

УДК 532.51.013.4:536.24

© 1996 г. Н. И. ЛОВОВ, Д. В. ЛЮБИМОВ, Т. П. ЛЮБИМОВА

## КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СЛОЕВ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

Рассмотрена конвективная устойчивость равновесия системы двух несмешивающихся жидкостей с близкими плотностями. Построено обобщенное приближение Буссинеска, позволяющее корректно учитывать деформации поверхности раздела. Исследована устойчивость равновесия системы двух жидкостей в горизонтальном слое при вертикальном градиенте температуры. Обнаружено существование нескольких механизмов неустойчивости: длинноволновых и ячеистых монотонных возмущений и колебательных возмущений. Изучено влияние деформируемости границы на характеристики неустойчивости. Показано, что увеличение деформируемости приводит к смене механизмов неустойчивости.

Важный класс задач теории конвективной устойчивости — задачи, возникающие при исследовании двухслойных систем. Большинство этих исследований проводится в предположении о недеформируемости границы раздела (см., например, [1—3]). Для многих ситуаций указанное предположение вполне оправдано, поскольку при значениях ускорения свободного падения, характерных для земных условий, и достаточно сильно различающихся плотностях жидкостей влияние деформируемости границы раздела на конвективную устойчивость мало. В то же время предположение о недеформируемости границы сильно упрощает процедуру получения решения задачи. Учет влияния деформируемости границы принципиально важен с точки зрения исследования новых механизмов неустойчивости. Рассмотрение конвективной устойчивости с учетом деформируемости границы в рамках приближения Буссинеска проводилось ранее в ряде работ (см., например, [4—7]). Однако предположение о деформируемости границы входит в противоречие со стандартным приближением Буссинеска (см., например, анализ в [8]) и может привести к физически некорректным результатам.

Целью настоящей работы является построение более корректного приближения.

1. Обобщенное приближение Буссинеска. Рассмотрим гравитационную тепловую конвекцию в системе двух несмешивающихся жидкостей с деформируемой поверхностью раздела. Запишем уравнения движения жидкости и уравнение теплопроводности, считая, что плотность является функцией лишь температуры («жидкость Буссинеска»), и предполагая постоянными коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности

$$\rho_j \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \rho_j (\mathbf{v}_j \nabla) \mathbf{v}_j = -\nabla p_j + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j - \rho_j g \mathbf{y} \quad (1.1)$$

$$\rho_j c_{pj} \left[ \frac{\partial T_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \nabla) T_j \right] = \kappa_j \Delta T_j \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \text{div} (\rho_j \mathbf{v}_j) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь приняты стандартные обозначения,  $\mathbf{y}$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх. Индекс  $j$  нумерует жидкости, 1-я жидкость расположена

внизу. На поверхности раздела  $z = \zeta(x, y, t)$  ( $z$  — вертикальная декартова координата) требуем выполнения обычных условий непрерывности скорости, нормальных и тангенциальных напряжений, температуры и теплового потока, а также кинематического условия

$$[v] = 0, \quad -[p]n + [\sigma]n = \alpha Kn \quad (1.4)$$

$$[T] = 0, \quad [\kappa \nabla T]n = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (v \nabla) \zeta = v \nu$$

Здесь  $[f]$  — скачок величины  $f$  на поверхности раздела, т. е.  $[f] = f_1 - f_2$ ;  $\sigma$  — тензор вязких напряжений,  $n$  — вектор нормали к поверхности раздела жидкостей,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $K$  — кривизна поверхности.

Задача (1.1) — (1.4), дополненная соответствующими условиями на внешних границах, характеризуется рядом безразмерных параметров, из которых сейчас отметим параметр неоднородности плотности  $\beta_* \theta$  и параметр, характеризующий силу тяжести  $Ga = gL^3/\nu_*^2$ . Здесь  $\beta_*$  — характерное значение коэффициента объемного расширения  $\beta = -(1/\rho) dp/dt$ ;  $\theta$  — характерная разность температур;  $\nu_*$  — характерное значение коэффициента кинематической вязкости,  $L$  — характерный размер.

