

УДК 532.517.4:533.6.011:536.24

© 1996 г. В. Г. ЛУЩИК, А. Е. ЯКУБЕНКО

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТРУБАХ

Трехпараметрическая модель турбулентности с уравнением переноса для поперечного турбулентного потока тепла дополнена членами, учитывающими термогравитационные эффекты. Результаты численного исследования, проведенного без использования приближения Буссинеска, сравниваются с известными экспериментальными данными по подъемному течению воздуха в вертикальных обогреваемых трубах.

Взаимодействие поля силы тяжести и среды с переменной плотностью приводит к появлению сил плавучести (архимедовых сил), которые являются причиной возникновения движения в случае свободной конвекции и оказывают воздействие на вынужденное движение среды при смешанной конвекции. Если движение является турбулентным и пульсации плотности среды скоррелированы с пульсациями скорости, то сила тяжести может непосредственно оказать влияние и на характеристики турбулентности.

Исследованию влияния сил плавучести на среднее и пульсационное движение сред в природных явлениях и в технике посвящена обширная литература. Так, обзор результатов прикладных исследований содержится в [1]. Отметим, что число экспериментальных работ невелико. Это объясняется трудоемкостью организации и проведения эксперимента, связанной с необходимостью иметь рабочие участки большой длины и диаметра для обеспечения развитого течения, достижения достаточно больших чисел Грасгофа и возможности проводить измерения локальных характеристик потока.

В рамках настоящей работы ограничимся случаем смешанной конвекции при течении в круглых вертикальных трубах, когда направление вектора силы тяжести совпадает с осью трубы. В такой постановке выполнена методическая часть работы, базирующаяся на трехпараметрической модели турбулентности [2] с уравнением переноса для поперечного потока тепла [3], которые дополнены термогравитационными членами.

Для тестирования модели привлечен экспериментальный материал [4—8] по устойчивому распределению плотности, имеющему место при восходящем течении в вертикальных обогреваемых трубах. Такой отбор экспериментов обусловлен тем, что этот случай исследован более детально, нежели случай неустойчивого распределения плотности, соответствующего нисходящему течению. В экспериментах [4—8] в качестве теплоносителя использовался воздух. Переменность плотности обеспечивалась нагревом среды через стенку трубы.

Наиболее информативной представляется работа [7], в которой систематизированы результаты по исследованию влияния сил плавучести на интегральные и локальные характеристики течения в вертикальных обогреваемых трубах, полученные авторами ранее, и содержатся новые результаты. Измерения проводились с использованием лазерного доплеровского анемометра и термоанемометра. Получен большой объем информации по профилям скорости и температуры,

а также распределениям односточных вторых моментов пульсаций скорости и температуры, характеризующим энергию пульсаций и турбулентный перенос импульса и тепла.

Проведенный анализ экспериментальных работ [4—8] ввиду отличия полученных в них результатов не дает оснований ограничиться выбором одной из них для сравнения с расчетами. Поэтому сравнение проводилось с различными экспериментальными данными, с привлечением также опытных данных, полученных при слабом влиянии сил плавучести.

Из расчетных моделей, базирующихся на уравнениях переноса для характеристик турбулентности, отметим работы [9, 10], в которых использовалась  $k$ - $\epsilon$ -модель турбулентности и восьмипараметрическая модель. Представляется, что двух параметров, используемых в [9] для рассматриваемого класса задач, по-видимому, мало, поскольку при этом непосредственно не учитывается влияние термогравитации на перенос импульса и тепла, а восемь параметров в [10] — много, так как экспериментальной информации, необходимой для апробирования модели и задания граничных условий в расчете, недостаточно.

Использование четырех параметров, для которых записаны уравнения переноса в настоящей работе, представляется оптимальным для описания основных особенностей рассматриваемой задачи.

1. Модель турбулентности. Уравнения неразрывности, движения и энергии, описывающие течение и теплообмен в вертикальной цилиндрической трубе в поле тяжести в приближении узкого канала, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r\rho v) = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r \left( \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho\tau \right) \right] + \rho k_x g, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$c_p \left( \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \rho q_y \right) \right]$$

Здесь  $x$  — направление вдоль оси трубы,  $y$  — координата, отсчитываемая от стенки трубы,  $u$  и  $v$  — компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $r = r_0 - y$ , где  $r_0$  — радиус трубы,  $g$  — модуль вектора ускорения силы тяжести,  $k_x$  — компонента единичного вектора ускорения силы тяжести в направлении оси  $x$  ( $k_x = 1$ , если направления движения и ускорения силы тяжести совпадают,  $k_x = -1$ , если они противоположны),  $\rho\tau = -\rho \langle u'v' \rangle$  — турбулентное трение,  $\rho q_y = \rho c_p \langle v'T' \rangle$  — поперечный турбулентный поток тепла. Теплофизические свойства среды ( $\rho$ ,  $\eta$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ) зависят от температуры и давления произвольным образом (аналитически или в виде таблиц).

Для вычисления величин  $\tau$  и  $q_y$  используем трехпараметрическую модель турбулентности [2], в которой уравнения переноса записываются для энергии турбулентности  $E = 0,5\sum \langle u_i'^2 \rangle$ , величины  $\tau = -\langle u'v' \rangle$  и параметра  $\omega = E/L^2$  ( $L$  — поперечный интегральный масштаб турбулентности), а также уравнение переноса для величины  $q_y = c_p \langle v'T' \rangle$  [3]. При движении среды с нагревом в поле тяжести эти уравнения должны быть дополнены термогравитационными членами, в результате чего уравнения для  $E$ ,  $\tau$ ,  $\omega$  и  $q_y$  примут вид

$$\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} = - (c_p \sqrt{E} L + c_1 \eta) \frac{E}{L^2} + \rho\tau \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_E \frac{\partial E}{\partial y} \right) + k_x g \langle \rho' u' \rangle$$

$$\rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial y} = - (c_3 \rho \sqrt{E} L + c_6 \tau) \frac{\tau}{L^2} + c_7 \rho E \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - D_\tau \frac{\tau}{r^2} - k_x g \langle \rho' v' \rangle$$

$$\rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -2c_p \omega^{3/2} - 1,4c_1 \eta \frac{\omega - \omega_0}{L^2} + \left[ \frac{\tau}{E} + 2c_4 \operatorname{sign} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \rho \omega \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + k_x \frac{g \langle \rho' u' \rangle}{L^2} \quad (1.2)$$

$$\rho u \frac{\partial q_x}{\partial x} + \rho v \frac{\partial q_y}{\partial y} = - [c_8 \rho \sqrt{E} L + c_9 \eta f(\operatorname{Pr})] \frac{q_y}{L^2} - c_{10} c_p \rho E \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_q \frac{\partial q_y}{\partial y} \right)$$

$$D_\varphi = a_\varphi c \sqrt{E} L + \alpha_\varphi \eta (\Phi = E, \tau, \omega, q); \omega_0 = \left( \frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 / (2\rho_1 E); L = \sqrt{E/\omega}$$

$$f(\operatorname{Pr}) = \frac{1 + d \sqrt{\operatorname{Pr}} + 1/\sqrt{\operatorname{Pr}}}{2(1 + d \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad d = 0,25$$

