МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1996

УДК 533.6.011.72:532.5:013.4

© 1996 г. А. А. БАРМИН, С. А. ЕГОРУШКИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА В ГАЗАХ

(обзор)

Одним из основных свойств сплошных сред, движения которых описываются системами дифференциальных уравнений гиперболического типа, является существование решений, содержащих поверхности сильного разрыва. Хорошо известными примерами такого рода поверхностей являются ударные волны в газовой и магнитной гидродинамике, в твердом теле, детонационные волны и фронты горения, контактные разрывы и т. д. Исследование разрывов проводится по следующей схеме: 1) вывод краевых условий на разрыве из исходной системы дифференциальных уравнений в интегральной форме; 2) проверка выполнения условий эволюционности; 3) решение задачи о структуре разрыва и, в случае необходимости, получение недостающих краевых условий; 4) исследование устойчивости разрыва. Только после получения положительных результатов по всем четырем пунктам можно утверждать, что существование разрыва теоретически обосновано и он может быть использован при построении решений конкретных краевых задач.

В настоящей работе основное внимание будет уделено проблеме устойчивости разрывов, причем весь материал, за исключением общих результатов разд. 1, будет касаться газовых сред и относиться к разрывам, на поверхности которых нормальный поток массы отличен от нуля. Не имея возможности в ограниченных рамках журнальной публикации одинаково подробно осветить все аспекты проблемы устойчивости разрывов, авторы тем не менее надеются продемонстрировать наиболее общие идеи и подходы, которые затем могут быть использованы в исследованиях устойчивости разрывов в различных конкретных моделях сплошных сред.

1. Поверхности сильного разрыва решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа. Их эволюционность и устойчивость. В пространстве $x_1, \ldots, x_n$ рассмотрим систему квазилинейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_\alpha(U)}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

где $U^T = (U_1, \ldots, U_N)$ — вектор-столбец неизвестных функций.

Гиперболичность системы (1.1) означает [1—3], что характеристическая матрица $(\lambda E + n\alpha A_\alpha)$ приводится к диагональной жордановой форме с действительными элементами $\lambda_j = \lambda_j(U, n_\alpha)$, $j = 1, \ldots, N$. Здесь $A_\alpha = V_U F_\alpha$, E — единичная матрица, $n = \{n_\alpha\}$ — единичный вектор, λ_j — корень уравнения $\| \lambda E + n\alpha A_\alpha \| = 0$. Если среди корней λ_j нет кратных, система называется строго гиперболической. Гиперболические системы относятся к классу эволюционных или корректных по Петровскому уравнений [4—5], основным свойством которых является ограниченность скорости роста решений со временем. Этому свойству удовлетворяют все уравнения, описывающие развитие во времени каких-либо физических процессов.

Одним из основных свойств нелинейной системы (1.1) является то, что в случае общего положения ее решения, сколь угодно гладкие в начальный момент времени, довольно быстро теряют гладкость и становятся неоднозначными. Поэтому для построения нелокальных по времени решений необходимо вводить разрывы. Такого рода решения гиперболических уравнений называют обобщенными.

Существует несколько способов введения обобщенных решений [6]. Один из них, наиболее естественный в задачах механики, основан на переходе к системе интегральных уравнений, эквивалентной (1.1) на гладких решениях, и получении с помощью ее системы соотношений на поверхности разрыва, называемой условиями Рэнкина — Гюгонио [1—3]. Эта система имеет вид

$$-V_n\,[U] + n_\alpha\,[F_\alpha(U)] = 0, \quad [U] \equiv U_+ - U_- \tag{1.2}$$

Здесь U_+ и U_- — значение функции U за и перед разрывом, $\mathrm{n} = \{n_\alpha\}$ — вектор нормали к поверхности разрыва $x_1 = S(x_2, \ldots, x_n, t)$, V_n — нормальная скорость поверхности $S(t)$.

С физической точки зрения критерием правильности введения разрывов является существование и единственность решения физически правильно поставленных задач. Иногда к этим условиям добавляют и требование непрерывной зависимости решения от параметров, которое должно выполняться почти всюду в пространстве определяющих параметров системы (1.1). Задачи, удовлетворяющие этим трем требованиям, называются корректными [6, 7].

