n} \quad (1.3)$$

где  $P^*$ ,  $\rho^*$  — давление и плотность в рассматриваемой точке потока,  $P_0$  — давление в невозмущенном потоке,  $n = 7,15$ ,  $a_0$  — скорость звука в невозмущенном потоке. С учетом (1.3) уравнение Бернулли для потока сжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)M^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(n-1)M^2} \quad (1.4)$$

где  $v$  — безразмерная скорость в рассматриваемой точке потока,  $M = V_0/a_0$  — число Маха. Из (1.4) можно получить зависимость плотности от скорости

$$\rho = \left[ 1 + \frac{(n-1)M^2}{2} (1 - v_x^2 - v_r^2) \right]^{1/(n-1)} \quad (1.5)$$

При отображении на плоскость  $\xi, \eta$  уравнение (1.5) примет вид

$$\rho = \left[ 1 + \frac{(n-1)M^2}{2} \left( 1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} U - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} V \right) \right]^{1/(n-1)} \quad (1.6)$$

2. Уравнение (1.2) в дискретном виде записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta \xi} \left[ \left( \frac{\rho r U}{J} \right)_{j+1/2, i} - \left( \frac{\rho r U}{J} \right)_{j-1/2, i} \right] + \frac{1}{\Delta \eta} \left[ \left( \frac{\rho r V}{J} \right)_{j, i+1/2} - \left( \frac{\rho r V}{J} \right)_{j, i-1/2} \right] = 0 \quad (2.1)$$

Вся расчетная область (квадрат со стороной, равной 1, в плоскости  $\xi, \eta$ ) разбивается на сетку с шагом  $\Delta \xi$  вдоль оси  $\xi$  и шагом  $\Delta \eta$  вдоль оси  $\eta$  и получаются расчетные точки с индексами  $j$  и  $i$  соответственно. Индексы изменяются в пределах:  $1 \leq j \leq J_{\text{МАХ}}$ ;  $1 \leq i \leq I_{\text{МАХ}}$ . Дискретизация уравнения (1.2) имеет второй порядок точности. Для решения системы (2.1) необходимо определить величины в полуцелых точках, например

$$U_{j+1/2, i} = A_1 \Big|_{j+1/2, i} \frac{(\Phi_{j+1, i} - \Phi_{j, i})}{\Delta \xi} + A_3 \Big|_{j+1/2, i} \frac{(\Phi_{j+1/2, i+1} - \Phi_{j+1/2, i-1})}{2\Delta \eta} \quad (2.2)$$

$$\Phi_{j+1/2, i+1} = \frac{\Phi_{j, i+1} + \Phi_{j+1, i+1}}{2}, \quad \Phi_{j+1/2, i-1} = \frac{\Phi_{j, i-1} + \Phi_{j+1, i-1}}{2}$$

Аналогично определяются  $U_{j-1/2, i}$ ,  $V_{j, i+1/2}$ ,  $V_{j, i-1/2}$ . Таким образом, значения  $\Phi$  хранятся в узлах сетки. Метрические коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $J$  определяются в полуцелых точках по стандартным формулам второго порядка. Значения плотности получаются из (1.6).

Нелинейная система уравнений (2.1) решается итерационными методами, которые в общем виде можно представить следующим образом:

$$N \Delta \Phi_{m+1} = \omega L(\Phi_m), \quad \Delta \Phi_{m+1} = \Phi_{m+1} - \Phi_m \quad (2.3)$$

где  $\Phi$  — вектор значений  $\Phi(j, i)$  в узлах сетки,  $\Delta \Phi_{m+1}$  — изменение величины потенциала за одну итерацию,  $N$  — линейный разностный легко факторизуемый (обращаемый) оператор,  $L(\Phi_m)$  — невязка, которая показывает, насколько хорошо удовлетворяет разностным уравнениям полученное на  $m$ -м слое решение  $\Phi_m$ ,  $\omega$  — масштабный множитель.

Для решения систем уравнений, получающихся при трансзвуковом обтекании, разработан эффективный метод приближенной факторизации [8, 10], в котором

$N$  берется в виде произведения  $N = N_1 \cdot N_2$ . Множители  $N_1$  и  $N_2$  выбираются из условий, что их произведение представляет собой аппроксимацию оператора  $L$  и что матричные операции выполняются достаточно просто, а вся схема устойчива. Факторизации подвергается система (2.3), в которой невязка  $L(\Phi_m)$  является остатком уравнения (2.1) после подстановки в него (2.2).