Как правило, при исследовании проблем конвекции используется приближение Буссинеска [9], которое заключается в пренебрежении зависимостью плотности от температуры всюду, кроме слагаемого с силой тяжести в уравнении движения (1.1). С формальной точки зрения, это означает совершение предельного перехода  $\beta_* \theta \rightarrow 0$  и  $Ga \rightarrow \infty$ , причем произведение  $\beta_* \theta Ga$  остается конечным.

Такой предельный переход приводит, вообще говоря, к требованию недеформируемости поверхности раздела. Действительно, при этом переходе главные слагаемые в уравнении движения (1.1) определяют гидростатическое давление

$$p_j = -\rho_j gz + \text{const}$$

Тогда главные части в условии баланса нормальных напряжений дадут  $[p]g\zeta = \text{const}$ . Это означает, что поверхность раздела остается плоской и горизонтальной. Из кинематического условия при этом следует, что на границе раздела  $v \nu = 0$ , т. е. выполняется условие непроницаемости.

В следующем порядке по  $1/Ga$  и  $\beta_* \theta$  уравнения движения и теплопроводности превращаются в обычные уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + (v_j \nabla) v_j = -\frac{1}{\rho_{0j}} \nabla p_j + \nu_j \Delta v_j + g \beta_j T_j \gamma \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + (v_j \nabla) T_j = \kappa_j \Delta T_j, \quad \text{div } v_j = 0 \quad (1.6)$$

Здесь  $p_j$  — добавка к гидростатическому давлению, начало отсчета температуры выбрано так, что  $\rho_{0j}$  — плотность  $j$ -ой жидкости при  $T = 0$ .

В следующем порядке по  $1/Ga$  из условия баланса напряжений может быть найдена форма возмущений границы раздела, однако это не будет влиять на решение конвективной задачи (1.5) — (1.6). Таким образом, в традиционном приближении Буссинеска отсутствует влияние деформации границы раздела на конвективное движение.

Физический смысл этого результата прост: при большой силе тяжести и конечной разности плотностей гравитационные силы гасят возмущения горизонтальной поверхности раздела. Этот вывод не имеет места при малой разности плотностей жидкостей. Следует ожидать, что в случае, когда разность

плотностей жидкостей сравнима с перепадом плотности вследствие неизотермичности, поверхность раздела будет сильно деформироваться и эти деформации будут оказывать сильное влияние на конвективные явления.

Отсюда ясно, каким должен быть способ обобщения приближения Буссинеска на случай деформируемой поверхности раздела. Одновременно с предельным переходом  $Ga \rightarrow \infty$  нужно устремить к нулю не только  $\beta_*\theta$ , т. е. относительную температурную неоднородность плотности, но и относительную разность плотностей жидкостей

$$\varepsilon = (\rho_{01} - \rho_{02}) / (\rho_{01} + \rho_{02}) \quad (1.7)$$

При таком предельном переходе должны оставаться конечными произведения  $Ga \beta_*\theta$  и  $Ga \varepsilon$ . Использование же уравнений свободной конвекции сжимаемой жидкости не представляется целесообразным ввиду их громоздкости. Кроме того, они содержат не относящиеся к сути дела явления и не позволяют эффективно исследовать многие практически важные задачи.

В результате описанной выше процедуры предельного перехода получаются уравнения тепловой конвекции, совпадающие с уравнениями (1.5)—(1.6) с тем, однако, отличием, что теперь в (1.5)  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$ .

Граничные условия (1.4) сохраняются, за исключением условия баланса напряжений на границе раздела, которое принимает следующий вид:

$$- [p] n + [\sigma] n + [\rho] g \zeta n = \alpha K n \quad (1.8)$$

Таким образом, разность плотностей  $\rho_{01} - \rho_{02}$  учитывается в задаче в единственном месте — в слагаемом, содержащем силу тяжести в условии (1.8).