Система соотношений (1.2) во многих случаях недостаточна для обеспечения единственности решения задач Коши и смешанных краевых задач для системы (1.1). Поэтому соотношения (1.2) дополняются принципом эволюционности разрывов, введенным Ландау применительно к задачам газовой динамики [8]. Смысл его состоит в том, что реально существуют только те разрывы, число независимых краевых условий на которых на единицу больше числа уходящих от разрыва характеристик. В этом случае условия (1.2) позволяют в линейной постановке определить амплитуды всех уходящих от разрыва волн и скорость движения самого разрыва. Разрыв (1.2) является эволюционным, если существует целое k, такое, что справедливы неравенства [1—3, 6]

$$\lambda_k(U_+, n_\alpha) < V_n < \lambda_{k+1}(U_+, n_\alpha), \quad \lambda_k(U_-, n_\alpha) > V_n > \lambda_{k-1}(U_-, n_\alpha) \tag{1.3}$$

В этом случае разрыв называют ударной волной типа k (k — shock) [1, 2]. Соотношения (1.3) представляют собой обобщение на многомерный случай условий Лакса, введенных им для гиперболических систем законов сохранения, зависящих от двух переменных (x, t) [9].

Но и выполнение принципа эволюционности недостаточно для единственности решений задач Коши в классе разрывных функций [6]. В газовой динамике, например, в случае разрывов без подвода тепла дополнительный отбор решений происходит на основании условия возрастания энтропии. Однако недавно было показано, что и это условие не гарантирует единственности. Например, задача о распаде произвольного разрыва в газе, удовлетворяющем ограничениям Бетте — Вейля [10] (нормальный газ), может иметь не единственное решение [11, 12].

Если разрыв неэволюционен и число краевых условий на нем больше чем на единицу превосходит число уходящих характеристик, то он распадается на некоторое число эволюционных разрывов и простых волн. Это утверждение доказано для уравнений магнитной гидродинамики [13, 14] и теории упругости [15]. Неэволюционные МГД-разрывы могут удовлетворять условию возрастания энтропии [16].

Если число краевых условий, следующих из законов сохранения на разрыве, меньше, чем требует критерий эволюционности, то амплитуды малых возмущений, уходящих от разрыва, становятся неопределенными и допускают сколь угодно быстрый рост со временем [8]. Это означает, что смешанная краевая задача о распространении слабых возмущений до и за разрывом некорректна, по Адамеру, и такой разрыв не может существовать. Однако в ряде случаев (фронты медленного горения, ионизующие ударные волны в магнитной гидродинамике) разрывы такого типа наблюдаются в природе. Это является следствием того, что на этих разрывах выполняются дополнительные краевые условия, не вытекающие из уравнений (1.1) и обеспечивающие эволюционность разрывов.

Эти условия могут быть получены из решения задачи о структуре разрыва [17], которая сводится к рассмотрению наряду с (1.1) системы вида

$$G\frac{\partial U^D}{\partial t} + \frac{\partial F_\alpha'(U^D)}{\partial x_\alpha} + CU^D = 0 \tag{1.4}$$

Матрица G предполагается вырожденной, так что система (1.4) относится к параболическому типу и обладает непрерывными решениями, описывающими процессы внутри разрыва. Вне зоны разрыва, где производные малы, выполняются соотношения $CU^D = 0$, которые позволяют исключить некоторые компоненты вектора U^D, после чего система (1.4) сводится к (1.1). Решения (1.4), стремящиеся к постоянным значениям $U^\pm$ при удалении от разрыва, называются решением задачи о структуре.

Можно показать [17, 18], что требование существования решения задачи о структуре сводится к выполнению системы соотношений $f(U^+, U^-, V) = 0$ (здесь V — скорость разрыва), включающих в себя условия (1.2) и обеспечивающих эволюционность разрывов системы (1.1) в случае, когда соотношений (1.2) не хватает для выполнения условий эволюционности. Именно такая ситуация имеет место для фронтов медленного горения, волн ионизации и рекомбинации [7, 19—23].

Если число соотношений (1.2) превышает число уходящих от разрыва волн больше чем на единицу, то задача о структуре разрыва имеет не единственное решение [24], т. е. существование структуры не гарантирует эволюционность разрыва.

Вид и свойства «расширенной» системы (1.4) зависят от того, какие из процессов, протекающих в узкой переходной зоне, описываемой изучаемым разрывом, следует принять во внимание в конкретной физической задаче. В частности, наряду с непрерывными часто рассматривают структуры, содержащие разрывы. Например, структуру детонационной волны (ДВ) можно считать состоящей из газодинамической ударной волны (УВ) и следующей за ней зоной реакций.