Для решения системы при дозвуковом обтекании эффективна так называемая схема ПФ1 [10], которую условно можно записать следующим образом:

$$\left[ \alpha - \Delta_{\xi} \left( \frac{r\rho A_1}{J} \right) \nabla_{\xi} \right] \left[ \alpha - \Delta_{\eta} \left( \frac{r\rho A_2}{J} \right) \nabla_{\eta} \right] \Delta\Phi(j, i)_{m+1} = \alpha\omega L(\Phi(j, i)_m) \quad (2.4)$$

где  $\alpha$  — свободный параметр, выбираемый для ускорения сходимости. Разностные операторы имеют вид

$$\Delta_{\xi} u_{j,i} = \frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{\Delta\xi}, \quad \nabla_{\xi} u_{j,i} = \frac{u_{j,i} - u_{j-1,i}}{\Delta\xi}$$

$$\Delta_{\eta} u_{j,i} = \frac{u_{j,i+1} - u_{j,i}}{\Delta\eta}, \quad \nabla_{\eta} u_{j,i} = \frac{u_{j,i} - u_{j,i-1}}{\Delta\eta}$$

$$\Delta_{\xi} \left( \frac{r\rho A_1}{J} \right) \nabla_{\xi} u_{j,i} = \left[ \left( \frac{r\rho A_1}{J} \right)_{j+\nu_2, i} \frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{\Delta\xi} - \left( \frac{r\rho A_1}{J} \right)_{j-\nu_2, i} \frac{u_{j,i} - u_{j-1,i}}{\Delta\xi} \right] \frac{1}{\Delta\xi}$$

$$\Delta_{\eta} \left( \frac{r\rho A_2}{J} \right) \nabla_{\eta} u_{j,i} = \left[ \left( \frac{r\rho A_2}{J} \right)_{j, i+\nu_2} \frac{u_{j,i+1} - u_{j,i}}{\Delta\eta} - \left( \frac{r\rho A_2}{J} \right)_{j, i-\nu_2} \frac{u_{j,i} - u_{j,i-1}}{\Delta\eta} \right] \frac{1}{\Delta\eta}$$

Уравнение (2.4) решается в два этапа

$$\left[ \alpha - \Delta_{\eta} \left( \frac{r\rho A_2}{J} \right) \nabla_{\eta} \right] f(j, i)_{m+1} = \alpha\omega L(\Phi(j, i)_m) \quad (2.5)$$

$$\left[ \alpha - \Delta_{\xi} \left( \frac{r\rho A_1}{J} \right) \nabla_{\xi} \right] \Delta\Phi(j, i)_{m+1} = f(j, i)_{m+1} \quad (2.6)$$

где  $f(j, i)_{m+1}$  — результат на промежуточном шаге. На первом этапе уравнение (2.5) представляет трехдиагональную систему уравнений, которую можно решить по очереди вдоль каждой линии сетки в направлении  $\eta$  методом прогонки. На втором этапе уравнение (2.6) также дает трехдиагональную систему, которая решается методом прогонки вдоль каждой линии сетки в направлении  $\xi$ .

Граничные условия задаются следующим образом: на внешней границе потенциал равен потенциалу невозмущенного потока; на участках  $CA$ ,  $AM$ ,  $NB$ ,  $BD$  задается условие непротекания  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , где  $n$  — нормаль к поверхности; на границе каверны  $MN$  задается условие постоянства скорости. На поверхностях диска-кавитатора и замыкающего диска условие непротекания в координатах  $\xi$ ,  $\eta$  эквивалентно условию

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = -\frac{A_3}{A_2} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \quad (2.7)$$

Условие (2.7) учитывается при определении невязки на участках  $AM$  и  $NB$ .

3. Расчет при всех числах Маха выполнялся при постоянной длине каверны  $L_k = 199,9607$ , которая по данным [11] соответствует числу кавитации  $\sigma = 2(P_0 - P_k)/\rho_0 V_0^2 = 0,02$  для несжимаемой жидкости, где  $P_k$  — давление в каверне.