Значения констант следующие [2, 3]:  $c = 0,3$ ;  $c_1 = \frac{5\pi}{4}$ ;  $c_4 = 0,04$ ;

$$c_5 = c_8 = 3c; \quad c_6 = c_9 = 9c_1; \quad c_7 = 0,2; \quad c_{10} = \frac{c_7}{\operatorname{Pr}_t}; \quad \operatorname{Pr}_t = 0,85; \quad a_E = a_\omega = 0,06;$$

$$a_\tau = a_q = a_E \frac{c_5}{c}; \quad \alpha_E = \alpha_\tau = 1; \quad \alpha_\omega = 1,4; \quad \alpha_q = f(\operatorname{Pr})$$

В предположении, что среда подчиняется уравнению состояния идеального газа с  $\rho \sim 1/T$ , входящие в систему (1.2) корреляции пульсаций плотности и скорости могут быть аппроксимированы следующими соотношениями [1, 11]:

$$\langle \rho' u' \rangle = -\beta \rho \langle u' T' \rangle = -\frac{\beta \rho q_x}{c_p}, \quad \langle \rho' v' \rangle = -\beta \rho \langle v' T' \rangle = -\frac{\beta \rho q_y}{c_p}, \quad q_x = c_p \langle u' T' \rangle \quad (1.3)$$

Здесь  $\beta = 1/T$  — коэффициент объемного расширения газа,  $\rho q_x$  — продольный турбулентный тепловой поток.

Для величины  $q_x$  может быть записано уравнение переноса, аналогичное уравнению для  $q_y$  системы (1.2)

$$\rho u \frac{\partial q_x}{\partial x} + \rho v \frac{\partial q_x}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_q \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) - (c_8 \rho \sqrt{E} L + c_9 \eta f(\operatorname{Pr})) \frac{q_x}{L^2} + c_p \rho \tau \frac{\partial T}{\partial y} - \rho q_x \frac{\partial u}{\partial y} + k_x g c_p \langle \rho' T' \rangle, \quad \langle \rho' T' \rangle = -\beta \rho \langle T'^2 \rangle = -\beta \rho \theta \quad (1.4)$$

Корреляция пульсаций плотности и температуры в (1.4) аппроксимирована аналогично (1.3).

Для дисперсии пульсаций температуры  $\theta = \langle T'^2 \rangle$  уравнение переноса будет иметь вид [11]

$$\rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = - \left( c_{11} \rho \sqrt{E} L + c_{12} \frac{\eta}{\operatorname{Pr}} \right) \frac{\theta}{L^2} - 2 \frac{\rho}{c_p} q_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

Таким образом, для определения величин  $q_x$  и  $\theta$  существует две возможности: либо использовать уравнения переноса (1.4), (1.5), либо получить для этих величин алгебраические соотношения. Учитывая вспомогательный характер величин  $q_x$  и  $\theta$ , используем вторую возможность для их определения.

Простейшим способом получения алгебраического соотношения для той или иной величины является использование приближения локального равновесия, т. е. пренебрежение конвективными и диффузионными членами в уравнении переноса для нее. Очевидно, что при этом теряется информация при описании течений, развивающихся по длине. Для частичного устранения этого недостатка приближения локального равновесия используем предположение, следующее из анализа

результатов эксперимента [12]: при развитии решеточной турбулентности в потоке с постоянными градиентами скорости  $\partial u/\partial y$  и температуры  $\partial T/\partial y$  вдали от решетки устанавливается такая структура турбулентности, при которой величина  $q^\circ = q_x/q$ , постоянна и не зависит от расстояния. Так как система уравнений (1.2), (1.4) должна описывать это состояние турбулентности, то, преобразуя уравнения для  $q_x$  и  $q_y$ , в которых в рассматриваемом случае однородной турбулентности можно пренебречь диффузионными членами, получим уравнение для  $q^\circ$

$$u \frac{\partial q^\circ}{\partial x} = \frac{c_p}{q_y} E \frac{\partial T}{\partial y} \left[ c_{10} q^\circ + (1 + \text{Pr}_t^{-1}) \frac{\tau}{E} - k_x g \beta \frac{\theta}{E \partial T / \partial y} \right] \quad (1.6)$$

$$\text{Pr}_t = - c_p \tau \frac{\partial T}{\partial y} \left( q_y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1}$$

Здесь  $\text{Pr}_t$  — турбулентное число Прандтля.

Для получения алгебраического выражения для  $\theta$ , входящего в уравнение (1.6), воспользуемся приближением локального равновесия, удерживая в уравнении переноса для  $\theta$  (1.5) лишь члены с порождением и диссипацией. Пренебрегая также и вязкой диссипацией по сравнению с турбулентной, т. е. ограничиваясь случаем больших значений турбулентного числа Пекле  $\text{Pe}_t = \text{Pr} \text{Re}_t = \rho c_p \sqrt{E} L / \lambda$ , получим

$$\theta = - \frac{2}{c_{11}} \frac{q_y}{c_p} \frac{L}{\sqrt{E}} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.7)$$

Далее, приравняв нулю производную по  $x$  в (1.6), при условии, что  $E \partial T / \partial y \neq 0$ , и используя выражение (1.7) для  $\theta$ , получим следующее соотношение для величины  $q_x/q_y$ :

$$\frac{q_x}{q_y} = - \frac{1}{c_{10}} \left[ (1 + \text{Pr}_t^{-1}) \frac{\tau}{E} + 2 \frac{k_x g \beta}{c_{11}} \frac{q_y}{c_p} \frac{L}{E^{3/2}} \right] \quad (1.8)$$

Входящая в соотношение (1.8) и в выражение для константы  $c_{10} = c_7 / \text{Pr}_t$  (см. выше) величина турбулентного числа Прандтля  $\text{Pr}_t = 0,85$  использована в качестве дополнительной константы, а не для связи между турбулентными потоками импульса и тепла, для определения которых используются уравнения переноса, входящие в систему (1.2).