Однако наличие структуры и эволюционность еще не гарантируют физической реальности разрыва, ибо он может оказаться неустойчивым. Разрывное решение $U_0^\pm(x, t)$ системы (1.1), содержащее поверхность разрыва $x_1 — S_0(x_2, \ldots, x_n, t) = 0$, будем называть устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют величины V_s^0 и $\delta > 0$, такие, что любое разрывное решение $U_1^\pm(x, t)$ системы (1.1) с поверхностью разрыва $x_1 - S(x_2, \ldots, x_n, t) = 0$, удовлетворяющее условиям

$$\|U_1^\pm(x, 0) - U_0^\pm(x, 0)\| < \delta, \quad \|S_1(x_2, \ldots, x_n, 0) - S_0(x_2, \ldots, x_n, 0)\| < \delta$$

удовлетворяет неравенствам

$$\|U_1^\pm(x_1 - V_s^0 t, x_2, \ldots, x_n, t) - U_0^1(x_1, \ldots, x_n, t)\| < \varepsilon$$

$$\|S_1(x_2, \ldots, x_n, t) - S_0(x_2, \ldots, x_n, t) - V_s^0 t\| < \varepsilon$$

При исследовании устойчивости разрывов в качестве решения U_0 обычно рассматривают решение системы (1.1), зависящее только от одной пространственной переменной x_1 с поверхностью разрыва S_0, совпадающей с плоскостью $x_1 = 0$. Как правило, решение $U_0(x_1)$ представляет собой два однородных состояния, разделенных разрывами. Такая постановка в большой степени исключает влияние на устойчивость свойств того или иного конкретного течения, содержащего разрыв рассматриваемого типа. (Например, ударные волны в совершенном газе устойчивы [25], однако автомодельное течение, содержащее сферически сходящуюся ударную волну, неустойчиво [26].) Переходя к изучению устойчивости разрывов, рассмотрим прежде всего линейное приближение.

2. Линейная устойчивость разрывов. Рассмотрим разрывное решение U^0 системы (1.1), содержащее разрыв, совпадающий с плоскостью $x_1 = 0$. Тогда

$$U^0 = U^0_-, \ \ x_1 < 0; \ \ U^0 = U^0_+, \ \ x_1 > 0$$

$$F(U^0_+) - F(U^0_-) = 0, \ \ x_1 = 0$$

Пусть решение $U(x, t)$ системы (1.1) слабо отличается от U^0, так что

$$U_\pm(x, t) - U^0_\pm(x_1) = \varepsilon u_\pm(x, t) + O(\varepsilon^2), \ \ \varepsilon \ll 1$$

Решение $U(x, t)$ содержит поверхность разрыва $x_1 = \varepsilon S(x_2, \ldots, x_n, t)$, близкую к плоскости $x = 0$.

Тогда функция $u_\pm(x, t)$ удовлетворяет системе линеаризованных уравнений (1.1) и краевых условий (1.2). В случае необходимости соотношения (1.2) дополняются условиями, полученными из решения задачи о структуре. Детали вывода соответствующих линеаризованных уравнений применительно к конкретным моделям сплошных сред содержатся в [25, 27—31].

В общем виде исследование линейной устойчивости разрывов проведено только для случая, когда решение U_0 не зависит от x_1 и задача устойчивости сводится к исследованию поведения при $t \to \infty$ решений смешанной краевой задачи для системы линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами [32]. Оказалось, что многие результаты, полученные ранее для конкретных разрывов [25, 27—31, 33, 34], справедливы и в общем случае.

В [32] было показано, что с течением времени решения $u_\pm(x, t)$ могут экспоненциально расти, степенным образом убывать или оставаться ограниченными. В соответствии с этим все разрывы делятся на неустойчивые, устойчивые и нейтрально устойчивые. При этом из неустойчивости разрыва всегда следует некорректность соответствующей смешанной краевой задачи.

Доказательство корректности смешанной задачи для устойчивых и особенно нейтрально устойчивых разрывов представляет собой нетривиальную задачу [35—37], хотя с физической точки зрения подобный вывод кажется почти очевидным. При этом в случае нейтральной устойчивости корректность удалось доказать только при выполнении дополнительных ограничений на гладкость исходных данных [36—37]. В [32] было показано, что это обстоятельство является неслучайным, так как отражение возмущений от нейтрально устойчивых разрывов происходит с потерей гладкости. В [32] получены условия на параметры задачи, при выполнении которых происходит смена типов асимптотического поведения решений. В пространстве определяющих параметров нейтрально устойчивым разрывам соответствует область той же размерности, что устойчивым или неустойчивым.