2. Устойчивость конвективного равновесия двухслойной системы. Рассмотрим систему двух несмешивающихся жидкостей, ограниченную двумя горизонтальными твердыми поверхностями  $z = \pm h$ . Границы поддерживаются при постоянных разных температурах  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Сформулированные выше уравнения конвекции и граничные условия на поверхности раздела допускают стационарное решение, соответствующее механическому равновесию жидкостей с плоской горизонтальной границей раздела. Будем считать, что жидкости занимают равные доли объема системы, так что в равновесии  $\zeta = 0$ . При этом распределения температуры в слоях имеют теплопроводный характер:

$$T_1 = \theta_1 + (h + z) A_1, \quad T_2 = \theta_2 + (h - z) A_2 \quad (2.1)$$

$$A_1 = \kappa_2 (\theta_2 - \theta_1) / [h (\kappa_1 + \kappa_2)], \quad A_2 = \kappa_1 (\theta_2 - \theta_1) / [h (\kappa_1 + \kappa_2)]$$

а скорость  $v_j = 0$ .

Сформулируем задачу об устойчивости механического равновесия относительно малых возмущений. Линеаризуя полную задачу, получим для возмущений скорости, температуры и давления в каждой из жидкостей следующую краевую задачу:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial v_j}{\partial t} = - \nabla p_j + \nu_j \Delta v_j + Ra \beta_j T_j \gamma \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \chi_j \Delta T_j + A_j \nu_j \gamma, \quad \text{div } v_j = 0$$

$$z = \pm 1: v = 0, \quad T = 0 \quad (2.3)$$

$$z = 0: v_1 = v_2, \quad -A_1 \zeta + T_1 = -A_2 \zeta + T_2$$

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}, \quad \nu_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = \nu_2 \frac{\partial v_{2z}}{\partial z}$$

$$-(p_1 - p_2) - Ga \zeta + 2 \left( v_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - v_2 \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right) = Ga \Delta_2 \zeta$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v \gamma$$

Здесь  $\Delta_2$  — оператор Лапласа в переменных  $x, y$ . Соотношения (2.2)—(2.3) приведены в безразмерной форме. Используются следующие единицы измерения: расстояния —  $h$ , времени —  $h^2/\chi_*$ , скорости —  $\chi_*/h$ , давления —  $\chi_* v_* \rho_0/h^2$ , температуры —  $\Theta = (\Theta_1 - \Theta_2)/2$ . В качестве единиц измерения коэффициентов кинематической вязкости  $\nu_*$ , температуропроводности  $\chi_*$ , теплопроводности  $\kappa_*$ , теплового расширения  $\beta_*$ , равновесных градиентов температуры  $A_*$  приняты их средние арифметические значения.

Краевая задача (2.2)—(2.3) содержит следующие безразмерные параметры: число Прандтля  $Pr$ , число Релея  $Ra$ , параметр капиллярности  $Ca$ , число Галилея  $Ga$ :

$$Pr = \frac{\nu_*}{\chi_*}, Ra = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu_*\chi_*}, Ca = \frac{\alpha h}{\nu_*\chi_*\rho_0}, Ga = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gh^3}{\eta_*\chi_*}$$

Число  $Ga$  определено так, что положительное значение соответствует случаю, когда более тяжелая жидкость расположена сверху — потенциально неустойчивая стратификация.

При таком выборе единиц измерения выполняются соотношения

$$v_1 + v_2 = 2, \beta_1 + \beta_2 = 2, \chi_1 + \chi_2 = 2; \kappa_1 + \kappa_2 = 2, A_1 + A_2 = 2, A_1\kappa_1 = A_2\kappa_2$$

Таким образом, задача характеризуется семью независимыми безразмерными параметрами; в случае фиксированных параметров жидкости остаются три независимых параметра:  $Ra, Ga, Ca$ .

Рассмотрим нормальные возмущения, пропорциональные  $\exp(\lambda t + ikr)$ , где  $\lambda$  — инкремент,  $k$  — волновой вектор. Для амплитуд нормальных возмущений получаем спектральную краевую задачу

$$\frac{\lambda}{Pr} u_j = -ikq_j + \nu_j Du_j \quad (2.4)$$

$$\frac{\lambda}{Pr} w_j = -q_j' + \nu_j Dw_j + Ra \beta_j \theta_j$$

$$\lambda \theta_j = \chi_j D \theta_j + A_j w_j, w_j' + iku_j = 0$$

$$z = \pm 1: u_j = w_j = 0, \theta_j = 0 \quad (2.5)$$

$$z = 0: u_1 = u_2, w_1 = w_2 = \lambda \zeta$$

$$\theta_1 - A_1 \zeta = \theta_2 - A_2 \zeta, \kappa_1 \theta_1' = \kappa_2 \theta_2', \nu_1 u_1' = \nu_2 u_2'$$