Входящая в соотношение (1.8) константа  $c_{11}$  может быть определена из экспериментов по вырождению турбулентности за нагреваемыми решетками с нулевым поперечным градиентом скорости и температуры [13]. На начальном этапе вырождения при больших значениях чисел  $\text{Re}_t$  и  $\text{Pe}_t$ , когда диссипативными членами с вязкостью и теплопроводностью в уравнениях для энергии и масштаба турбулентности (1.2) и дисперсии пульсаций температуры (1.5) можно пренебречь, для  $\theta$  получается

$$\frac{\theta}{T_*^2} = \frac{\theta_0}{T_*^2} \left[ 1 + c \frac{\sqrt{E_0}}{u_*} \frac{M}{L_0} \left( \frac{x}{M} - \frac{x_0}{M} \right) \right]^{-c_{11}/c}$$

Здесь  $u_*$  и  $T_*$  — некоторые характерные значения скорости и температуры;  $\theta_0$ ,  $E_0$ ,  $L_0$  — значения соответствующих величин на расстоянии  $x_0$  от решетки, на котором турбулентность можно считать близкой к изотропной;  $M$  — размер ячейки решетки.

Из анализа опытных данных [13] следует, что  $c_{11}/c \approx 1 - 2$ . Расчеты, проведенные в этом диапазоне изменения  $c_{11}/c$ , показали, что результаты слабо зависят от значения константы  $c_{11}$ . Так, число Нуссельта изменяется на  $\pm 3\%$  относительно значения, соответствующего величине  $c_{11} = 1,5$ , которая и была принята в последующих расчетах.

Для проверки полученного соотношения для  $q_x$  (1.8) в случае слабого влияния сил плавучести воспользуемся экспериментом [12] по развитию решеточной турбулентности с постоянным градиентом средней скорости и температуры. Согласно [12], отношение  $q_x/q_y$  на достаточном удалении от нагреваемой решетки выходит на постоянное значение  $q_x/q_y \approx -2,2$ . В экспериментах по течению в вертикальных трубах с обогревом [14, 15] в области  $0,2 \leq r/r_0 \leq 0,8$  отношение  $q_x/q_y$  составляет соответственно  $-(1, 5 - 1, 8)$  и  $-(2 - 2, 5)$ .

При значении  $\tau/E = 0,28$ , соответствующем полученному в эксперименте [12], а также в многочисленных экспериментах по течению в трубах и при  $Pr_0 = 0,85$  из (1.8) в отсутствие второго члена получается  $q_x/q_y \approx -2,6$ . Эта величина близка к экспериментальным значениям, приведенным выше, что свидетельствует о применимости соотношения (1.8), по крайней мере в отсутствие влияния силы тяжести.

Переходя к безразмерным переменным, в качестве масштабов для которых приняты величины радиуса трубы  $r_0$ , среднemasсовой скорости  $u_0$  и температуры  $T_0$  на входе, а для теплофизических свойств — соответствующие величины при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$ , уравнения (1.1), (1.2) и соотношение (1.8) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (r\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (r\rho v) = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r \left( \frac{\eta}{Re_0} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \tau \right) \right] + k_x \frac{\rho}{Fr_0}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$c_p \left( \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r \left( \frac{\lambda}{Re_0 Pr_0} \frac{\partial T}{\partial y} - \rho q_y \right) \right]$$

$$\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} = - \left( c_p \sqrt{E} L + \frac{\eta}{Re_0} c_1 \right) \frac{E}{L^2} +$$

$$+ \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_E \frac{\partial E}{\partial y} \right) - k_x \frac{\rho}{Fr_0} \frac{q_x}{c_p}$$

$$\rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial y} = - \left( c_s \rho \sqrt{E} L + \frac{\eta}{Re_0} c_6 \right) \frac{\tau}{L^2} + c_7 \rho E \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - D_\tau \frac{\tau}{r^2} + k_x \frac{\rho}{Fr_0} \frac{q_y}{c_p}$$

$$\rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial y} = - 2c_p \omega^{3/2} - 1,4 \frac{\eta}{Re_0} c_1 \frac{\omega - \omega_0}{L^2} + \left[ \frac{\tau}{E} + 2c_4 \text{sign} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \rho \omega \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - k_x \frac{\rho}{Fr_0} \frac{q_x}{c_p L^2} \quad (1.9)$$

$$\rho u \frac{\partial q_y}{\partial x} + \rho v \frac{\partial q_y}{\partial y} = - \left[ c_8 \rho \sqrt{E} L + \frac{\eta}{Re_0} c_9 f(Pr) \right] \frac{q_y}{L^2} - c_{10} c_p \rho E \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( r D_q \frac{\partial q_y}{\partial y} \right)$$

$$\frac{q_x}{q_y} = - \frac{1}{c_{10}} \left[ (1 + Pr_0^{-1}) \frac{\tau}{E} + 2 \frac{k_x}{c_{11} Fr_0} \frac{q_y}{c_p} \frac{L}{E^{3/2}} \right]$$

Здесь  $Re_0 = \rho_0 u_0 r_0 / \eta_0$  — число Рейнольдса, определенное по радиусу трубы,  $Pr_0 = \eta_0 c_{p0} / \lambda_0$  — число Прандтля,  $Fr_0 = u_0^2 / g r_0$  — число Фруда, коэффициент объемного расширения принят равным  $\beta = 1/T_0$  [4]. Значения констант, входящих в систему уравнений (1.9), приведены выше.

Граничные условия на стенке ( $y=0$ ) и на оси ( $y=1$ ) трубы и на входе ( $x=0$ ) в обогреваемый участок имеют вид

$$u = v = 0, T = \vartheta_0 \text{ либо } - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = Q_0; E = \frac{\partial E}{\partial y} = \tau = q_y = 0 \quad (y = 0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = \tau = q_y = 0 \quad (y = 1) \quad (1.10)$$

$$u = u(y), T = T_0, E = E(y), \tau = \tau(y), \omega = \omega(y), q_y = 0 \quad (x = 0)$$

Здесь  $\vartheta_0 = T_w/T_0$  — температурный фактор,  $Q_0 = q_w r_0 / \lambda_0 T_0$  — безразмерный тепловой поток, которые также являются параметрами задачи и отвечают тепловым граничным условиям на стенке соответственно первого и второго рода.

Таким образом, система уравнений (1.9) с граничными условиями (1.10) при заданных параметрах  $Re_0$ ,  $Pr_0$ ,  $Fr_0$  и  $\vartheta_0$  ( $Q_0$ ) позволяют решить поставленную задачу и найти распределения как средних, так и турбулентных характеристик течения и теплообмена. Входящие в систему уравнений (1.9), (1.10) теплофизические характеристики среды ( $\rho$ ,  $\eta$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ) зависят от температуры и давления, т. е. не используется широко распространенное в аналогичных задачах (см. [1]) приближение Буссинеска.