В силу того что для ударных волн в идеальном газе наиболее вероятным способом перехода от устойчивости к неустойчивости представляется возникновение нейтрально устойчивого режима [37—41], в [32] особое внимание уделено этому переходу. Показано, что переход к нейтральной устойчивости происходит при совпадении собственного числа изучаемой краевой задачи с точкой ветвления корней дисперсионного уравнения системы. При помощи диаграмм групповых скоростей малых возмущений дана простая геометрическая интерпретация этого перехода.

Установлено также, что добавление недифференциальных членов в уравнения и краевые условия, соответствующие учету слабой неоднородности, например искривлению изучаемого разрыва, не приводит к некорректности, если параметры задачи лежат внутри области устойчивости или нейтральной устойчивости.

Остановимся теперь на некоторых конкретных, не выходящих за рамки изложенного выше приближения примерах исследования линейной устойчивости разрывов различной природы.

Ударные волны в нормальном газе. Нормальным газом будем называть идеальный газ, внутренняя энергия которого есть произвольная функция плотности и энтропии $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$, удовлетворяющая ограничениям Бетте — Вейля [10].

Пусть j — поток массы через УВ, $\delta = -j^2[\partial(1/\rho)/\partial p]_H$ — безразмерная производная вдоль адиабаты Гюгонио, $\sigma > 1$ — отношение плотностей на УВ, М — число Маха за УВ. Тогда [25, 27, 28] УВ устойчива, нейтрально устойчива и неустойчива, если

$$\delta_0 < \delta < 1, \quad \delta_0 = (\sigma M^2 + M^2 - 1)/(\sigma M^2 + 1 - M^2) \tag{2.1}$$

$$-1 - 2M < \delta < \delta_0 \tag{2.2}$$

$$\delta < -1 - 2M \quad \text{или} \quad \delta > 1 \tag{2.3}$$

Общий вид ударной адиабаты в нормальном газе и характерное расположение на ней зон устойчивости приведено на фиг. 1. Согласно (2.1), УВ в совершенном газе устойчивы.

В связи с обнаружением в экспериментах неустойчивости сильных УВ в инертных и некоторых молекулярных газах [38, 42—45] большой интерес вызывает вопрос о том, может ли изменение свойств совершенного газа за сильной УВ привести УВ в состояние неустойчивости или нейтральной устойчивости. Было показано [46, 47], что равновесная ионизация (или диссоциация) совершенного газа оставляет УВ устойчивой по критерию (2.1). Однако возбуждение электронных уровней в одноатомных газах, предшествующее началу ионизации, может приводить к возникновению режима нейтральной устойчивости [40, 41]. Вычисленные в [41] по экспериментальным данным [48, 49] диапазоны нейтральной устойчивости хорошо согласуются с областями неустойчивого поведения УВ, зафиксированного в экспериментах [38, 42—45].

Детонационные волны в нормальном газе. Рассмотрим ДВ как поверхность разрыва, соответствующую точкам некоторой детонационной адиабаты. Если рассматриваемая точка адиабаты соответствует режиму пережатой детонации, то критерии устойчивости имеют вид неравенств (2.1)—(2.3). В теории устойчивости ДВ соотношения (2.1)—(2.3) часто записывают в ином виде [50, 51]

$$(\sigma - 1)\, M^2 < \frac{1}{1 + \rho e_p'} \tag{2.4}$$

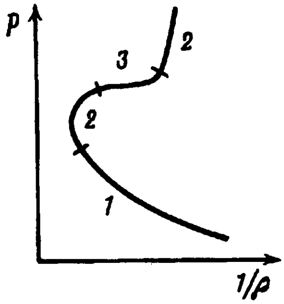
$$\frac{1}{1 + \rho e_p'} < (\sigma - 1)\, M^2 < \frac{1 + M}{\rho e_p'} \tag{2.5}$$

$$\frac{1 + M}{\rho e_p'} < (\sigma - 1)\, M^2 \tag{2.6}$$

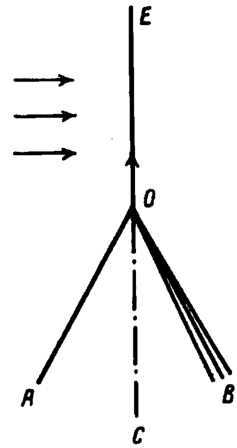
Здесь $e(p, \rho) \equiv \varepsilon(p(\rho, s), \rho)$ — внутренняя энергия газа за ДВ как функция плотности и давления.