Перед началом расчета между точками  $M$  и  $N$  задавалась форма каверны как первое приближение, для этой формы в области  $x$ ,  $r$  строилась расчетная сетка способом алгебраических отображений. Алгоритм и программа способа описаны в [8]. Между расчетными узлами каверна аппроксимировалась куби-

ческими сплайнами. На малом участке вблизи кромки диска ( $x < 0,1$ ) каверна аппроксимировалась степенной функцией:  $r = 1 + cx^\beta$  (показатель степени  $\beta$  оказался близким к  $2/3$  — аналогичное представление применялось в [12]).

Расчетная сетка, ортогональная граничным поверхностям  $AMNB$  и  $CFED$ , плавно изменялась, сгущалась к поверхности диска и каверны, а вдоль поверхности  $AMNB$  сгущение происходило к кромке диска. Плавное изменение сетки и сгущение достигались соответствующим подбором функций растяжения. У кромки диска шаг сетки по дуге поверхности каверны равнялся  $0,025$ , а на поверхности диска в его центре шаг сетки был равен  $0,1$ . На поверхности диска-кавитатора и замыкающего диска было 34 узловые точки, а на поверхности каверны 59 точек ( $J_{\max} = 93$ ). По координате  $\eta$  было выбрано 55 узловых точек ( $I_{\max} = 55$ ). Таким образом, количество узлов расчетной сетки  $93 \times 55$ . Результаты расчетов показали, что очень сильное влияние на форму каверны оказывает внешняя граница  $CFED$  (граничные условия соответствуют задаче об обтекании диска свободной струей). Для того, чтобы влияние границы было незначительным, ее следует удалять от оси симметрии на расстояние  $\sim 120$  при числе кавитации  $\sim 0,02$ .

При расчете кавитационного течения в несжимаемой жидкости ( $M = 0$ ) в качестве первого приближения выбиралась форма каверны, начальный участок которой определялся из [11], а остальная форма из [13] при числе кавитации  $\sigma = 0,02$ , начальное распределение потенциала соответствовало невозмущенному потоку.

При расчете кавитационного течения в сжимаемой жидкости ( $M > 0$ ) в качестве первого приближения брались форма каверны и распределение потенциала, полученные для предыдущего числа Маха.

Для первоначальной формы каверны и первоначального распределения потенциала итерациями (2.5) и (2.6) определялся потенциал обтекания. Граничные условия при этом имели вид: для внешней границы —  $f(j, 1)_{m+1} = 0$ ,  $\Delta\Phi(j, 1)_{m+1} = 0$ , для поверхности диска-кавитатора и замыкающего диска —  $f(j, I_{\max} + 1)_{m+1} = 0$ , для поверхности каверны  $f(j, I_{\max})_{m+1} = 0$ ,  $\Delta\Phi(j, I_{\max})_{m+1} = 0$ . В процессе итераций коэффициент  $\alpha$  последовательно принимал 11 значений, изменяющихся от  $-8 \cdot 10^2$  до  $-25$ , коэффициент  $\omega$  имел постоянное значение, равное  $1,5$ .

Поскольку форма каверны при дозвуковом обтекании симметрична относительно миделя, скорость на поверхности каверны  $V_k$  для каждой итерации определялась из условия  $V_k = -\Phi(M)/s_*$ , где  $\Phi(M)$  — потенциал в точке  $M$ , полученный на предыдущей итерации,  $s_*$  — длина дуги, отсчитываемая от кромки диска до миделя каверны. Потенциал в точке каверны, соответствующей длине дуги  $S$ , определялся следующим образом:

$$\Phi(s) = V_k(s - s_*) \quad (3.1)$$

где  $s$  — длина дуги, отсчитываемая от кромки диска до данной точки каверны. Выражение (3.1) использовалось для задания граничного условия на поверхности каверны. Процесс итераций (2.5) и (2.6) был сходящимся — невязка уменьшалась по мере роста числа итераций, а приращение потенциала стремилось к нулю. Итерации проводились до тех пор, пока значения скорости  $V_k$  на границе каверны отличались меньше чем на  $10^{-4}$  при максимальной невязке порядка  $10^{-2}$  по всей расчетной области.