2. Результаты расчета и сравнение с экспериментом. Расчеты проводились в следующей постановке. На входе в обогреваемый участок диаметром  $d = 2r_0$  и длиной  $L_0/d$ , где нагрев воздуха осуществляется за счет постоянного по длине теплового потока в стенку  $q_w$ , т. е. использовалось тепловое граничное условие второго рода, задавались характеристики потока, полученные в результате расчета течения на входном изотермическом участке трубы длиной  $L_0/d$ . Координата  $x$  отсчитывалась от входа в обогреваемый участок.

Параметрами, обычно используемыми в эксперименте (см. [1]), являются: число Рейнольдса  $Re = \rho u d / \eta$ , число Грасгофа  $Gr = g \beta q_w r_0^2 d^4 / (\lambda \eta^2)$ , число Прандтля  $Pr = \eta c_p / \lambda$ ; эти параметры определяются, как правило, при температуре  $T_0$  на входе в рабочий участок. Из эксперимента известен также диаметр рабочего участка, по которому можно определить число Архимеда  $Ag = g r_0^2 d^3 / \eta^2$ . Температура на входе в расчетах принималась  $T_0 = 293$  К, число Прандтля  $Pr = 0,71$ . Теплофизические свойства воздуха задавались в табличном виде в зависимости от температуры при давлении на входе  $p_0$ .

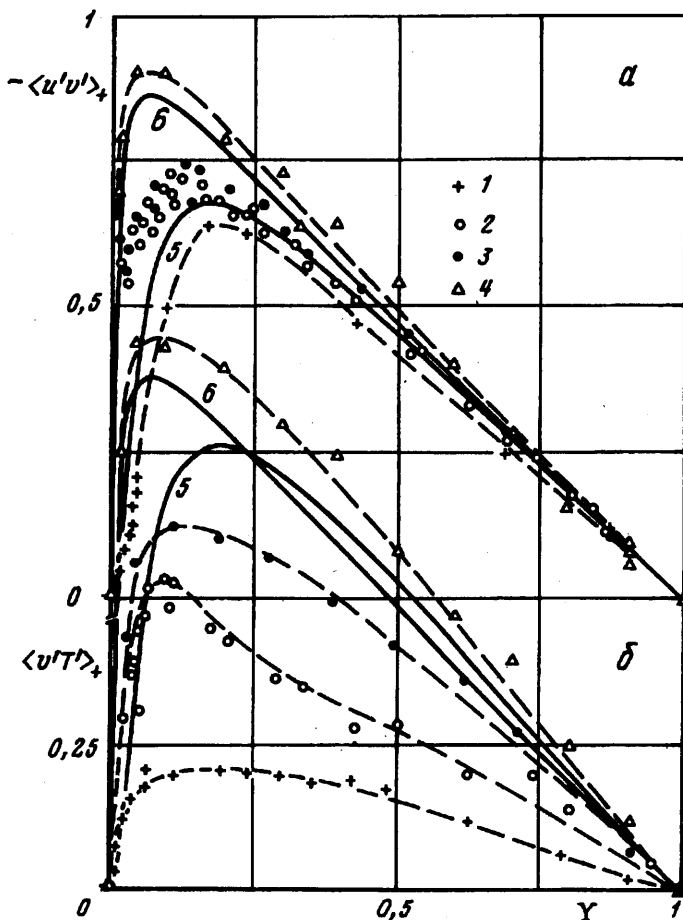
Связь между параметрами эксперимента и безразмерными критериями, использованными в расчетах, имеет вид

$$Re_0 = \frac{1}{2} Re, Pr_0 = Pr, Fr_0 = 2 \frac{Re^2}{Ag}, Q_0 = \frac{1}{2} \frac{Gr}{Ag} \quad (2.1)$$

Прежде чем перейти к изложению результатов расчета течения и теплообмена и сравнению их с экспериментальными данными, остановимся на некоторых результатах расчетов при слабом влиянии сил плавучести, которые позволили установить следующее.

Исследование влияния длины входного участка  $L_0/d$  на характеристики течения и теплообмена при малых значениях числа  $Gr$  показало, что при  $L_0/d \geq 40$  изменение числа  $Nu$  по длине обогреваемого участка практически перестает зависеть от величины  $L_0/d$  и при  $L_0/d \approx 60$  выходит на значение, зависящее только от чисел  $Re$  и  $Pr$ .

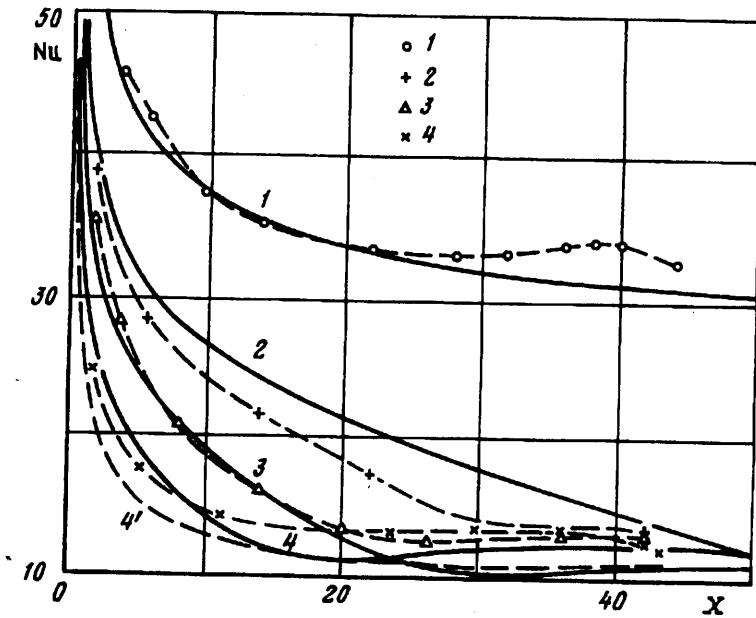
Для того, чтобы исключить влияние длины входного участка на результаты расчетов при наличии сил плавучести, во всех последующих расчетах в качестве начальных профилей скорости и характеристик турбулентности на входе в обогреваемый участок использовались профили, полученные на длине входного участка  $L_0/d = 60$ . Отметим, что в экспериментах [4—8] длины входных участков составляли от 13 [5] до 70 [8] калибров.



