

УДК 532.516.5.013.3

© 1996 г. В. В. ПУХНАЧЕВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА С ПЛОСКОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Исследовано автомодельное решение уравнений Навье — Стокса, описывающее стационарное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве. Движение индуцировано источниками или стоками, распределенными с постоянной плотностью на вертикальной полуоси. Ограничивающая жидкость горизонтальная плоскость является свободной поверхностью. Обнаружено, что в случае источников решение указанного типа существует и единственно при любом значении числа Рейнольдса $R > 0$, а в случае стоков — лишь в диапазоне $-2 \leq R < 0$. Приведены результаты расчета автомодельных решений. Найдена их асимптотика при $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$.

1. Постановка задачи. Рассматривается установившееся осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве $z < 0$. Предположим, что внешние массовые силы отсутствуют. Обозначим через r полярный радиус в плоскости $z = \text{const}$ и положим

$$s = (r^2 + z^2)^{1/2}, \quad \lambda = -\text{arctg}(r/z)$$

так что s — сферический радиус, λ — широта сферической системы координат. Проекции вектора скорости v на оси s, λ обозначим через v_s, v_λ , а давление жидкости — через p (ввиду осесимметричности течения третья компонента v равна нулю).

Хорошо известно, что уравнения Навье — Стокса обладают семейством автомодельных решений, в которых

$$v_s = \frac{vU(x)}{r}, \quad v_\lambda = \frac{vV(x)}{r}, \quad p = \frac{\rho v^2 P(x)}{r^2}, \quad x = \frac{1}{2}(1 - \cos \lambda) \quad (1.1)$$

(см. [1] и цитированную там литературу). Здесь v — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости.

Подставляя (1.1) в уравнения Навье — Стокса и следуя [2], можно привести систему уравнений для функций U, V, P к такой форме

$$U = -\sqrt{x(1-x)} V' \quad (1.2)$$

$$2P = x(1-x) [2x(1-x) V'''' + 2(1-2x) V''' - VV'' - V'^2] - V^2 \quad (1.3)$$

$$4x(1-x) V' - 4(1-2x) V - V^2 = Ax^2 + Bx + C \quad (1.4)$$

где A, B, C — постоянные, а штрих обозначает дифференцирование по x .

При подходящем выборе постоянных A, B, C решений (1.1) может быть интерпретировано как описывающее взаимодействие распределенных источников или стоков с твердой плоскостью $z=0$ [1, 3]. Ниже рассматривается другая интерпретация этого решения, в которой плоскость $z=0$ является свободной границей.

В переменных s, λ область течения задается неравенствами $s > 0, 0 < \lambda < \pi/2$. На оси симметрии $x=0$, на свободной поверхности $x=1/2$. Кине-

матическое условие на свободной границе $u_\lambda = 0$ при $\lambda = \pi/2$ вследствие (1.1), приводит к условию

$$x = 1/2: V = 0 \quad (1.5)$$

Чтобы записать в терминах U , V , P условия отсутствия напряжений на полкости $z = 0$, используем формулы для элементов $P_{i\lambda}$, $P_{\lambda\lambda}$ тензора напряжений в сферических координатах [4]

$$P_{i\lambda} = \rho v \left(\frac{1}{s} \frac{\partial v_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial s} - \frac{v_i}{s} \right)$$

$$P_{\lambda\lambda} = -p + 2\rho v \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{v_i}{s} \right)$$

Поскольку компоненты орта нормали к свободной поверхности суть $n_i = 0$, $n_\lambda = 1$, то должны быть выполнены равенства $P_{i\lambda} = P_{\lambda\lambda} = 0$ при $\lambda = \pi/2$ (при этом считается атмосферное давление равным нулю и учитывается, что капиллярное давление на плоской свободной границе также равно нулю).

Подставим в последние равенства выражения (1.1) для v_i , u_λ , p и используем соотношения $r = s \sin \lambda$, $\partial/\partial \lambda = \sqrt{x(1-x)} \partial/\partial x$, а также (1.2), (1.3) и (1.5). В результате получим

$$x = 1/2: V'' = 0, P = 0 \quad (1.6)$$

На основании (1.3), (1.5), (1.6) предыдущее соотношение приводит к условию

$$x = 1/2: V''' - 2V^2 = 0 \quad (1.7)$$

Соотношения (1.5)–(1.7) позволяют найти две связи между постоянными A , B и C в уравнении (1.4). Дифференцируя (1.4), полагая $x = 1/2$ и используя (1.5), (1.6), находим $A + B = 0$. Дифференцируя (1.4) дважды и учитывая (1.7), заключаем, что $A = 4V'(1/2)$. Подставляя эти соотношения в (1.4), вследствие (1.5) получаем $A = 2C$. Это дает возможность записать уравнение (1.4) в виде

$$4x(1-x)V' - 4(1-2x)V - V^2 = C(1-2x+2x^2) \quad (1.8)$$

Таким образом, нахождение искомого автомодельного решения свелось к решению задачи Коши (1.8), (1.5), в которую входит параметр C . Уравнение (1.8) имеет особую точку $x = 0$ (другая особенность $x = 1$ лежит вне отрезка $[0, 1/2]$, на котором рассматривается решение). Априори не очевидно, что решение данной задачи продолжимо вплоть до особой точки с сохранением непрерывности функции V . В разд. 3 доказывается, что это возможно, если $C \leq 4$. Если предел $V(x)$ при $x \rightarrow 0$ существует, то, согласно (1.1), особенность изучаемого решения на полуоси $z < 0$, $r = 0$ можно трактовать как распределенный источник или сток с расходом на единицу длины $Q = 2\pi v V(0)$. Параметр $V(0) = R$ естественно принять за число Рейнольдса. Случаю источника отвечают значения $R > 0$, а случаю стока — значения $R < 0$.