$$-(q_1 - q_2) - Ga \zeta + 2(v_1 w_1' - v_2 w_2') = -Ca k^2 \zeta$$

Здесь введены следующие обозначения для амплитуд нормальных возмущений:  $u$  — проекции скорости на направление волнового вектора,  $w$  — вертикальной компоненты скорости,  $\theta$  — температуры,  $q$  — давления. Штрихом обозначено дифференцирование по координате  $z$ ,  $D = d^2/dz^2 - k^2$ . Собственными числами спектральной задачи (2.4)—(2.5) являются инкременты  $\lambda$  как функции параметров задачи и волнового числа  $k$ .

3. Длинноволновая неустойчивость равновесия. Задача (2.4)—(2.5) не допускает аналитического решения при произвольных значениях параметров. Однако имеется важный частный случай, допускающий достаточно полное аналитическое исследование — длинноволновые возмущения.

При  $k=0$  задача имеет решение, описывающее нейтральные монотонные возмущения, соответствующие сдвигу горизонтальной границы раздела как целого вдоль вертикальной координаты:

$$u_j = 0, w_j = 0, \theta_j = (\kappa_2 - \kappa_1) A_j \zeta (z - (-1))/2 \quad (2.6)$$

Можно убедиться, что все остальные возмущения при  $k=0$  являются затухающими. При переходе к отличным от нуля (малым) волновым числам нейтральность возмущений, вообще говоря, нарушается. Представим решение спектральной задачи (2.4)—(2.5) в виде рядов по малому  $k$

$$\lambda = k\lambda_1 + k^2\lambda_2 + \dots$$

$$u_j = ku_{1j} + k^2u_{2j} + \dots, w_j = kw_{1j} + k^2w_{2j} + \dots$$

$$\theta_j = \theta_{0j} + k\theta_{1j} + \dots, \zeta = \zeta_0 + k\zeta_1 + \dots$$

Вычисления показывают, что  $\lambda_1 = 0$ , а для  $\lambda_2$  получается выражение

$$\lambda_2 = \frac{12 [\nu] + 56 [\kappa] - 56 [\beta] - 3 [\kappa] [\beta] [\nu]}{480 (16 - 3 [\nu]^2)} [\kappa] Ra + \frac{2 Ga}{3 (16 - 3 [\nu]^2)} \quad (2.7)$$

Поправка к инкременту  $\lambda_2$  зависит линейно от числа Релея  $Ra$  и числа Галилея  $Ga$  и более сложно — от отношения вязкостей  $\nu_1/\nu_2$ , теплопроводностей  $\kappa_1/\kappa_2$  и коэффициентов объемного расширения  $\beta_1/\beta_2$ . Число Прандтля  $Pr$ , параметр капиллярности  $Ca$ , температуропроводности жидкостей  $\chi_1$  и  $\chi_2$  не влияют на устойчивость системы относительно длинноволновых возмущений. Коэффициент при  $Ga$  положителен, т. е., как и должно быть, превышение плотности нижней жидкости над плотностью верхней является стабилизирующим фактором. При одинаковых теплопроводностях жидкостей длинноволновая неустойчивость отсутствует (при  $Ga < 0$ ); возможно, это обусловлено тем, что механизм неустойчивости связан с различием градиентов температуры в разных жидкостях. В частном случае одинаковых вязкостей имеем

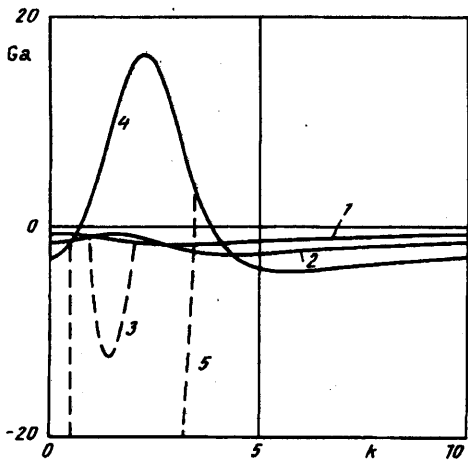
$$\lambda_2 = 7 Ra [\kappa] ([\kappa] - [\beta])/960 + Ga/24 \quad (2.8)$$

Длинноволновая неустойчивость может иметь место как при подогреве снизу, так и при подогреве сверху в зависимости от соотношения коэффициентов теплопроводности и объемного расширения.