Однако полученное решение в общем случае не удовлетворяло условию непротекания на поверхности каверны. Изменение формы каверны для удовлетворения условию непротекания осуществлялось способом, описанным в [14]. Запишем выражение для нормальной скорости на поверхности каверны следующим образом:  $\partial\Phi/\partial n = \partial\phi/\partial n + \partial x/\partial n$ , где  $\phi$  — потенциал возмущенных скоростей,  $x$  — координата точки на поверхности каверны. Величина  $\partial x/\partial n$  на поверхности

каверны определяется из выражения  $\partial x/\partial n = \partial r/\partial s$ . Форма каверны должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial r}{\partial s} = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (3.2)$$

В [14] показано, что к условию (3.2) сходится процесс, состоящий из решения системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial r}{\partial s} = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = - \text{sign} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Изменение формы каверны осуществлялось следующим образом: после завершения первого процесса итераций (2.5) и (2.6) для первоначальной формы каверны определялись значения  $\partial \varphi/\partial n$  и  $\partial x/\partial s$ , которые подставлялись в правую часть первого уравнения (3.3), определяющего новую координату  $r$  точки каверны. Новые значения  $\partial r/\partial s$  подставлялись в правую часть второго уравнения (3.3), определяющего новую координату  $x$ . Получалась новая форма каверны, для которой заново строилась расчетная сетка и производился итерационный процесс (2.5) и (2.6), после завершения которого определялись величины  $\partial \varphi/\partial n$ ,  $\partial x/\partial s$  и подставлялись в (3.3) и т. д. Вычисления заканчивались, когда порядок величины  $\partial \varphi/\partial n$  на поверхности каверны не превышал  $10^{-4}$ . Изменение радиуса миделя каверны в процедуре (3.3) при этом не превышало  $10^{-3}$ . Таким образом, найденная форма каверны удовлетворяла условию постоянства скорости (3.1) и условию непротекания (3.2).

4. Наряду с определением формы каверны и потенциала обтекания рассчитывался коэффициент кавитационного сопротивления  $C_x$

$$C_x = \frac{2}{nM^2} \int_0^1 \left\{ \left[ 1 + \frac{(n-1)M^2}{2} (1-v^2) \right]^{n/(n-1)} - 1 \right\} 2rdr + \sigma$$

где  $v$  — скорость на поверхности диска. Приближенное значение коэффициента сопротивления можно получить также из законов сохранения массы и импульса, если одну из контрольных поверхностей поместить в миделевом сечении каверны [13]. В этом случае для  $C_x$  можно записать соотношение

$$C_x = R_k^2 \sigma k \quad (4.1)$$

где  $k$  — коэффициент, определяемый интегрированием в контрольной поверхности миделевого сечения. В данной работе для сжимаемой жидкости коэффициент  $k$  приближенно определялся интегрированием по следующей формуле:

$$k = 1 - \frac{1}{\sigma R_k^2} \int_{R_k}^{120} \left\{ \rho \left[ (v_x - 1)^2 - \frac{1}{n} (1 - v_x^2) \right] + \frac{2(\rho - 1)}{nM^2} \right\} 2rdr \quad (4.2)$$

Интегрирование в (4.2) производилось до внешней границы, удаленной от оси симметрии на расстояние 120. Наряду с коэффициентом  $k$  в данной работе вычислялся расход жидкости через плоскость, проходящую в миделевом сечении каверны, и проверялось выполнение закона сохранения массы. Результаты расчета показали, что закон сохранения массы выполняется с точностью  $\sim 0,3\%$ .

Разработанный алгоритм позволял для заданной длины каверны определять скорость жидкости на ее границе, число кавитации, форму каверны и коэффициент кавитационного сопротивления в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости. Число кавитации для заданного числа Маха определялось по величине скорости на поверхности каверны из следующей системы уравнений:

$$\rho_k = \left[ 1 + \frac{(n-1)M^2}{2} (1 - v_k^2) \right]^{1/(n-1)} \quad (4.3)$$

$$\sigma = \frac{(n-1)\rho_k}{n} (v_k^2 - 1) + \frac{2(1 - \rho_k)}{M^2 n}$$

Таблица 1

$M$	0	0,6	0,8	0,9	0,95
$\lambda$	14,660	14,572	14,679	14,777	14,849
$\lambda_1$	14,66	14,80	15,25	15,90	16,70
$\sigma$	0,0203	0,0220	0,0235	0,0245	0,0252
$\sigma_1$	0,0203	0,0226	0,0250	0,0276	0,0305
$k$	0,941	0,953	0,969	0,983	0,992
$k_1$	0,941	0,939	0,937	0,936	0,935
$C_x$	0,836	0,906	0,947	0,969	0,980
$R_k$	6,820	6,861	6,811	6,766	6,733
$R_k'$	6,615	6,574	6,450	6,343	6,262
$C_x'$	0,837	0,897	0,932	0,950	0,960