Считая значение R заданным, приходим к следующей задаче: найти параметр C и решение $V(x)$ уравнения (1.8) на отрезке $0 \leq x \leq 1/2$ так, чтобы удовлетворялись условия (1.5) и

$$\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = R \quad (1.9)$$

Задача (1.5), (1.8), (1.9) и будет предметом дальнейшего исследования.

Выше предполагалось, что движение происходит в отсутствие внешних сил. Однако если плоскость $z = 0$ является горизонтальной, а на жидкость действует постоянная сила тяжести, направленная вертикально вниз, то уравнения движения и условия на свободной границе $z = 0$ будут удовлетворены при замене p на $p - \rho g z$, где g — ускорение свободного падения (при этом v_i и u_λ остаются неизменными).

2. Поведение решения вблизи особой точки. В этом разделе доказывается следующее утверждение.

Предложение 1. Если $C \leq 4$, то любое решение уравнения (1.8) имеет конечный предел при $x \rightarrow 0$. Если $C > 4$, то такого предела не существует.

Доказательство. Сделаем в (1.8) подстановку

$$V = 4x(1-x)q \quad (2.1)$$

Функция $q(x)$ есть решение уравнения Риккати

$$q' = \frac{C(1-2x+2x^2)}{16x^2(1-x)^2} + q^2 \quad (2.2)$$

В свою очередь подстановка

$$q = -y'/y \quad (2.3)$$

приводит уравнение (2.2) к линейному

$$My \equiv y'' + \frac{C(1-2x+2x^2)}{16x^2(1-x)^2}y = 0 \quad (2.4)$$

Точка $x=0$ является регулярной особой точкой уравнения (2.4). Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - k + C/16 = 0$. Если $C \leq 4$, то корни этого уравнения вещественные

$$k_1 = \frac{2 - \sqrt{4-C}}{4}, \quad k_2 = \frac{2 + \sqrt{4-C}}{4}$$

Предположим, что $C \neq 0$, $C \neq 4$, тогда $k_2 - k_1 \neq 0$ и $k_2 - k_1 \neq 1$. В этом случае уравнение (2.4) имеет два линейно независимых решения y_1, y_2 , таких, что

$$y_1 = x^{k_1} [1 + O(x)], \quad y_1' = k_1 x^{k_1-1} [1 + O(x)]$$

$$y_2 = x^{k_2} [1 + O(x)], \quad y_2' = k_2 x^{k_2-1} [1 + O(x)]$$

когда $x \rightarrow 0$. Отсюда и из (2.3) заключаем, что все решения уравнения (2.2), кроме одного, имеют при $x \rightarrow 0$ асимптотику

$$q = -\frac{k_1}{x} [1 + O(x)]$$

где $\gamma = \min(k_2 - k_1, 1)$. «Исключительное» решение $q = -y_2'/y_2$ при $x \rightarrow 0$ представимо в виде

$$q = -\frac{k_2}{x} [1 + O(x)]$$

Таким образом, согласно (2.1), либо

$$\lim_{x \rightarrow 0} V = \sqrt{4-C} - 2 \quad (2.5)$$

(случай общего положения), либо

$$\lim_{x \rightarrow 0} V = -\sqrt{4-C} - 2 \quad (2.6)$$

(особый случай).

При $C=0$ уравнение (2.4) имеет решения $y_1=1, y_2=x$. Результат вычисления $\lim V$ при $x \rightarrow 0$ находится в соответствии с формулами (2.5), (2.6). Если $C=4$, определяющее уравнение для k имеет кратный корень $k_1=k_2=1/2$. В этом случае асимптотика решений уравнения (2.4) при $x \rightarrow 0$ такова

$$y_1 = \sqrt{x} \ln x [1 + O(x)], \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x + 2) [1 + O(x)]$$

$$y_2 = \sqrt{x} [1 + O(x)], \quad y_2' = \frac{1}{2\sqrt{x}} [1 + O(x)]$$

Отсюда вытекает, что любое из решений (2.2) с $C = 4$ при $x \rightarrow 0$ допускает представление

$$q = -\frac{1}{2x} + O(|\ln x|^{-1})$$

Это означает, что $\lim V = -2$ при $x \rightarrow 0$, что также согласуется с (2.5), (2.6). Первая часть предложения 1 доказана.

Рассмотрим теперь случай $C > 4$. Характеристическое уравнение для (2.4) относительно особой точки $x = 0$ имеет при $C > 4$ комплексные корни $k_{1,2} = 1/2 \pm i\beta$, где $\beta = \sqrt{C - 4}/4$. Асимптотика линейно независимых решений уравнения (2.4) при $x \rightarrow 0$ дается формулами

$$y_1 = \sqrt{x} \cos(\beta \ln x) [1 + O(x)]$$

$$y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\beta \ln x) [1 + O(x)] - \frac{\beta}{\sqrt{x}} \sin(\beta \ln x) [1 + O(x)]$$

$$y_2 = \sqrt{x} \sin(\beta \ln x) [1 + O(x)]$$

$$y_2' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\beta \ln x) [1 + O(x)] + \frac{\beta}{\sqrt{x}} \cos(\beta \ln x) [1 + O(x)]$$

Вследствие (2.3), (2.1) это означает, что при $C > 4$ предела V при $x \rightarrow 0$ не существует. Доказательство предложения 1 закончено.

Из последних формул и (2.3), (2.1) вытекает также следующий важный факт: при $C > 4$ любое решение уравнения (1.8) имеет целую последовательность особенностей, сходящуюся к $x = 0$. Если наложить на решение (1.1) физически естественное требование регулярности в полупространстве $z < 0$ всюду, кроме особой линии $r = 0$, то случай $C > 4$ следует исключить из рассмотрения. Далее предполагается, что $C \leq 4$.