Фиг. 1

При слабом влиянии сил плавучести, когда подогрев газа мал, профиль скорости  $u/u_0$  ( $u_0$  — скорость на оси трубы) по длине обогреваемого участка меняется слабо, а профиль температуры  $\Theta = (T_w - T)/(T_w - T_0)$  ( $T_w$ ,  $T_0$  — температуры на стенке и на оси трубы) изменяется от однородного на входе до профиля, при  $x/d \geq 60$  практически совпадающего с профилем скорости, что согласуется с результатами эксперимента [14, 15]. Характеристики турбулентности при  $x/d \geq 60$  также слабо изменяются по длине обогреваемого участка, однако зависимость от числа  $Re$  для некоторых из них в расчете и эксперименте получалась различной.

На фиг. 1, а, б представлены соответственно результаты расчета профилей  $\langle u'v' \rangle_+ = \langle u'v' \rangle / u_*$  и  $\langle v'T' \rangle_+ = \langle v'T' \rangle / u_* T_*$  по радиусу трубы  $Y = y/r_0$  ( $u_*$  — динамическая скорость,  $T_* = q_w / (\rho_w C_{pw} u_*)$  — характерная температура) для  $Re = 5 \cdot 10^3$  (линия 5) и  $Re = 40 \cdot 10^3$  (линия 6) на длине  $x/d = 50$ . Там же приведены экспериментальные данные [15] для  $Re = (5; 10-20; 40) \cdot 10^3$  (точки 1-3 соответственно) при  $x/d = 53$  и данные [14] для числа  $Re = 32 \cdot 10^3$  (точки 4) при  $x/d = 35$ . Результаты расчета напряжения сдвига  $\langle u'v' \rangle_+$  вполне удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным [14, 15]. Что же касается величины  $\langle v'T' \rangle_+$  (фиг. 1, б), то расчетная зависимость для числа  $Re = 5 \cdot 10^3$  (линия 5) лежит выше опытных данных [15] для чисел  $Re = (5; 10-20) \cdot 10^3$  (точки 1, 2).



Фиг. 2

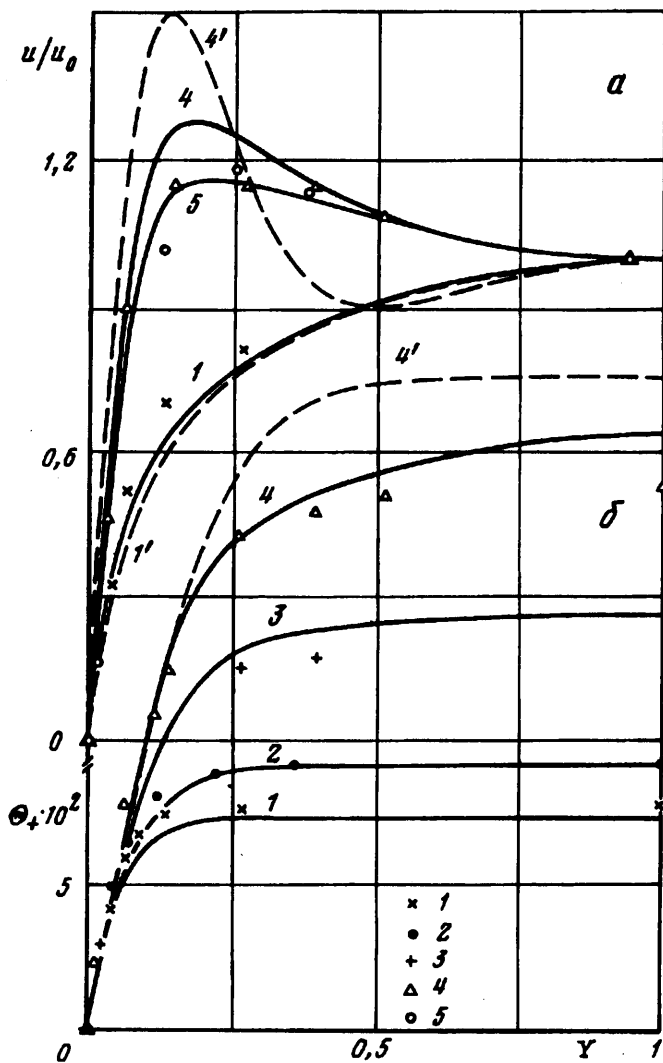
Для числа  $Re = 40 \cdot 10^3$  опытные данные [15] (точки 3) отличаются не только от результатов расчета (линия 6), но и от экспериментальных данных [14] для числа  $Re = 32 \cdot 10^3$  (точки 4). Полученное в эксперименте [15] существенное снижение величины  $\langle v'T' \rangle_+$  по сравнению с величиной  $\langle u'v' \rangle_+$  при уменьшении числа  $Re$  трудно объяснить, однако его необходимо иметь в виду при анализе результатов для случая существенного влияния сил плавучести.

В экспериментальных работах по исследованию теплообмена одной из основных задач является измерение теплоотдачи от стенки к жидкости, определяющейся числом  $Nu = q_w d / (T_w - \langle T \rangle) \lambda$ . Здесь  $\langle T \rangle$  — среднemasовая температура жидкости,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности жидкости, который может определяться либо по  $T_w$  ( $\lambda = \lambda_w$ ), либо по  $\langle T \rangle$  ( $\lambda = \lambda_f$ ). В литературе используется как то, так и другое определение числа  $Nu$ , а зачастую и вовсе не указывается способ определения числа  $Nu$ , в предположении, что при слабом подогреве среды различие между ними мало. При значительном подогреве среды (в рассматриваемом случае при больших числах  $Gr$ ) отличие между значениями числа  $Nu$ , определенными по  $\lambda_w$  и  $\lambda_f$ , может быть существенным. Результаты расчета, представленные в настоящей работе, получены при определении числа  $Nu$  по величине  $\lambda_w$ , соответствующей температуре стенки.

Перейдем к изложению результатов расчета при существенном влиянии сил плавучести и сравнению их с экспериментальными данными [4—8].

На фиг. 2 представлены результаты расчета (линии 1—4) изменения числа  $Nu$  по длине  $X = x/d$  обогреваемого участка в сравнении с экспериментальными данными [4] (точки 1—4), полученными при значении числа  $Gr = 22 \cdot 10^6$  для следующих комбинаций чисел  $Re$  и  $Gr$ : линии, точки 1 —  $Re \cdot 10^{-3} = 14,7$ ;  $Gr \cdot 10^{-6} = 210$ ; 2 — 9,8; 150; 3 — 7,1; 120; 4 — 5; 93. Результаты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментом [4]. Максимальный эффект снижения числа  $Nu$  имеет место при  $Re = 5 \cdot 10^3$  ( $Gr = 93 \cdot 10^6$ ), при котором характер зависимости  $Nu(X)$  близок к расчетной зависимости для ламинарного режима течения (линия 4') при том же входном профиле скорости, что и для турбулентного режима течения (линия 4).