В точке Чепмена — Жуге (самоподдерживающаяся детонация) скорость газа за ДВ становится равной скорости звука и малые возмущения не могут вернуться на ДВ за конечное время. Это соответствует появлению особой точки в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих невозмущенное решение. Поэтому устойчивость ДВ Чепмена — Жуге должна быть рассмотрена отдельно.

Интересно отметить, что по мере приближения к точке Чепмена — Жуге за ДВ число $M \to 1$. И, как это следует из (2.1)—(2.3), область устойчивых ДВ стремится к нулю за счет увеличения диапазона нейтральной устойчивости. Этот результат хорошо согласуется с данными многочисленных экспериментов (см., например, обзор [52]), согласно которым при уменьшении степени пересжатия ДВ теряет одномерную структуру, а ее поверхность начинает состоять из пуль-



Фиг. 1



Фиг. 2

сирующих ячеек. Теория образования ячеистых структур на нейтрально устойчивом разрыве будет изложена в разд. 5 настоящей работы.

Магнитогидродинамические ударные волны. Аналитические исследования устойчивости МГД УВ наталкиваются на серьезные трудности в связи с громоздкостью получающихся алгебраических соотношений. Это связано с наличием семи типов волн малых возмущений. Кроме того, в МГД векторы напряженности магнитного поля перед и за ударной волной и нормаль к фронту волны выделяют плоскость невозмущенного течения, поэтому необходимо исследовать устойчивость относительно трехмерных возмущений. В [30] было установлено, что магнитное поле, перпендикулярное или параллельное быстрой МГД УВ («нормальные» и «поперечные» МГД УВ), не влияет на ее неустойчивость (границы области неустойчивости описываются неравенствами (2.3)). Однако магнитное поле увеличивает область нейтральной устойчивости [32]. В частности, быстрые «нормальные» МГД УВ в совершенном газе могут быть нейтрально устойчивыми при достаточно сильном магнитном поле ($b > \text{const}\sqrt{M_\infty}$). Наиболее полные численные исследования линейной устойчивости МГД УВ, проведенные в [33, 34], показали, что в совершенном газе как быстрые, так и медленные МГД УВ могут быть неустойчивыми. Быстрые УВ неустойчивы, когда перед волной направление вектора магнитной индукции близко к нормали к фронту, а газодинамическое давление в несколько раз меньше магнитного. При этом неустойчивы те волны, в которых магнитное поле поворачивается на угол, близкий к максимальному. Медленные волны неустойчивы в широком диапазоне определяющих параметров, причем существует область значений углов наклона поля, в которой при фиксированной интенсивности волны произвольное увеличение газодинамического давления перед волной не может подавить неустойчивость. Область параметров, в которой УВ неустойчивы относительно двумерных возмущений, для быстрых волн шире, а для медленных у́же, чем для трехмерных.

Фронты медленного горения относятся к разрывам, на которых необходимо выставлять дополнительные условия. Таким условием является задание скорости фронта как функции параметров задачи, которая определяется процессами переноса внутри структуры. Если считать, что скорость фронта не зависит от возмущений газодинамических величин [29], то фронт медленного горения оказывается неустойчивым. Учет влияния процессов переноса на возмущения скорости фронта выводит задачу устойчивости за рамки обсуждаемого в этом разделе приближения и будет рассмотрен ниже.

Аналогичная ситуация имеет место и для *фронтов ионизации в магнитном поле*, дополнительные условия на которых получаются из решения задачи о структуре [22, 23]. Свойства этого решения зависят от принимаемой модели структуры, в частности от проводимости ионизованного газа. Если проводимость конечна [53—55], то в системе присутствует диссипация и основное свойство рассматриваемого приближения (независимость критериев устойчивости от длины волны возмущения) не выполняется. Поэтому в этом разделе отметим только работу [31], где для быстрой сверхзвуковой ионизующей УВ в магнитном поле B, параллельном волне, были установлены границы зон устойчивости, переходящие при $|B| \to 0$ в неравенства (2.1)—(2.3). Ионизованный газ считался при этом бесконечно проводящим.

В заключение раздела отметим, что в большинстве случаев изложенная выше линейная теория не позволяет в полной мере объяснить экспериментальные данные по неустойчивости поверхностей сильного разрыва. Это связано со следующими факторами.