Предложение 1 позволяет интерпретировать особенность в автомодельном решении (1.1) как бесконечно тонкую скважину $r = 0$, $z < 0$ с постоянной линейной плотностью источников $Q = 2\pi\nu V(0)$. Существование конечного предела $V(x)$ при $x \rightarrow 0$ делает осмысленной постановку задачи (1.5), (1.8), (1.9). Вместе с тем наличие двух потенциальных возможностей (2.5), (2.6) требует дальнейшего исследования зависимости между параметрами C и R . Этому вопросу посвящен следующий раздел, где попутно устанавливаются необходимые для дальнейшего оценки функции V .

3. Разрешимость задачи (1.5), (1.8), (1.9). Сформулируем основной результат работы.

Предложение 2. Задача (1.5), (1.8), (1.9) имеет, и притом единственное, решение, если $R \geq -2$, и не имеет решений, если $R < -2$. Параметр C однозначно определяется значением R по формуле

$$C = -R(R + 4) \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (1.8), (1.5). Как следует из предыдущего раздела, необходимым условием продолжимости ее решения на весь отрезок $[0, 1/2]$ является неравенство $C \leq 4$. Покажем, что это неравенство является и достаточным условием.

В силу соотношений (2.1), (2.3) для этого достаточно установить, что решение уравнения (2.4) с начальными условиями

$$x = 1/2: y = 1, y' = 0 \tag{3.2}$$

не обращается в нуль на полуоткрытом интервале $(0, 1/2]$. Возможность продолжения решения на отрезок $[0, 1/2]$ тогда следует из предложения 1.

Рассмотрим сначала случай $C < 0$. В этом случае решение задачи Коши (2.4), (3.2) не может иметь отрицательного минимума при $0 < x \leq 1/2$. Значит, $y > 0$ для $x \in (0, 1/2]$. Если $C = 0$, решение задачи Коши (1.8), (1.5) есть $V = 0$. При этом $R = 0$, а соответствующее автомодельное решение описывает состояние покоя.

Случай $0 < C \leq 4$ рассматривается сложнее. Введем вспомогательную функцию

$$\zeta = K \sqrt{2x} [-Y_0(x) + LJ_0(x)] \quad (3.3)$$

где J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода, а K и L — постоянные, выбранные так, что $\zeta = 1, \zeta' = 0$ при $x = 1/2$. Имеем

$$K = \frac{J_0(1/2) - J_1(1/2)}{-Y_1(1/2)J_0(1/2) + Y_0(1/2)J_1(1/2)}, \quad L = \frac{-Y_1(1/2) - Y_0(1/2)}{J_0(1/2) - J_1(1/2)}$$

Приближенно $K \approx 0,55, L \approx 1,47$. Для дальнейшего существенна лишь положительность K и L . Так как функции $J_0, -Y_0$ положительны при $0 < x \leq 1/2$, то это влечет неравенство $\zeta(x) > 0$ на указанном промежутке.

Функция ζ есть решение уравнения

$$\zeta'' + [1 + (4x^2)^{-1}] \zeta = 0$$

откуда вытекает, что $M\zeta = -f(x)$, где M — линейный дифференциальный оператор, определенный первым из равенств (2.4), а функция $f(x)$ задана выражением

$$f = \zeta \left[\frac{4 - C}{16x^2} + \frac{16(1-x)^2 - C}{16(1-x)^2} \right]$$

Поскольку $\zeta > 0$ для $0 < x \leq 1/2$, то будет выполнено неравенство $f > 0$ для $0 < x < 1/2$ и любого $C \in (0, 4]$.

Рассмотрим функцию $\mu = y - \zeta$. Из положительности $f(x)$ и уравнений, которым подчиняются функции y и ζ , вытекает дифференциальное неравенство

$$M\mu > 0, \quad 0 < x < 1/2 \quad (3.4)$$

Кроме того, функции y и ζ удовлетворяют одним и тем же начальным условиям, поэтому

$$x = 1/2: \mu = \mu' = 0 \quad (3.5)$$

Покажем, что функция $\mu(x)$ неотрицательна на интервале $(0, 1/2)$. Из (3.4), (3.5) и определения (2.4) оператора M ясно, что $\mu > 0$ для x , меньших значения $1/2$, но достаточно близких к нему. Пусть x_* — ближайшая к $1/2$ точка интервала $(0, 1/2)$, такая, что $\mu(x_*) = 0$. В этой точке, согласно (3.4), $\mu'' > 0$, что гарантирует положительность μ при $x < x_*$ и достаточно малом $x_* - x$. Повторяя, если потребуется, это рассуждение, мы установим справедливость неравенства $\mu \geq 0$ на всем интервале $(0, 1/2)$. В силу положительности ζ это означает, что $y > 0$ для $x \in (0, 1/2]$ и при $0 < C \leq 4$.

Докажем теперь, что для любого $C \leq 4$ решение задачи (1.8), (1.5) удовлетворяет соотношению (2.5). Для $C = 0$ это очевидно. Пусть $C < 0$. В этом случае решение уравнения (2.2) с условием $q(1/2) = 0$ положительно при $0 < x < 1/2$, что легко доказывается от противного. Отсюда и из (2.1) следует неотрицательность $\lim V$ при $x \rightarrow 0$. Но, как было установлено в разд. 2, $V(0)$ может принимать вообще лишь одно из двух значений: (2.5) или (2.6). Однако вторая возможность при $C < 0$ осуществиться не может, так как это противоречило бы неравенству $V(0) \geq 0$.