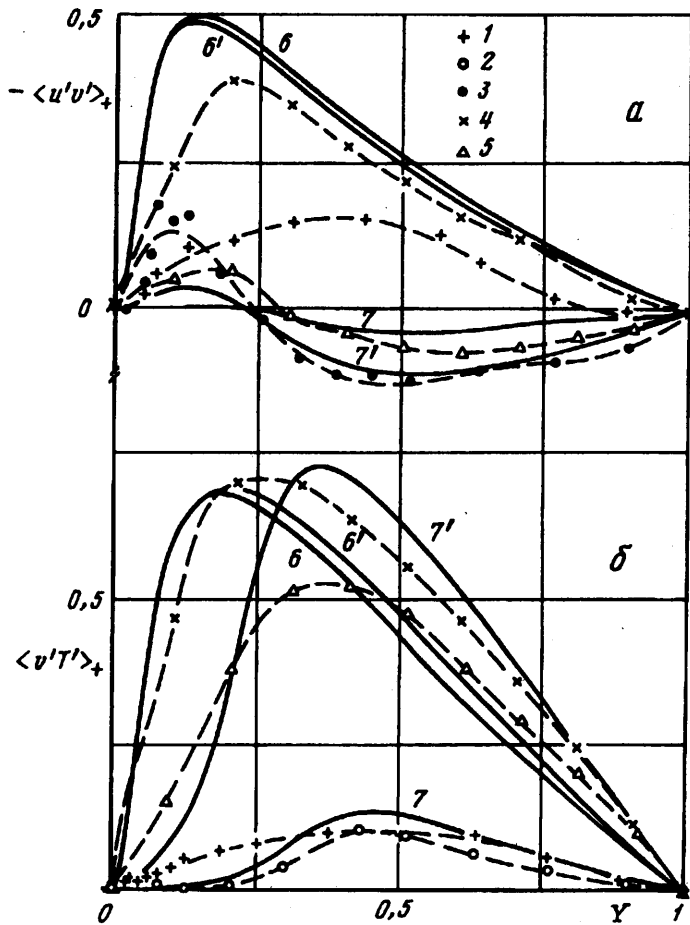




Фиг. 3

Численное исследование развития по длине обогреваемого участка характеристик течения и теплообмена, проведенное при фиксированном числе  $Re = 5 \cdot 10^3$  в диапазоне чисел  $Gr = (9-90) \cdot 10^6$  позволило установить, что зависимости  $Nu(X)$  при  $Gr > 9 \cdot 10^6$  имеют минимум, который с ростом числа  $Gr$  смещается к началу участка обогрева. На расстоянии от входа в обогреваемый участок, соответствующем этому минимуму, характер профиля скорости  $u/u_0$  существенно изменяется: максимум скорости смещается от оси трубы к стенке, т. е. профиль скорости приобретает М-образную форму, характерную для ламинарного режима течения, причем величина этого максимума в области минимума  $Nu(X)$  имеет наибольшее значение, а далее по длине несколько уменьшается. В отличие от скорости температура жидкости по мере прогрева ее монотонно изменяется по длине обогреваемого участка как для турбулентного, так и для ламинарного режима течения.

Сказанное выше иллюстрируется на фиг. 3, где для значений чисел  $Re = 5 \cdot 10^3$  и  $Gr = 93 \cdot 10^6$  представлены экспериментальные [4] и расчетные (точки, линии



Фиг. 4

1—5) профили скорости  $u/u_0$  (фиг. 3, а) и температуры  $\Theta_+ = (T_w - T)/T_w^0$ , где  $T_w^0 = 0,5q_w d/\lambda_w$ , (фиг. 3, б) на расстояниях от входа в обогреваемый участок: 1—5— $x/d = 1,25; 2,5; 7,5; 21,2; 33,8$ . Линии 1', 4' соответствуют расчетным профилям скорости и температуры для ламинарного режима течения при соответствующих значениях  $x/d$ .

Результаты расчета и сравнение с экспериментом [5, 7] для корреляционных моментов  $\langle u'v' \rangle_+$  и  $\langle u'T' \rangle_+$  при значениях параметров, приведенных в табл. 1, представлено соответственно на фиг. 4, а и б. При значении числа  $G\Gamma = 9 \cdot 10^6$  полученное в расчете влияние сил плавучести на турбулентные характеристики мало и слабо зависит от расстояния от входа в обогреваемый участок  $x/d$  (линии 6, 6'). При значении числа  $G\Gamma = 23 \cdot 10^6$  в сечении  $x/d = 53$ , близком к минимуму зависимости  $Nu(X)$ , уровень энергии турбулентности и величины  $\langle v'T' \rangle_+$  (линия 7 на фиг. 4, б) значительно снижается, профиль  $\langle u'v' \rangle_+$  (линия 7 на фиг. 4, а) меняет знак и вырождается практически до нулевых значений, что свидетельствует о существенной ламинаризации потока. Далее по длине обогреваемого участка энергия турбулентности и величины  $\langle u'v' \rangle_+$  и  $\langle v'T' \rangle_+$  (линии 7' на фиг. 4, а, б) возрастают, что является признаком турбулизации потока. На расстояниях от входа в обогреваемый участок  $x/d > 100$  упомянутые величины, а также профиль скорости меняются слабо.