1. Ряд необходимых эффектов носит существенно нелинейный характер (расслоение или расщепление ДВ и сильных УВ, образование сложных, самоорганизующихся структур типа ячеек на ДВ и фронтов медленного горения, режимы спиновой, галлопирующей и низкоскоростной детонации).

2. Устойчивость разрыва может сильно зависеть от особенностей развития возмущений внутри его структуры. В разных конкретных случаях необходимо учитывать следующие факторы: конечность скоростей химических реакций за ДВ, неравновесность ионизации или диссоциации за сильными УВ, межфазное взаимодействие за УВ в многофазных средах, вязкость, теплопроводность и диффузия во фронтах медленного горения, опережающее излучение перед сильными УВ, конечная проводимость среды за ионизующими УВ в электромагнитном поле и т. д.

Тем не менее изложенная выше линейная теория представляет существенный интерес, так как, во-первых, позволяет провести законченное и математически строгое решение задачи устойчивости и, во-вторых, полученные решения являются предельными и часто служат начальными приближениями при исследовании устойчивости разрывов в перечисленных выше более сложных случаях.

Исследование устойчивости разрыва в пренебрежении нелинейностью и элементами структуры будем в дальнейшем называть приближением Ландау — Дьякова — Иорданского, которые рассмотрели впервые задачи устойчивости фронтов медленного горения и УВ [29, 25, 27].

3. Влияние структуры на линейную устойчивость разрывов. Рассмотрим какое-либо разрывное решение U^0 системы (1.1), такое, что $U^0 = U^0_-$, $x_1 < 0$ и $U^0 = U^0_+$, $x_1 > 0$. Пусть решение $U^D_0(x_1)$ описывает одномерную структуру разрыва U_0, т. е. $U^D_0(x_1) \to U^D_{0\pm}$, $x_1 \to \pm\infty$, причем соответствующие компоненты векторов $U^D_{0\pm}$ принимают значение $U^0_\pm$.

Рассмотрим решение $U^D(x, t)$ системы (1.4), слабо отличающееся от U^D_0 так, что

$$U^D(x, t) - U^D(x) = \varepsilon u^D(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \ll 1$$

Решение $U^D_\pm(x, t)$ может содержать поверхность разрыва $x_1 = \varepsilon S(x_2, \ldots, x_n, t)$, близкую к плоскости $x = 0$, а может быть непрерывным, в зависимости от свойств системы (1.4). Предположим также, что компоненты вектора возмущений $u^D_\pm(x, t)$, соответствующие волнам, приходящим из области $x_1 = \pm\infty$, равны нулю.

Тогда функции $u^D_\pm(x, t)$ удовлетворяют линеаризованным уравнениям (1.4) и однородным краевым условиям при $x_1 \to \pm\infty$. Если система (1.4) обладает непрерывными решениями, то $u^D_+ \equiv u^D_-$, в противном случае функции $u^D_\pm$ действуют до и за разрывом $x_1 = \varepsilon S(x_2, \ldots, x_n, t)$ соответственно и связаны между собой линеаризованными условиями на этом разрыве.

Величины $u^D_\pm(x, t)$ можно искать в виде

$$u^D_\pm(x, t) = u_\pm(x_1) \exp\left[i(\omega t + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n)\right]$$

что сводит задачу устойчивости к нахождению спектра $\omega(k_2, \ldots, k_n)$ краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и однородными краевыми условиями при $x_1 \to \pm \infty$.

Основным отличием получающихся результатов от приближения Ландау — Дьякова — Иорданского является зависимость критериев устойчивости от длины волны возмущений λ. Характерные особенности получающихся результатов отражают следующие два предельных случая, поддающиеся аналитическому описанию.

Пусть $\lambda >> l$, где l — характерная ширина структуры, вне которой решение U_0^D слабо отличается от постоянного. Рассмотрим для определенности случай, когда структура не содержит разрыва. Решение задачи устойчивости будем искать методом асимптотического сращивания.

Внешнее решение, т. е. решение вне области больших градиентов, строится в виде ряда по малому параметру (l/λ). Нулевое приближение соответствует решению линеаризованной гиперболической системы (1.1), первое приближение учитывает влияние вязкости, явлений переноса на распространение возмущений и обусловливает их затухание.