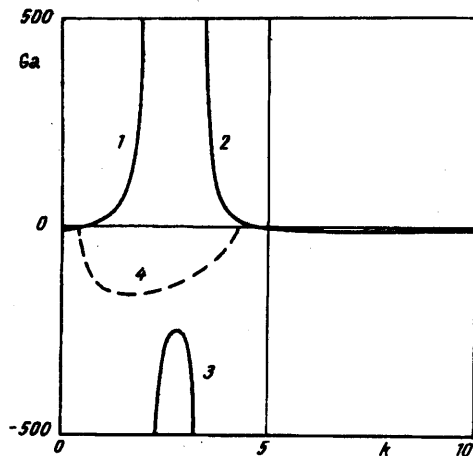
Выражение для инкремента (2.7) определяет границу длинноволновой неустойчивости на плоскости число Галилея  $Ga$  — число Релея  $Ra$ . Эта граница суть прямая линия, проходящая через начало координат; область неустойчивости расположена правее границы (при больших  $Ga$ ). Левее этой границы длинноволновые возмущения затухают, однако вполне могут оказаться нарастающими ячеистые возмущения с конечной длиной волны.

4. Неустойчивость относительно ячеистых возмущений. Исследование неустойчивости при конечных волновых числах требует численных расчетов. Для анализа краевой задачи (2.4)—(2.5) строили систему независимых частных решений, удовлетворяющих условиям на твердых границах  $z = \pm 1$ . Требование выполнения граничных условий на поверхности раздела сред приводит к характеристическому соотношению, которое позволяет определить границы устойчивости системы.

Подробные расчеты в полной постановке были проведены для системы жидкостей муравьиная кислота — трансформаторное масло. Устойчивость такой двухслойной системы исследована ранее в [3] в предположении недеформируемости границы раздела. Параметры этой системы таковы:  $[\kappa] = -0,838$ ,  $[\chi] = -0,334$ ,  $[\nu] = 1,756$ ,  $[\beta] = -0,393$ . Значение числа Прандтля для данной пары жидкостей составляет 176. Краевая задача (2.4)—(2.5) решалась численно методом дифференциальной прогонки.



Фиг. 1. Нейтральные кривые  $Ga(k)$  при  $Ca = 0$ : 1 —  $Ra = 50$ ; 2, 3 —  $Ra = 100$ ; 4, 5 —  $Ra = 200$ . Области устойчивости расположены выше нейтральных кривых



Фиг. 2. Нейтральные кривые  $Ga(k)$  при  $Ca = 0$ ,  $Ra = 300$ : 1—3 — относительно монотонных, 4 — колебательных возмущений. Области неустойчивости выше кривых 1, 2 и ниже 3

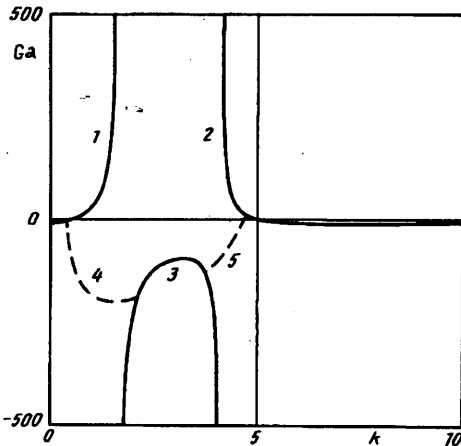
На фиг. 1—3 приведены нейтральные кривые  $Ga(k)$  для параметра капиллярности  $Ca = 0$  и различных значений числа Релея. Из структуры общего дисперсионного соотношения следует, что нейтральные кривые монотонной неустойчивости  $Ga(k)$  однозначны. На фиг. 1 показаны нейтральные кривые  $Ga(k)$  для  $Ra = 50$  (кривая 1), 100 (кривые 2, 3), 200 (кривые 4, 5). Кривая 1 показывает границу устойчивости относительно монотонных ячеистых возмущений. Область неустойчивости расположена выше нейтральной кривой.