Осталось рассмотреть случай $0 < C \leq 4$. Положим

$$\eta = -\frac{\zeta'}{\zeta}, \quad H = 4(1-x)\eta$$

где функция ζ определена равенством (3.3). Функция η удовлетворяет уравнению

$$\eta' = \frac{C(1-2x+2x^2)}{16x^2(1-x)^2} + \eta^2 + \omega(x)$$

$$\omega(x) = \frac{4-C}{16x^2} + \frac{16(1-x)^2-C}{16(1-x)^2}$$

Заметим, что $\omega(x) > 0$ для любых $x \in (0, 1/2)$, если $0 < C \leq 4$. Кроме того, $\eta(1/2) = q(1/2) = 0$. Вводя в рассмотрение вспомогательную функцию $\chi = q - \eta$ и используя (2.2), приходим к соотношениям

$$\chi' = (q + \eta)\chi - \omega(x), \quad 0 < x < 1/2, \quad \chi(1/2) = 0$$

Ввиду положительности $\omega(x)$ из них следует, что $\chi > 0$, т. е. $q > \eta$ для $0 < x < 1/2$. Это влечет неравенство $V > H$ на интервале $(0, 1/2)$; следовательно, $V(0) \geq H(0)$. Из определения H и (3.3) вытекает $H(0) = -2$. Тем самым доказано, что $V(0) \geq -2$. Таким образом, из двух возможных значений $V(0)$ (2.5) и (2.6) при $C < 4$ достигается первое. Если же $C = 4$, то $V(0) = H(0) = -2$, что также согласуется с (2.5).

Итак, если $V(x)$ — решение задачи Коши (1.8), (1.5), в которой $C \leq 4$, то функция V продолжается на весь отрезок $[0, 1/2]$ и, по доказанному выше, $V(0) = \sqrt{4-C} - 2$. Привлекая дополнительное условие (1.9), получаем однозначную зависимость C от R , выражаемую формулой (3.1). Из неравенства $C \leq 4$ следует ограничение на величину числа Рейнольдса: $R \geq -2$.

Как уже отмечалось в начале доказательства, условие $C \leq 4$ необходимо для существования решения задачи Коши (1.8), (1.5) на всем отрезке $[0, 1/2]$. Тем самым доказано, что при $R < -2$ задача (1.5), (1.8), (1.9) решений не имеет. Если же $R \geq -2$, то решение $V(x)$ задачи Коши (1.8), (1.5), в которой C определено равенством (3.1), существует при всех $x \in [0, 1/2]$ и является единственным. При $x \rightarrow 0$ это решение удовлетворяет предельному соотношению (1.9). Предложение 2 доказано.

4. Качественные свойства решения. Исследуем более детально асимптотику функции $V(x)$ в окрестности особой точки $x = 0$ уравнения (1.8). Вследствие (2.1), (2.3) для этого достаточно изучить поведение решений линейного уравнения (2.4) при $x \rightarrow 0$. Согласно общей теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами [5], если $R \geq -2$ не является четным числом, то уравнение (2.4), в котором $C = -R(R+4)$, имеет два линейно независимых решения вида

$$y_1 = x^{-R/4} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (4.1)$$

$$y_2 = x^{R/4+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (4.2)$$

где a_k, b_k — постоянные, причем $a_0 = b_0 = 1$. Ряды (4.1), (4.2) сходятся в области $|x| < 1$.

Если же R — четное число, то уравнение (2.4) по-прежнему обладает решением (4.2), а второе решение этого уравнения содержит в своем разложении слагаемое, пропорциональное $x^{-R/4} \ln x$. На основании формул (2.1), (2.3) отсюда и из (4.1), (4.2) вытекает следующее утверждение. Если решение $V(x)$ уравнения (1.8) аналитично в точке $x = 0$, то оно имеет вид либо

$$V = -4x(1-x)y_1'(x)/y_1(x) \quad (4.3)$$

либо

$$V = -4x(1-x)y_2'(x)/y_2(x) \quad (4.4)$$

причем в первом случае R не должно быть четным числом.

Покажем, что при $R \neq 0$, $R \geq -2$ задача (1.5), (1.8), (1.9) не имеет аналитических решений, представимых в форме (4.4). (Напомним, что при $R < -2$ эта задача не имеет даже непрерывных решений.) Подставляя (4.2) в (4.4) и вычисляя $\lim V$ при $x \rightarrow 0$, получаем $V(0) = -R - 4$; с другой стороны, согласно (1.9), $V(0) = R$. Тем самым $R = -2$, что соответствует $C = 4$.

Рассмотрим уравнение (2.4) с $C = 4$

$$y'' + \frac{1-2x+2x^2}{4x^2(1-x)^2}y = 0 \quad (4.5)$$

Интерес представляет решение этого уравнения $y = y_2(x)$, имеющее разложение (4.2) с $R = -2$. Если функция $y_2'(x)$ не обращается в нуль на промежутке $(0, 1/2]$, то в силу (4.2), (4.5) функция y_2 положительна для $x \in (0, 1/2]$. Тогда функция V , определенная равенством (4.4), также не обращается в нуль при $0 < x \leq 1/2$ и, следовательно, не может удовлетворять условию (1.5).

Численное решение уравнения (4.5) с условием $y = x^{1/2} + O(x^{3/2})$ при $x \rightarrow 0$ показало, что функция $y_2(x) > 0$ при $0 < x < 0,82$. Это означает, что задача (1.5), (1.8), (1.9) не имеет аналитических решений вида (4.4). Для существования аналитических решений этой задачи, представимых в форме (4.3), необходимо, чтобы решение (4.1) уравнения (2.4) с $C = -R(R+4)$ не обращалось в нуль при $x \in (0, 1/2]$ и, кроме того, выполнялось условие

$$x = 1/2: y_1' = 0 \quad (4.6)$$

вытекающее из (1.5), (2.1) и (2.3). Поскольку коэффициенты разложения функции $y_1(x)$ в ряд (4.1) при заданном R и $a_0 = 1$ определяются однозначно, то соотношение (4.6) может выполняться лишь для дискретных значений $R > -2$, $R \neq 0$; при этом четные значения R следует исключить заранее.