Таблица 1

Параметры	Эксперимент					Расчет			
	[7]	[7]	[7]	[5]	[5]				
$Ar \cdot 10^{-6}$	21	21	21	44	44	21	21	21	21
$Re \cdot 10^{-3}$	5,1	5,1	5,1	5,3	5,3	5,1	5,1	5,1	5,1
$X$	53	53	53	100	100	53	53	100	100
$Gr \cdot 10^{-6}$	9	15	21	11	21	9	23	9	23
Обозначения на фиг. 4	1	2	3	4	5	6	7	6'	7'

Таблица 2

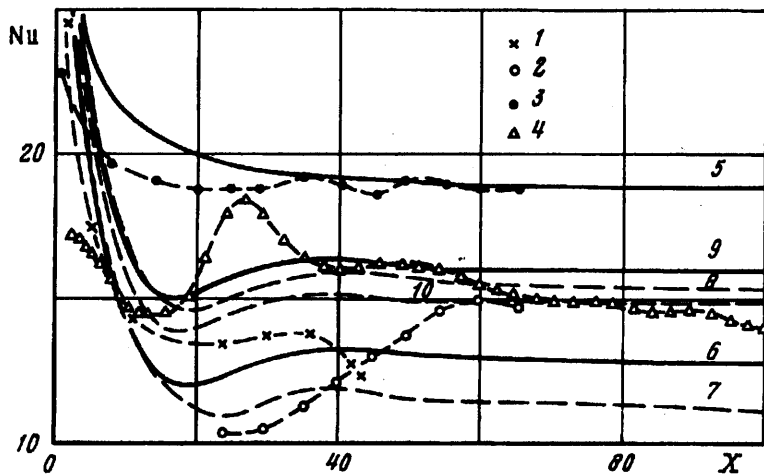
Параметры	Эксперимент				Расчет					
	[4]	[7]	[7]	[8]						
$Ar \cdot 10^{-6}$	22	21	21	86	25	25	25	25	—	83
$Re \cdot 10^{-3}$	5	5,1	5,1	5	5	5	5	5	5	5
$Gr \cdot 10^{-6}$	93	77	0,04	130	0,04	100	100	100	100	100
$\beta \Delta T (X = 50)$	0,235	0,201	$10^{-4}$	0,085	$10^{-4}$	0,225	0,225	0,225	—	0,068
Обозначения на фиг. 5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Полученное в расчетах изменение характеристик турбулентности по длине обогреваемого участка в зависимости от числа  $Gr$  качественно соответствует результатам эксперимента [5, 7], что касается количественного согласия с экспериментом [7] для величины  $\langle v'T' \rangle_+$  (фиг. 4, б), то, как и в случае слабого влияния сил плавучести (см. фиг. 1), его нельзя признать удовлетворительным.

На фиг. 5 представлен сводный график экспериментальных [4, 7, 8] и расчетных зависимостей  $Nu(X)$  при близких значениях чисел  $Re$  и  $Gr$  (см. табл. 2). Как видно, при слабом влиянии силы тяжести результаты расчета (линия 5) близки к эксперименту [7] (точки 3). При существенном влиянии силы тяжести экспериментальные зависимости  $Nu(X)$  [4, 7, 8] (точки 1, 2, 4) заметно различаются между собой, а расчетная зависимость  $Nu(X)$  (линия б) занимает некоторое промежуточное положение.

Расчет, проведенный при отсутствии термогравитационных членов в уравнениях для характеристик турбулентности (1.2) (линия 7), дает значение числа  $Nu$  на 12% ниже значения числа  $Nu$ , полученного при наличии этих членов (линия б). С уменьшением числа  $Gr$  отмеченное выше снижение числа  $Nu$  при отсутствии термогравитационных членов сменяется ростом и при значении числа  $Gr = 15 \cdot 10^6$  превышение числа  $Nu$  относительно величины, полученной с учетом термогравитационных членов, достигает 35%. Различие в числах  $Nu$  возрастает по мере удаления от входа в обогреваемый участок. Это означает, что учет термогравитационных членов в уравнениях для характеристик турбулентности необходим не только при больших значениях числа  $Gr$ , но и в не меньшей степени для промежуточных значений числа  $Gr$ .

Для иллюстрации зависимости результатов от способа определения числа  $Nu$  проведен расчет, в котором коэффициент теплопроводности  $\lambda$  в числе  $Nu$  определен по среднemasовой температуре жидкости  $\langle T \rangle$  (линия 8 на фиг. 5). Отличие от результатов расчета, где  $\lambda$  определено по температуре стенки  $T_w$  (линия б), на



Фиг. 5

длине  $x/d = 100$  составляет 20%. Это обусловлено, как отмечалось выше, значительным подогревом жидкости, при котором на указанной длине обогреваемого участка  $T_w \gg \langle T \rangle$ .

3. О применимости приближения Буссинеска. В литературе по теплообмену (см., например [1]) при течении в трубах с заданным тепловым потоком в стенку  $q_w$  при обезразмеривании уравнений (1.1) в качестве характерной температуры вместо температуры на входе в обогреваемый участок  $T_0$  используется величина  $T^* = q_w r_0 / \lambda$ , а вместо безразмерной температуры  $T/T_0$  — величина  $\Theta = (T - T_0)/T^*$ . Вид безразмерных уравнений движения, энергии (для  $\Theta$ ), величины  $q$ , и соотношения для  $q_x$  системы (1.9) останется неизменным, а в уравнениях для характеристик турбулентности ( $E$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ ) в термогравитационных членах вместо параметра  $Fr_0^{-1}$  будет комбинация  $Q_0/Fr_0$ , т. е. появится параметр  $Q_0$ , который исчезнет из граничного условия на стенке трубы (1.10), так как оно примет вид  $-(\lambda dT/dy)_w = 1$ .

Очевидно, что такое обезразмеривание в случае теплообмена при течении сред с переменными физическими свойствами по сравнению с принятым в настоящей работе особых преимуществ не имеет, поскольку при том же числе безразмерных параметров в уравнениях меняются только их комбинации.

Иное дело, когда используется приближение Буссинеска, согласно которому теплофизические свойства среды ( $\rho$ ,  $\eta$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ) во всех уравнениях полагаются постоянными, за исключением гравитационного члена в уравнении движения, в котором переменность плотности учитывается в виде

$$\rho/\rho_0 = 1 - \beta(T - T_0) = 1 - Q_0\Theta \quad (3.1)$$

При этом уравнение движения системы (1.9) принимает вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r \left( \frac{1}{Re_0} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \right) \right] - k_x \frac{Q_0}{Fr_0} \Theta, \quad p' = p - \frac{k_x x}{Fr_0} \quad (3.2)$$

Таким образом, в приближении Буссинеска уравнения движения и характеристик турбулентности системы (1.9), обезразмеренные по температуре  $T^*$  (см. выше), будут содержать одну и ту же комбинацию безразмерных параметров  $Q_0/Fr_0$ . Переходя от расчетных параметров к параметрам, используемым в эксперименте, в соответствии с (2.1) получим  $Q_0/Fr_0 = 0,25Gr/Re^2$ . Это означает, что в числе определяющих параметров отсутствует число Архимеда  $Ar$ , от которого в приближении Буссинеска не должны зависеть результаты расчетов.