С увеличением числа Релея локальный максимум на кривой  $Ga(k)$  при  $k = 0$  сменяется минимумом, но длинноволновые возмущения остаются при этом менее опасными, чем ячеистые (сплошные линии 2, 4 на фиг. 1). В окрестности локального максимума кривой  $Ga(k)$  появляется область колебательной неустойчивости (штриховые линии 3, 5). С ростом  $Ra$  минимумы этих кривых быстро опускаются на плоскости  $Ga - k$ , так что колебательные возмущения становятся более опасными, чем монотонные. При дальнейшем увеличении  $Ra$  бесконечность. При больших  $Ra$  на нейтральной кривой имеются два разрыва.

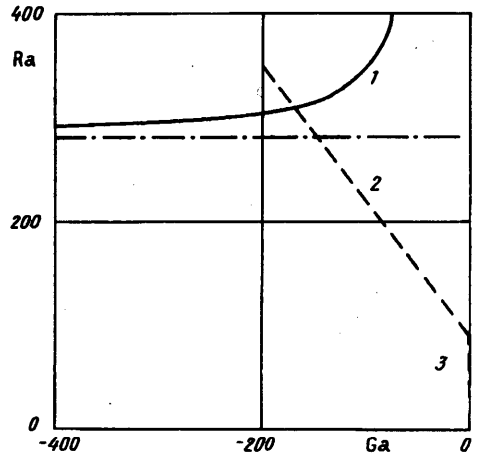
На фиг. 2 приведены нейтральные кривые  $Ga(k)$  при  $Ra = 300$ . Кривые 1—3 показывают положение границ устойчивости относительно монотонных возмущений. Области неустойчивости расположены выше кривых 1 и 2 и ниже кривой 3. Нейтральная кривая колебательных возмущений (линия 4) соединяет нейтральные кривые монотонных возмущений. При данном  $Ra$  интервал значений  $Ga$ , при которых все возмущения затухают, ограничен как сверху, так и снизу.

При дальнейшем увеличении  $Ra$  (фиг. 3) интервал устойчивости исчезает, равновесие неустойчиво при всех значениях числа  $Ga$ . При этом происходит пересечение нейтральных кривых: нейтральная кривая колебательных возмущений (линии 4, 5) состоит из двух компонент связности, соединяющих кривые 1, 3 и 2, 3. Приведенные нейтральные кривые соответствуют  $Ra = 350$ .

На фиг. 4 приведена карта устойчивости на плоскости  $Ga - Ra$  для параметра капиллярности  $Ca$ , равного нулю. Приведены границы устойчивости по отношению к наиболее опасным монотонным (сплошные линии) и колебательным (штриховая линия) возмущениям. Кривая 1 является границей устойчивости по отношению к ячеистым монотонным возмущениям с конечными  $k$ . С увеличением  $|Ga|$  кривая 1 выходит на горизонтальную асимптоту  $Ra \approx 282$  (штрихпунктирная линия на фиг. 4). При этом волновое число наиболее опасных возмущений стремится к  $k \approx 2,7$ . Напомним, что случай больших  $|Ga|$  соответствует недеформируемой границе раздела. Указанное выше асимптотическое значение  $Ra$



Фиг. 3. Нейтральные кривые  $Ga(k)$  при  $Ca = -0$ ,  $Ra = 350$ : 1—3 — относительно монотонных, 4, 5 — колебательных возмущений



Фиг. 4. Карта устойчивости на плоскости  $Ga$ ,  $Ra$  при  $Ca = 0$ . Границы устойчивости к монотонным возмущениям — сплошные кривые, к колебательным — штриховые

находится в хорошем согласии с результатами работы [3]. Механизм неустойчивости, по-видимому, на всей кривой 1 такой же, как и в случае недеформируемой границы раздела [3]. Любопытным представляется увеличение критического числа  $Ra$  при уменьшении  $|Ga|$  (при увеличении деформируемости поверхности раздела).

В области малых  $|Ga|$  наиболее опасны возмущения иной природы — бегущие волны. Критические числа  $Ra$  убывают с уменьшением  $|Ga|$  (кривая 2 ограничивает область неустойчивости сверху). Фазовая скорость бегущих возмущений оказывается на несколько порядков меньше фазовой скорости гравитационных волн на поверхности раздела.