Перепишем уравнение (2.4), подставив в него значение $C = -R(R+4)$

$$y'' - \frac{R(R+4)(1-2x+2x^2)}{16x^2(1-x)^2}y = 0 \quad (4.7)$$

Требуется найти значение параметра R и решение $y_1(x)$ уравнения (4.7), удовлетворяющие условию (4.6) и имеющие при $x \rightarrow 0$ асимптотику (4.1).

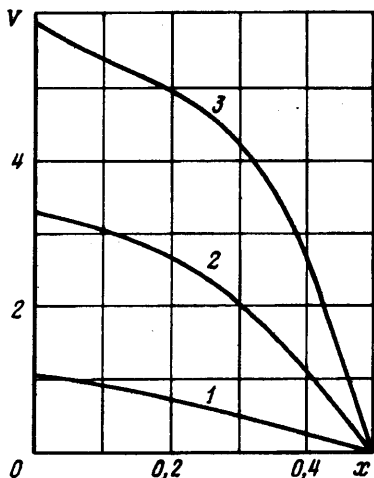
Сформулированная задача решалась численно. Вычисления показали, что существует три значения числа Рейнольдса: $R \approx 1,07$, $R_2 \approx 3,34$, $R_3 \approx 5,9$, при которых она имеет решение. Графики функций $V(x)$ для этих значений R изображены на фиг. 1 (кривые 1, 2, 3 соответственно).

С увеличением R решение задачи (1.5), (1.8), (1.9) быстро выходит на асимптотику погранслояного типа, построенную в разд. 5. Из результатов этого раздела следует, что при больших значениях R аналитических решений задачи (1.5), (1.8), (1.9) не существует. Таким образом, множество значений R , при которых эта задача имеет аналитическое решение, конечно.

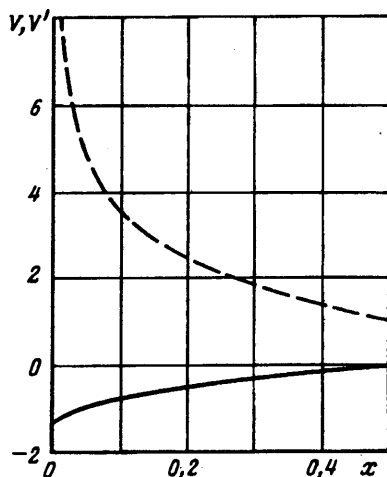
Если решение задачи (1.5), (1.8), (1.9) не является аналитическим, то оно с необходимостью имеет представление

$$V = -4x(1-x) \frac{c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)}{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)} \quad (4.8)$$

где ни одна из постоянных c_1, c_2 не равна нулю. Из (4.8) и разложений (4.1), (4.2) функций y_1, y_2 (первое из них следует модифицировать для четных значений R) вытекает следующее утверждение. Функция $V(x)$ имеет $[R/2 + 1]$ непрерывных производных в точке $x = 0$; производная V порядка $[R/2 + 1] + 1$ неограниченно возрастает, когда $x \rightarrow 0$ (здесь $[a]$ обозначает целую часть числа $a \geq 0$).



Фиг. 1



Фиг. 2

Изучим теперь поведение вблизи оси симметрии компоненты скорости v_z . Согласно (1.1), (1.2) и равенству $r = 2s \sqrt{x(1-x)}$

$$v_z = -\frac{v}{2s} V'(x) \quad (4.9)$$

Положим

$$V = R(1-x) + 4x(1-x)u \quad (4.10)$$

тогда для V' из (1.8), (3.1), (4.10) получается выражение

$$V' = 2[2(1-2x) + R(1-x)]u + 4x(1-x)u^2 - R(1-x)^{-1} - R^2x[4(1-x)]^{-1} \quad (4.11)$$

В равенстве (4.10) V есть решение задачи (1.5), (1.8), (1.9). Из доказательства предложений 1 и 2 можно заключить, что первое слагаемое справа в (4.10) дает главный член асимптотики V при $x \rightarrow 0$, а функция u , входящая в остаточный член, допускает оценку

$$u = O(x^\delta), \quad \delta = \min(0, R/2) \quad (4.12)$$

при $x \rightarrow 0$, $R > -2$. Таким образом, если $R > 0$, то функция u остается ограниченной, когда $x \rightarrow 0$. Отсюда и из (4.9), (4.11) вытекает, что v_z ограничена в точках отрицательной полуоси z , за исключением начала координат, где v_z имеет особенность типа «импульсного источника» [2].

Иначе обстоит дело в случае $R < 0$. Оказывается, что, по крайней мере для $R > -1$, функция u допускает оценку модуля снизу

$$|u| \geq C_1 x^{R/2} \quad (4.13)$$

при $x \rightarrow 0$. Вместе с (4.11) и оценкой сверху (4.12) это влечет $C_2 x^{R/2} \leq |V'| \leq C_3 x^{R/2}$ (здесь C_1, C_2, C_3 — положительные постоянные). Последние неравенства ввиду (4.9) дают оценки

$$C_2 v x^{R/2} \leq |2s v_z| \leq C_3 v x^{R/2}$$

когда $x \rightarrow 0$. Таким образом, при $-1 < R < 0$ функция v_z имеет слабую особенность на оси симметрии. (По-видимому, подобная (4.13) оценка u справедлива и при $-2 \leq R \leq -1$, хотя доказать этого не удалось.)