Таблица 2

$L_k$	$V_k$	$\sigma$	$M_k$	$R_k$	$C_x$
19,2337	1,0800	0,1646	0,5782	2,6173	1,0229
19,2337	1,0806	0,1659	0,5789	2,6193	1,0087

где  $\rho_k$  — безразмерная плотность жидкости на границе каверны. Расчет производился в диапазоне чисел Маха:  $0 \leq M \leq 0,95$ . В этом диапазоне при числе кавитации  $\sigma \leq 0,025$  скорость жидкости во всей области течения не превышала местную скорость звука. Местное число Маха для поверхности каверны  $M_k$  определялось по формуле

$$M_k^2 = (MV_k)^2 \left( 1 + \frac{(n-1)M^2}{2} (1 - V_k^2) \right)^{-1} \quad (4.4)$$

Результаты численного расчета сравнивались с результатами, полученными по теории тонкого тела для осесимметричных каверн в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости [5]. Зависимость между числом кавитации  $\sigma_1$ , удлинением каверны  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = L_k/2R_k$ ) и числом Маха, полученная в [5], имеет вид

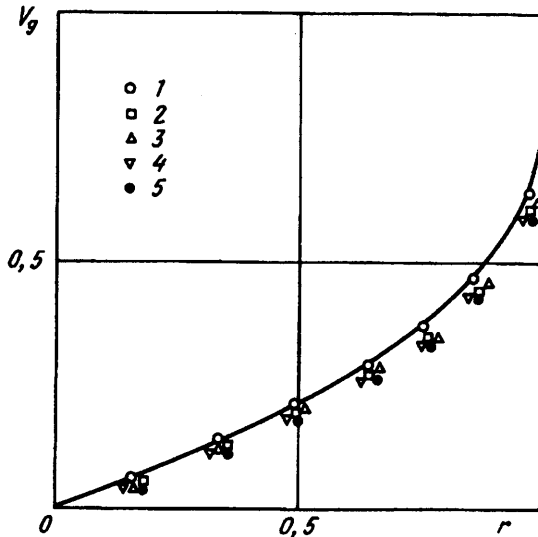
$$\sigma_1 = \frac{2}{\lambda_1^2} \ln \frac{\lambda_1}{\sqrt{e} \sqrt{1 - M^2}} \quad (4.5)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов. Результаты численного расчета и расчета по (4.5) представлены в табл. 1, где  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $k$ ,  $C_x$ ,  $R_k$  — удлинение каверны, число кавитации, коэффициент  $k$ , коэффициент кавитационного сопротивления, радиус миделя каверны получены численным расчетом;  $\sigma_1$  — число кавитации, определяемое по (4.5), если  $\lambda_1$  заменить на  $\lambda$ ;  $\lambda_1$  — удлинение, определяемое по (4.5), если  $\sigma_1$  заменить на  $\sigma$ ;  $k_1$  — коэффициент  $k$  в несжимаемой жидкости, соответствующий  $\sigma$  и рассчитанный по [11];  $R_k'$  — радиус миделя каверны, определяемый по (4.1) для  $C_x$ ,  $\sigma$  и  $k$ .

Результаты расчета для  $M = 0$  сравнивались с результатами [11]. Зависимости из [11] для кавитатора-диска имеют вид

$$L_k = \frac{2,2}{\sigma} \sqrt{C_x \ln \frac{1}{\sigma}}, \quad C_x = 0,8275 + 0,86\sigma \quad (4.6)$$

$$k_1 = \frac{1 + 50\sigma}{1 + 56,2\sigma}$$



Фиг. 2

Для  $L_k = 199,9607$  из (4.6) и (4.1) получим  $\sigma = 0,02$ ,  $\lambda = 14,926$ ,  $C_x = 0,845$ ,  $k_1 = 0,941$ ,  $R_k = 6,699$ .

Сравнение этих значений с данными табл. 1 для  $M=0$  показывает хорошее согласование расчета по методу конечных разностей с расчетом, выполненным по методу граничных элементов [11]. Таблица 1 также показывает, что результаты численного расчета в диапазоне чисел Маха  $0 \leq M \leq 0,9$  хорошо согласуются с результатами, полученными из теории тонкого тела [5]. Разница в величинах  $R_k$  и  $R_k'$  объясняется тем, что в выражении (4.1) проявляется суммарная погрешность в определении  $R_k$ ,  $C_x$ ,  $\sigma$  и  $k$ , а также приближенностью зависимости (4.1).