В области  $|Ga| < 2$  наиболее опасны снова монотонные возмущения. Соответствующая граница устойчивости на плоскости  $Ga - Ra$  является практически прямолинейной (кривая 3), проходит через начало координат и в масштабе фиг. 4 сливается с осью  $Ra$ . Ее угловой коэффициент приблизительно равен  $-38,8$ .

При подогреве сверху ( $Ra < 0$ ) область устойчивости ограничена справа осью  $Ra$ . Этот результат выглядит тривиальным: если верхняя жидкость легче ( $Ga < 0$ ), то во всем объеме стратификация потенциально устойчивая. При  $Ga > 0$  имеет место обычная неустойчивость Релея — Тейлора, при этом длина волны наиболее опасных возмущений оказывается очень малой. Причина этого очевидна — при малых  $Ga$  и нагреве сверху неустойчивая стратификация возможна в малой области вблизи поверхности раздела сред, что навязывает пространственный масштаб нарастающих возмущений. При  $Ga \rightarrow 0$  длина волны наиболее опасных возмущений стремится к нулю.

Перейдем к обсуждению влияния капиллярности на устойчивость равновесия. Структура краевой задачи об устойчивости равновесия такова, что параметр капиллярности входит только в граничные условия, причем в комбинации  $Ga - k^2 Ga$ . Отсюда понятно, как будут меняться нейтральные кривые  $Ga(k)$  при увеличении параметра капиллярности: критическое число Галилея будет увеличиваться, причем тем быстрее, чем больше волновое число.

При любом  $Ra$  при достаточно больших капиллярностях наиболее опасными будут длинноволновые возмущения, для которых минимальное критическое число Релея определяется простым соотношением:  $Ra \approx -68,15 Ga$ .

При промежуточных значениях параметра капиллярности порядок смены наиболее опасных возмущений определяется числом Релея. При  $Ra < 80$  колебательная неустойчивость отсутствует и при некотором критическом значении

капиллярности происходит смена неустойчивости относительно ячеистых возмущений длинноволновой неустойчивостью. Так, как видно из фиг. 1, при  $Ra = 50$  эта смена происходит при  $Ca \approx 9$ . При больших значениях  $Ra$ , когда имеется колебательная неустойчивость, она также сменяется длинноволновой монотонной неустойчивостью.

При  $Ra > 282$ , когда при  $Ca = 0$  возникает разрыв на нейтральной кривой (см. фиг. 2), увеличение капиллярности приводит к исчезновению интервала устойчивости, т. е. неустойчивость будет наблюдаться при всех значениях  $Ca$ .

Для реальных сред и реальных лабораторных условий параметр капиллярности обычно достаточно велик, поэтому следует ожидать, что область устойчивости на диаграмме  $Ca - Ra$  будет ограничена двумя прямыми:  $Ra = 282$  и  $Ra = -68,15 Ca$ . Численные расчеты, проведенные при  $Ca = 10^5$ , подтверждают этот вывод.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16412).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский Э. И., Перельман Т. Л., Ромашко Е. А. О конвективной неустойчивости в системе двух неограниченных горизонтальных слоев несмешиваемых жидкостей//Инж.-физ. журн. 1974. Т. 27. № 6. С. 1098—1108.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О неустойчивости равновесия системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при нагреве сверху//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 28—34.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу//Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 302—305.
4. Davis S. H., Homsy G. M. Energy stability theory for free-surface problems: buoyancy-thermocapillary layers//J. Fluid Mech. 1980. V. 98. Pt. 3. P. 527—553.
5. Изаkson В. Х., Юдович В. И. О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей//Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 4. С. 23—28.
6. Renardy Y., Joseph D. D. Oscillatory instability in a Bénard problem of two fluids//Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 3. P. 788—793.
7. Renardy Y., Renardy M. Perturbation analysis of steady and oscillatory onset in a Bénard problem with two similar liquids//Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 9. P. 2699—2708.
8. Непомнящий А. А. О длинноволновой конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях с деформируемой границей//Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1983. С. 25—31.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
5. IX. 1994