Доказательство (4.13) основано на применении теоремы сравнения [5] к решению уравнения для функции u

$$Nu \equiv u' - \frac{R}{2x} u - u^2 + \frac{R(R+4)}{16(1-x)^2} = 0 \quad (4.14)$$

Это уравнение — следствие (1.8), (3.1) и (4.10). Поскольку $V = 0$ при $x = 1/2$, то $u(1/2) = -R/2$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v = -\frac{1}{2} R (2x)^{R/2} [1 - \varepsilon + \varepsilon (2x)^{1+R/2}]$$

где число ε выбрано так, что $0 < \varepsilon < 2(1+R)(2+R)^{-1}$. (Заметим, что $0 < \varepsilon < 1$ при $-1 < R < 0$.) Вычисления, которые здесь опущены, показывают, что $Nv > 0$ при $0 < x < 1/2$. Так как $v(1/2) = u(1/2) = -R/2$, из этого дифференциального неравенства и уравнения (4.14) вытекает неравенство $u > v$ при $0 < x < 1/2$, а следовательно, и оценка (4.13).

Рассмотрим задачу (1.5), (1.8), (1.9) при малых значениях числа Рейнольдса R . Удобней иметь дело с эквивалентной ей задачей Коши $u(1/2) = -R/2$ для уравнения (4.14). Эта задача равносильна интегральному уравнению

$$u(x) = -\frac{R}{2} + \int_x^{1/2} \left(\frac{x}{t}\right)^{R/2} \left[\frac{R(R+4)}{16(1-t)^2} u^2(t) \right] dt \quad (4.15)$$

Если $R > 0$ мало, решение уравнений (4.15) можно получить методом последовательных приближений. Сходимость приближений в пространстве непрерывных на отрезке $0 \leq x \leq 1/2$ функций доказывается стандартным образом.

Если $R < 0$, в уравнении (4.15) следует сделать подстановку $u = x^{R/2} w$. Функция w удовлетворяет уравнению

$$w(x) = -\frac{R}{2} x^{-R/2} + \int_x^{1/2} t^{-R/2} \left[\frac{R(R+4)}{16(1-t)^2} - t^R w^2(t) \right] dt$$

К этому уравнению тоже применим метод последовательных приближений, только теперь он будет сходиться при малых $R < 0$. В заключение этого раздела приведем формулы для давления и завихренности в рассматриваемом течении. Согласно (1.1), давление p выражается в терминах функции $P(x)$, связанной с V соотношением (1.3). Используя уравнение (1.8) и выражение C через R (3.1), можно упростить представление P до следующего вида:

$$2P = -V^2 - 2x(1-x)[R(R+4) + V']$$

Из последнего равенства и (4.10)–(4.12) получается асимптотическая зависимость

$$2P = -R^2 + O(x^\gamma), \quad \gamma = \min\left(\frac{R}{2} + 1, 1\right)$$

при $x \rightarrow 0$, $R > -2$. (Если $R = -2$, то остаточный член в этой формуле следует заменить на $O(|\ln x|^{-1})$.)

Ввиду осесимметричности движения вектор завихренности Ω имеет единственную ненулевую составляющую Ω — проекцию Ω на ось φ цилиндрической системы координат r, φ, z . На основании известных формул для $\Omega = \text{rot } v$ [4] находим

$$\Omega = \frac{1}{s} \left[\frac{\partial (sv_\lambda)}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial \lambda} \right]$$

Подставляя сюда выражения (1.1) для v_s, v_λ и учитывая, что вследствие (1.2) $v_s = -vV'/2s$, преобразуем выражение для Ω к более простой форме

$$\Omega = v \sqrt{x(1-x)} V''/2s^2 \quad (4.16)$$

Из (4.16) и (1.6) вытекает, что на свободной границе ($x = 1/2$) завихренность обращается в нуль. Поведение завихренности вблизи оси симметрии ($x = 0$) существенно зависит от числа Рейнольдса. Используя полученные выше результаты об асимптотике функции V при малых x , приходим к следующему заключению. Функция Ω ограничена в точках полуоси $r = 0, z < 0$, если $R \geq 1$, и неограниченно возрастает при приближении к ней, если $-2 \leq R < 1, R \neq 0$. К вопросу о распределении завихренности при больших положительных значениях R мы еще вернемся в следующем разделе.

5. Асимптотика решения при больших числах Рейнольдса. Ниже изучается поведение решения $V(x)$ задачи (1.5), (1.8), (1.9) при $R \rightarrow \infty$. Для этого достаточно исследовать асимптотику при больших R решения $u(x)$ задачи Коши (3.2) для линейного уравнения (4.7), поскольку искомая функция V определяется через u по формулам (2.3), (2.1).

Для построения асимптотики решений уравнения (4.7) при $R \rightarrow \infty$ применим к нему преобразование типа Лиувилля. Введем новые переменные

$$\tau = \psi(x), \quad F = (\psi')^{1/2} u \quad (5.1)$$

где функция ψ определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{\sqrt{1 - 2x + 2x^2}}{x(1-x)}$$

нормированное условием $\psi(1/2) = 1$. Это решение дается формулой

$$\psi = \frac{x(\sqrt{1 - 2x + 2x^2} + x)}{(1-x)(\sqrt{1 - 2x + 2x^2} + 1 - x)} [\sqrt{2(1 - 2x + 2x^2)} + 2x - 1]^{-1/2} \quad (5.2)$$

Отметим, что ψ — аналитическая функция x при $|x| \leq 1/2$, $\psi' > 0$ для $x \in [0, 1/2]$

$$\psi = (\sqrt{2} + 1)^{1/2} x + O(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0$$

Уравнение (4.7) при замене (5.1) переходит в следующее:

$$\ddot{F} + \left[-\frac{R(R+4)}{16\tau^2} + \Psi(\tau) \right] F = 0 \quad (5.3)$$