Внутреннее решение (т. е. решение в области больших градиентов), получающееся интегрированием системы (1.4) «поперек» структуры [56, 57], служит для получения краевых условий на разрыве и «сшивания» внешнего решения. Важно подчеркнуть, что эти краевые условия содержат члены как нулевого, так и всех последующих приближений по параметру (l/λ). Нулевое приближение соответствует линеаризованным соотношениям (1.2), выполняемым для системы (1.1), т. е. теории Ландау — Дьякова — Иорданского. Первое приближение учитывает диссипацию, явления переноса, конечность ширины структуры, искривленность разрыва, соответствующего изучаемой структуре. В ряде моделей в число учитываемых включаются и другие факторы, например изменение скорости химических реакций, связанное с флуктуациями температуры [21, 56]. Если число условий, необходимое для эволюционности разрыва, превышает число соотношений (1.2) (фронты медленного горения, ионизующие УВ), то включаемые в рассмотрение дополнительные краевые условия, получающиеся из решения задачи о структуре, также раскладываются в ряд по (l/λ). Так, для фронта медленного горения нулевое приближение соответствует постоянству скорости распространения фронта — условие, использованное Ландау в [29].

Таким образом, сращивая «внешние решения» до и за разрывом посредством краевых условий, получаемых из «внутреннего» решения, получим набор краевых задач, представляющих собой последовательные приближения исходной задачи по параметру (l/λ). В соответствии с этим собственные числа исходной краевой задачи записываются в виде

$$\omega = \omega_0 + i\,(l/\lambda)\,\omega_1 + \ldots$$

Если ω_0 — действительно (случай нейтральной устойчивости), то появление в следующем приближении мнимой компоненты $i\omega_1$ кардинально меняет свойства решения. Так, в [58] было показано, что вязкость и теплопроводность стабилизируют нейтрально устойчивую УВ, а в [37] было установлено, что опережающее излучение при определенных ограничениях может дестабилизировать нейтрально устойчивую УВ. В [59] содержалось противоположное [60] утверждение о влиянии вязкости на устойчивость УВ.

Нет единого мнения и по вопросу о влиянии вязкости на устойчивость фронтов медленного горения. В ряде работ утверждается, что вязкость является стабилизирующим эффектом [56], но в [21] содержится противоположное утверждение. Это, по-видимому, связано с тем, что, с одной стороны, слабые возмущения диссипируют под действием вязкости, а, с другой стороны, в области больших градиентов динамическая вязкость действует как «дестабилизирующее поверхностное натяжение» [59], причем оба эффекта имеют один и тот же порядок малости по (l/λ).

Если ω_0 комплексно, то добавка порядка (l/λ) дает только тенденцию влияния тех или иных факторов (вязкость, теплопроводность, диффузия) на характер развития возмущений и не может использоваться для определения критических длин волн, на которых происходит смена режимов устойчивости.

Поэтому применение изложенного выше асимптотического подхода к анализу устойчивости фронтов горения не позволяет, с математической точки зрения, считать опровергнутым парадоксальный результат Ландау об абсолютной его неустойчивости [29]. Кроме того, некоторые эффекты, например обсуждающийся ниже диффузионно-тепловой механизм потери устойчивости, проявляются во втором приближении по (l/λ) и остаются за рамками асимптотического подхода.

Поэтому весьма продуктивными являются полуэмпирические модели устойчивости фронтов медленного горения, которые сводятся к пополнению дисперсионного уравнения Ландау [29] дополнительными членами, обеспечивающими устойчивость фронтов на тех или иных длинах волн. Наиболее известной и теоретически обоснованной моделью такого рода является поправка Маркштейна [60], учитывающая влияние кривизны фронта на скорость его распространения. При сопоставлении теоретических результатов по устойчивости фронтов горения с экспериментальными данными необходимо учитывать теплоотвод в стенки канала, вязкое трение, кривизну фронта пламени, силу тяжести и другие факторы [61, 62].

Другим примером влияния диссипации на устойчивость разрыва являются ионизующие МГД УВ с конечной проводимостью газа за УВ. В этом случае наличие диссипации (конечная проводимость) не приводит к появлению непрерывной структуры. В [53, 54] исследовалась задача об устойчивости быстрой сверхзвуковой ионизующей УВ в нормальном газе при магнитном поле, параллельном фронту УВ, конечной проводимости σ за фронтом и малых магнитных числах Рейнольдса. Было показано, что границы областей устойчивости определяются как производной вдоль ударной адиабаты δ (см. (2.1)—(2.3)), так и параметром взаимодействия $\lambda\sigma B_0^2/\rho U$ (λ — длина волны возмущения). В области устойчивости в силу действия диссипации амплитуды возмущений затухают по экспоненте, а не по степенному закону, как в газовой динамике. Область нейтральной устойчивости отсутствует, одна часть ее становится устойчивой, а другая — неустойчивой. Если магнитное поле перпендикулярно УВ [55], то границы области неустойчивости не зависят от параметра взаимодействия, а вся газодинамическая область нейтральной устойчивости переходит в устойчивые режимы.