Был выполнен тестовый расчет для сравнения с результатами [7]. Расчет выполнялся при  $M = 0,5$ , задавалось значение  $V_k = 1,0800$ , по которому из (4.3) и (4.4) определялись величины  $\sigma$ ,  $M_k$ , далее по аппроксимационным формулам [7] рассчитывались значения  $L_k$ ,  $R_k$ ,  $C_x$  — эти величины показаны в верхней строке табл. 2. Затем для  $L_k = 19,2337$  и  $M = 0,5$  проводился расчет по алгоритму, предложенному выше, полученные значения  $V_k$ ,  $\sigma$ ,  $R_k$ ,  $C_x$ ,  $M_k$  показаны в нижней строке табл. 2. Сравнение результатов данной работы и [7] показали хорошее согласование.

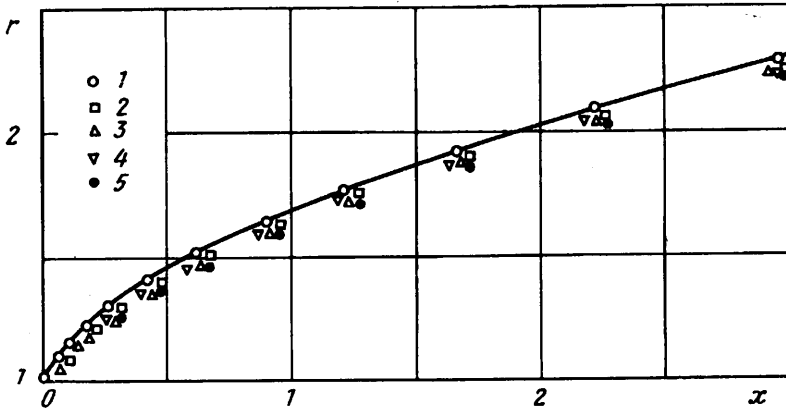
На фиг. 2 показано распределение скорости жидкости  $V_g$  вдоль радиуса диска; скорость отнесена к скорости  $V_k$  на границе каверны. Сплошная кривая — расчет [11] для  $M=0$  и  $\sigma = 0,01$ . Точками 1—5 показаны результаты, полученные численным расчетом по методу конечных разностей для чисел Маха 0, 0,6, 0,8, 0,9, 0,95 соответственно. Видно, что по мере роста числа Маха величина скорости на поверхности диска уменьшается.

На фиг. 3 показана форма каверны вблизи диска (начало системы координат находится на кромке диска). Сплошная кривая — расчет [11] для  $M=0$  и  $\sigma = 0,01$ . Точками 1—5 показаны результаты данной работы для чисел Маха 0, 0,6, 0,8, 0,9, 0,95 соответственно. Из фиг. 3 видно, что форма каверны на начальном участке  $0 \leq x \leq 2$  слабо зависит от числа Маха.

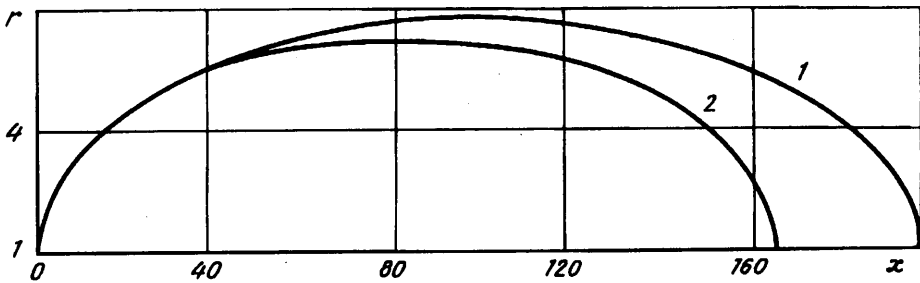
Численный расчет показал, что форма каверны близка к эллипсоиду вращения. Начальный участок каверны при  $0 \leq x \leq 2$  можно определять из фиг. 3; при  $x > 2$  профиль каверны близок к профилю, определяемому по формуле из [13]

$$r = R_k \left( 1 - \left( 1 - \frac{r_1^2}{R_k^2} \right) \left| 1 - \frac{2(x-2)}{L_k - 4} \right|^{2/\alpha} \right)^{1/2} \quad (4.7)$$