где точка означает дифференцирование по τ и

$$\Psi(\tau) = \frac{\psi'''}{2\psi^2} - \frac{3\psi''}{4\psi'^4}$$

(правая часть здесь рассматривается как функция τ). Функция $\Psi(\tau)$ аналитична при $|\tau| \leq 1$. Из (3.2), (5.1), (5.2) следуют начальные условия для $F(\tau)$

$$\tau = 1: F = 2^{3/4}, \quad \dot{F} = 2^{3/4} \quad (5.4)$$

Прямые вычисления показывают, что уравнение (5.3) имеет формальные решения вида

$$F_1^* = \tau^{-R/4} \sum_{k=0}^{\infty} R^{-k} f_k^{(1)}(\tau)$$

$$F_2^* = \tau^{R/4+1} \sum_{k=0}^{\infty} R^{-k} f_k^{(2)}(\tau)$$

где $f_0^{(1)} = f_0^{(2)} = 1$, а функции $f_{k+1}^{(1)}, f_{k+1}^{(2)}$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ определяются из рекуррентных соотношений

$$f_{k+1}^{(1)}(\tau) = 2 \int_0^1 t [\ddot{f}_k^{(1)}(t) + \Psi(t) f_k^{(1)}(t)] dt$$

$$f_{k+1}^{(2)}(\tau) = -2 \int_0^1 \{t [\ddot{f}_k^{(2)}(t) + \Psi(t) f_k^{(2)}(t)] + \dot{f}_k^{(2)}(t)\} dt$$

Предложение 3. Существуют решения $F_1 = \tau^{-R/4}\Phi_1$, $F_2 = \tau^{R/4+1}\Phi_2$ уравнения (5.3), такие, что формальные ряды $\tau^{R/4}F_1^*$, $\tau^{-R/4-1}F_2^*$ являются асимптотическими разложениями при $R \rightarrow \infty$, $0 \leq \tau \leq 1$ функций Φ_1 , Φ_2 соответственно.

Данное утверждение следует из более общего результата работы [6], в которой изучается линейное обыкновенное уравнение второго порядка с большим параметром и регулярной особой точкой.

Определим постоянные $A_1(R)$, $A_2(R)$ так, чтобы решение $A_1F_1 + A_2F_2$ уравнения (5.3) удовлетворяло условиям (5.4). Ограничиваясь главными членами разложений A_1 , A_2 при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$A_1 = 2^{-1/4} [1 + O(R^{-1})], \quad A_2 = 2^{-1/4} [1 + O(R^{-1})]$$

С помощью предложения 3 отсюда и из (5.1), (2.3), (2.1) находим асимптотику функции V при $R \rightarrow \infty$

$$V = R \sqrt{1 - 2x + 2x^2} \frac{1 - [\psi(x)]^{R/2+1}}{1 + [\psi(x)]^{R/2+1}} + O(1) \quad (5.5)$$

Остаточный член в (5.5) равномерно ограничен для $0 \leq x \leq 1/2$.

В области $0 \leq x \leq 1/2 - R^{-1} \ln(R/\delta)$, где $\delta > 0$ — постоянная, асимптотика V упрощается

$$V = R \sqrt{1 - 2x + 2x^2} + O(1) \quad (5.6)$$

когда $R \rightarrow \infty$. Асимптотические зависимости функций V' , V'' при больших R могут быть получены формальным дифференцированием соотношения (5.6). Это утверждение следует из предложения 3. С его помощью мы можем получить асимптотику завихренности Ω при $R \rightarrow \infty$.

Согласно (4.16) и (5.6), имеем

$$\Omega = \frac{v}{2s^2} \sqrt{x(1-x)} [R(1-2x+2x^2)^{-3/2} + O(1)] \quad (5.7)$$

вне области примыкающего к свободной поверхности пограничного слоя, угловой размер которого при больших R есть $R^{-1} \ln R$. При фиксированном s с увеличением x от нуля до величины $1/2 - R^{-1} \ln R$ функция Ω увеличивается от нуля до значения, близкого к $2^{-1/2} v R s^{-1}$. Максимальное значение Ω достигается вблизи свободной границы, в то время как на самой границе $\Omega = 0$.

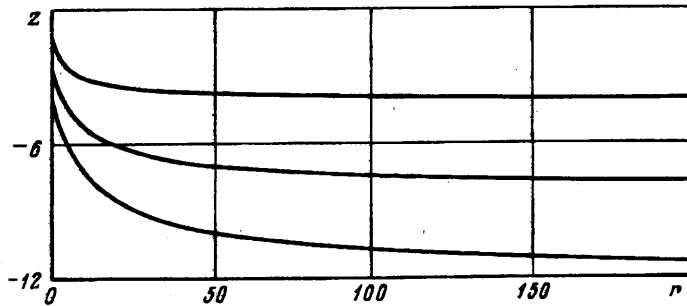
6. Результаты расчетов. Задача (1.5), (1.8), (1.9) решалась численно при различных значениях параметра R . Качественные свойства ее решения различны для случаев $R > 0$ и $R < 0$, в то время как внутри каждого из промежутков $R > 0$ и $-2 \leq R < 0$ эти отличия не столь существенны. Поэтому ограничимся демонстрацией графиков функции $V(x)$ и картины линий тока для двух значений числа Рейнольдса: $-1,99$ и 15 .