Как известно, критерием возможности использования приближения Буссинеска является величина  $\beta\Delta T$ , накладывающая ограничение на нагрев среды  $\beta\Delta T \ll 1$ . Выражая этот критерий через безразмерные параметры, используемые в расчете и эксперименте, получим

$$\beta\Delta T = \frac{\langle T \rangle - T_0}{T_0} = 2 \frac{Q_0}{Re_0 Pr_0} \frac{x}{r_0} = 4 \frac{Gr}{Ar Re Pr} \frac{x}{d} \quad (3.3)$$

Как следует из (3.3), при неизменных значениях чисел  $Re$ ,  $Pr$  и  $Gr$  и фиксированной длине обогреваемого участка с ростом числа  $Ag$  величина  $\beta\Delta T$  уменьшается (см. табл. 2) и при достаточно больших значениях числа  $Ag$  приближение Буссинеска вполне оправдано.

Сказанное выше иллюстрируется на фиг. 5, где линией 9 представлены результаты расчета в приближении Буссинеска, полученные в диапазоне чисел  $Ag = (5-500) \cdot 10^6$  при неизменных значениях чисел  $Re$  и  $Gr$  (см. табл. 2). Как видно из фиг. 5, результаты расчета в приближении Буссинеска (линия 9) действительно не зависят от числа  $Ag$ , в отличие от результатов расчета, проведенного без использования приближения Буссинеска. Линия 10 на фиг. 5 получена при числе  $Ag = 83 \cdot 10^6$ , что соответствует эксперименту [8], которое более чем в три раза превышает число  $Ag = 25 \cdot 10^6$ , соответствующее экспериментам [4, 7] и расчету (линия 6). Как видно, число  $Ag$  заметно влияет на результаты расчета: с ростом его величина  $\beta\Delta T$  в соответствии с (3.3) уменьшается (см. табл. 2) и результаты приближаются к полученным в приближении Буссинеска (линия 9).

Таким образом, величина числа  $Ag$  является важным параметром задачи, от которого зависят результаты, и игнорирование его при анализе результатов эксперимента [4-8], где определяющими считаются только числа  $Re$ ,  $Pr$  и  $Gr$ , является необоснованным.

**4. Заключение.** Выполнено обобщение трехпараметрической модели турбулентности, дополненной уравнением переноса для поперечного турбулентного потока тепла, на течение в вертикальных обогреваемых трубах при наличии силы тяжести, совпадающей по направлению с осью трубы. Для продольного турбулентного потока тепла, входящего в уравнения модели в составе термогравитационных сил, предложено алгебраическое соотношение. Содержащаяся в этом соотношении константа определена из экспериментов по вырождению турбулентности за нагреваемыми решетками.

Проведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными по числу Нуссельта  $Nu$ , полям скорости и температуры, профилям турбулентного трения и поперечного потока тепла. Показано, что зависимость числа  $Nu(X)$  имеет минимум, который с ростом числа Грасгофа смещается к началу участка обогрева. Характер изменения профилей скорости и характеристик турбулентности свидетельствует о ламинаризации течения в области минимума зависимости  $Nu(X)$ , после прохождения которого течение вновь турбулизуется. Результаты расчета в качественном отношении согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Что касается количественного соответствия, то оно имеет место не для всех экспериментов, результаты которых также различаются между собой.

Выполнена оценка применимости приближения Буссинеска, при использовании которого из числа определяющих параметров исключается число Архимеда  $Ag$  и результаты зависят только от чисел Рейнольдса, Прандтля и Грасгофа. В случае существенного подогрева теплоносителя, когда необходим учет переменности теплофизических свойств его и приближение Буссинеска несправедливо, результаты зависят от числа  $Ag$ , что необходимо учитывать при проведении расчетов и анализе экспериментальных данных.

Авторы благодарят А. Ф. Полякова и участников семинара кафедры инженерной теплофизики МЭИ за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16364).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петухов Б. С., Поляков А. Ф. Теплообмен при смешанной турбулентной конвекции. М.: Наука, 1986. 192 с.
2. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40-52.
3. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 42-50.

4. Steiner A. On the reverse transition of a turbulent flow under the action of buoyancy forces//J. Fluid Mech. 1971. V. 47. Pt 3. P. 503—512.
5. Carr A. D., Connor M. A., Buhr H. O. Velocity, temperature, and turbulence measurements in air for pipe flow with combined free and forced convection//Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1973. V. 95. № 4. P. 445—452. (Рус. перев.: Кар, Коннор, Бэр. Измерения скорости, температуры и параметров турбулентности воздушного потока в трубе при смешанной конвекции//Теплопередача. 1973. № 4. С. 15—22).
6. Polyakov A. F., Shindin S. A. Development of turbulent heat transfer over the length of vertical tubes in the presence of mixed air convection//Intern. J. Heat Mass Transfer. 1988. V. 31. № 5. P. 987—992.
7. Поляков А. Ф., Шиндин С. А. Турбулентный перенос импульса и тепла при восходящем течении воздуха в обогреваемых трубах//Турбулентный теплообмен при смешанной конвекции в вертикальных трубах. М.: ИВТАН, 1989. С. 49—94.
8. Вилемас Ю. В., Пошкас П. С., Каунас В. Э. Обобщение данных по локальному теплообмену в газоохлаждаемой вертикальной трубе при смешанной конвекции//Турбулентная конвекция. М.: ИВТАН, 1990. С. 49—68.
9. Cotton M. A., Nott I. D. Computation of developing turbulent mixed convection heat transfer to air in a vertical tube: Comparison of low-Reynolds-number  $k$ - $\epsilon$ -turbulence model with recent experiments//Турбулентная конвекция. М.: ИВТАН, 1990. С. 69—94.
10. Ушурас Е. В., Пошкас П. С. Численное исследование характеристик турбулентного переноса при смешанной конвекции в вертикальных трубах//Турбулентная конвекция. М.: ИВТАН, 1990. С. 95—113.
11. Невлев В. М. Численное моделирование турбулентных течений. М.: Наука, 1990. 216 с.
12. Tavoularis S., Corrsin S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient. Pt 1//J. Fluid Mech. 1981. V. 104. P. 311—347.
13. Warhaft Z., Lumley J. L. An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence//J. Fluid Mech. 1978. V. 88. Pt 4. P. 649—684.
14. Ибрагимов М. Х., Субботин В. И., Таранов Г. С. Определение корреляционной связи между пульсациями скорости и температуры в турбулентном потоке воздуха в трубе//Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 5. С. 1032—1035.
15. Поляков А. Ф., Шиндин С. А., Комаров П. Л. Турбулентное течение воздуха в круглых трубах при малых числах Рейнольдса//Турбулентный теплообмен при смешанной конвекции в вертикальных трубах. М.: ИВТАН, 1989. С. 25—48.

Москва

Поступила в редакцию  
12.I.1995