Фиг. 3



Фиг. 4

где  $r_1 = 2$  — радиус профиля каверны при  $x = 2$ ;  $\kappa = 0,85 + 1$ . В диапазоне чисел Маха  $0 \leq M \leq 0,95$  профиль каверны, полученный численным расчетом и определяемый по (4.7) для  $\kappa = 0,85$  совпадали с точностью до 5%. В диапазоне чисел Маха  $0,6 \leq M \leq 0,95$  лучшую аппроксимацию дает формула (4.7) при  $\kappa = 1$  — расхождение с численным расчетом по методу конечных разностей не превышает 2%.

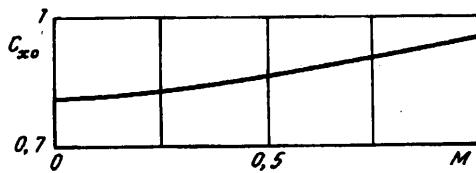
На фиг. 4 в качестве примера сравниваются профили каверны в сжимаемой и несжимаемой жидкости при одном и том же числе кавитации  $\sigma = 0,0235$  (начало системы координат находится на кромке диска). Кривая 1 — рассчитанный численным методом профиль каверны в сжимаемой жидкости для  $M = 0,8$ , кривая 2 — каверна в несжимаемой жидкости, рассчитанная по формуле (4.7) при  $\kappa = 0,85$ ,  $L_k$  и  $R_k$  определяются по (4.1) и (4.6).

Для получения приближенной зависимости коэффициента кавитационного сопротивления диска от числа Маха при нулевом числе кавитации воспользуемся уравнением Бернулли. С ростом числа Маха коэффициент давления в точке торможения увеличивается, для оценки примем, что коэффициент сопротивления возрастает во столько же раз, во сколько раз увеличивается коэффициент давления в точке торможения. Тогда коэффициент сопротивления диска при нулевом числе кавитации будет определяться выражением

$$C_{x0} = C_{x0}^* \frac{2}{nM^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{(n+1)M^2}{2} \right]^{n/n-1} - 1 \right\} \quad (4.8)$$

где  $C_{x0}^* = 0,82$  — коэффициент сопротивления диска при обтекании несжимаемой жидкостью при нулевом числе кавитации. Зависимость (4.8) показана на фиг. 5. Для оценки коэффициента  $C_x$  в сжимаемой жидкости при отличных от нуля числах кавитации воспользуемся хорошо известной приближенной аппроксимацией

$$C_x = C_{x0} (1 + \sigma) \quad (4.9)$$



Фиг. 5

Сравнение расчета по (4.8) и (4.9) (величина  $C_x'$  приведена в табл. 1) с данными численного расчета показывает, что предложенной аппроксимацией можно пользоваться для приближенной оценки коэффициента кавитационного сопротивления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич М. И. Полутело конечного сопротивления в дозвуковом потоке // Тр. ЦАГИ. 1947. Вып. 653. 12 с.
2. Якимов Ю. Л. Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 3—10.
3. Якимов Ю. Л. Тонкая кавитационная каверна в сжимаемой жидкости // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ. 1983. Ч. 1. С. 66—73.
4. Альев Г. А. Отрывное обтекание кругового конуса трансзвуковым потоком воды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 152—154.
5. Васин А. Д. Тонкие осесимметричные каверны в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 174—177.
6. Васин А. Д. Тонкие осесимметричные каверны в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 179—181.
7. Зигангареева Л. М., Киселев О. М. О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93—107.
8. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
9. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967. 387 с.
10. Бальхауз В. Ф., Джеймсон А., Альберт Дж. Неявный метод приближенной факторизации для решения стационарных трансзвуковых задач // Ракет. техника и космонавтика. 1978. Т. 16. № 6. С. 39—47.
11. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений. Новосибирск, 1979. 36 с. Препринт Ин-та теплофизики СО АН СССР, № 40—79.
12. Кожуро Л. А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // Уч. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 5. С. 109—115.
13. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
14. Гонор А. Л., Забутная В. И., Ясько Н. Н. О существовании оптимального кавитатора // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 63—68.

Москва

Поступила в редакцию  
21.VII.1994