На фиг. 2 сплошной кривой показан вид функции V при $R = -1,99$, а штриховой — ее производной. Линии тока соответствующего течения изображены на фиг. 3. Ввиду автомодельности движения все линии тока подобны. Параметрические уравнения линий тока вследствие (1.1), (1.2) имеют вид

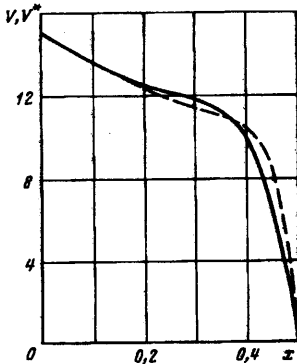
$$r = \frac{2a \sqrt{x(1-x)}}{V(x)}, \quad z = -\frac{a(1-2x)}{V(x)}$$

Здесь a — масштабный коэффициент, причем $a > 0$, если $R > 0$, и $a < 0$, если $R < 0$.

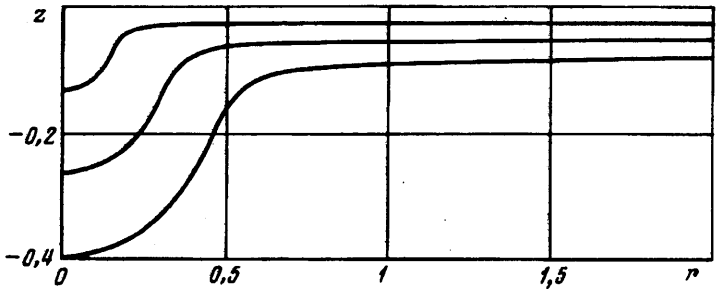
Фигура 4 демонстрирует поведение функции V (сплошная кривая) и функции V^* (штрихпунктирная кривая) при $R = 15$. Функция V^* определяется как первый член в правой части равенства (5.5), в котором $\psi(x)$ дается формулой (5.2). Эту функцию естественно называть приближенным решением задачи при больших



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

R . Картина линий тока течения, соответствующего значению $R = 15$, показана на фиг. 5.

7. **Заключительные замечания.** Интересно сравнить изложенные выше результаты с результатами исследования задачи о взаимодействии линейного источника с твердой плоскостью, полученными в [1, 3].

В [1] обнаружено существование автомодельного решения, обладающего свойством аналитичности в точке $x = 0$, при всех $R < R_* \approx 0,847$. Аналитическое решение единственно, если $R \leq 0$. В диапазоне $0 < R < R_*$ имеется два аналитических решения с существенно различными качественными свойствами. Авторы работы [3], отказавшись от требования аналитичности решения, установили разрешимость поставленной в [1] задачи при любых $R > 0$. Таким образом, автомодельные решения задачи о взаимодействии распределенного источника или стока с твердой плоскостью существуют для любых значений R — как положительных, так и отрицательных. При этом в интервале $(0, R_*)$ существуют три решения данной задачи.

Замена твердой плоскости свободной поверхностью радикально меняет ситуацию. Как установлено выше, решение задачи (1.5), (1.8), (1.9) существует лишь при $R \geq -2$ и является единственным при фиксированном R . Аналитические в точке $x = 0$ решения указанной задачи существуют лишь для трех положительных значений параметра R (см. разд. 4). Неаналитические решения имеют сильную особенность в нуле при $R \in [-2, 0)$ и слабую — при $R > 0$, причем с ростом R эта особенность перемещается в производные функции $V(x)$ все более высокого порядка.

Свойства гладкости в зависимости от параметра R неаналитических решениях обсуждаемой задачи и той, что рассмотрена в [1, 3], вполне аналогичны. С другой стороны, имеются значительные различия в поведении решений обеих задач при $R \rightarrow \infty$. Пограничный слой в задаче (1.5), (1.8), (1.9) имеет при больших R толщину порядка $R^{-1} \ln R$, в то время как в задаче, изученной в [3], его толщина пропорциональна $R^{-2/3}$.

Для обоих решений характерно, что в ядре течения (т. е. вне пограничного слоя) как радиальная, так и азимутальная компоненты безразмерной скорости имеют порядок R при $R \rightarrow \infty$. Однако при приближении к твердой стенке радиальная скорость ввиду условия прилипания уменьшается до нуля. В случае же свободной поверхности происходит стремительный рост радиальной скорости в пограничном слое. На самой поверхности, согласно (1.2), (1.5), (1.8) и (3.1), имеем $U(1/2) = R(R+4)/4$, что соответствует размерному значению $v_r = Q(Q + 8\pi\nu)/16\pi\nu r$ (Q — линейная плотность источников). Таким образом, при $\nu \rightarrow 0$ компонента скорости v_r на свободной границе неограниченно растет. В то же время в ядре течения в соответствии с (5.6), (1.1), (1.2) и определением числа Рейнольдса $R = Q/2\pi\nu$ обе компоненты скорости v_r и v_θ имеют конечный предел, когда $\nu \rightarrow 0$.

Примечательным является тот факт, что в любом конусе с осью z и углом раствора, меньшим π , завихренность Ω также стремится к ненулевому пределу при $\nu \rightarrow 0$. Действительно, зафиксировав в (5.7) интервал изменения x , $0 \leq x \leq b < 1/2$, и вспоминая, что $\nu R = Q/2\pi$, получаем

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Omega = \frac{Q}{4\pi\nu^2} \sqrt{x(1-x)} (1 - 2x + 2x^2)^{-3/2}$$

равномерно по $x \in [0, b]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17335). Автор благодарит Г. Б. Волкову за помощь при проведении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубинский А. А., Сычев В. В. Об одном автомодельном решении уравнений Навье — Стокса // Уч. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 6. С. 11—17.
2. Слезкин Н. А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Уч. зап. МГУ. 1934. Вып. 2. С. 89—90.
3. Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
6. Cashwell E. D. The asymptotic solutions of an ordinary differential equation in which the coefficient of the parameter is singular // Pacific J. Math. 1951. V. 1. № 2. P. 337—352.

Новосибирск

Поступила в редакцию
19.1.1995