Пусть характерный поперечный размер структуры l много больше длины возмущений λ. Тогда распространение возмущений по структуре может быть описано в приближении геометрической оптики [63, 64]. Распространяясь по неоднородному фону, коротковолновые возмущения могут испытывать внутренние отражения, образовывая замкнутые траектории. Если структура содержит разрыв, то замкнутые траектории чаще всего начинаются и заканчиваются на поверхности разрыва. В изученных случаях причиной внутреннего отражения возмущений является возрастание температуры за разрывом, например в зоне протекания экзотермических реакций за ДВ [65]. Амплитуда возмущений меняется как при их распространении по неоднородному фону, так и за счет взаимодействия с разрывом. Если за период, т. е. за промежуток времени между последовательными возвращениями волнового пакета на разрыв, амплитуда возмущений возрастает, то течение, а следовательно, и разрыв являются неустойчивыми. Этот механизм неустойчивости принципиально отличается от неустойчивости в приближении Ландау — Дьякова — Иорданского, так как он реализуется на другом характерном масштабе длин волн и не связан с краевыми условиями далеко впереди и позади разрыва. Поэтому эту неустойчивость можно назвать внутренней. Она реализуется за ДВ [65, 66]. Простейшей моделью ДВ, допускающей внутреннюю неустойчивость, является модель двухфронтовой, самоподдерживающейся детонации [66], когда неустойчивыми являются даже одномерные возмущения, отражающиеся по очереди от УВ расположенного за ней фронта горения.

В общем случае процесс образования собственной функции по описанному выше механизму выглядит так. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — волны, распространяющиеся от разрыва, а $B_1, \ldots, B_m$ — волны, приходящие на разрыв. Каждая волна помимо амплитуды A_i или B_j характеризуется своим волновым вектором $k_A^i(\omega, x_1)$, меняющимся вместе с амплитудой при движении волнового пакета. Процесс внутреннего отражения состоит в переходе i-й волны семейства A в j-ю волну семейства B, т. е. связан с наличием в потоке плоскости $x_1 = x_1°$, где расположены точки ветвления корней разных семейств дисперсионного уравнения $k_A^i(\omega, x_1) = k_B^j(\omega, x_1)$. Взаимодействие пакета с разрывом приводит к тому, что приходящая волна (k_B^j, B_j) семейства B порождает уходящие волны $\{(\bar{k}_A^i, \bar{A}_i)\}$ семейства A. Собственная функция образуется, если $\bar{k}_A^i = k_A^i$ (именно так обстоит дело для ДВ). Однако в общем случае можно строить и более сложные «цепочки», например

$$(A_{i1}, k_A^{i1}) \to (B_{j1}, k_B^{j1}) \to (A_{i2}, k_A^{i2}) \to (B_{j2}, k_B^{j2}) \to \ldots \to (A_{in}, k_A^{in}), (k_A^{in} = k_A^{i1})$$

Здесь in обозначает i_n.

Принципиальная возможность существования такого рода циклов установлена и для распада произвольного разрыва в газовой динамике [67] при исследовании устойчивости МГД УВ, поддерживаемой поршнем [68]. В задачах о внутренней неустойчивости структур существование сложных циклов пока не доказано.

Механизм внутренней неустойчивости применялся и для объяснения аномального поведения сильных УВ [69]. Немонотонное распределение температуры за фронтом УВ, необходимое для осуществления внутреннего отражения звуковых волн, достигалось за счет образования в релаксационной зоне метастабильных атомов [70]. При этом происходила избыточная заначка энергии во внутренние степени свободы атомов или молекул. Далее, в процессе ионизации (диссоциаций) эта энергия сбрасывалась в поступательные степени свободы, что и приводило к немонотонному распределению температуры. Однако никаких количественных оценок, подтверждающих достаточное для неустойчивости усилие амплитуды волновых пакетов в релаксационной зоне, в [69—70] представлено не было. Кроме того, последующие экспериментальные [71] и теоретические [72] исследования не подтвердили наличие сколько-нибудь заметных концентраций метастабильных атомов за УВ. Поэтому применимость детонационного механизма к объяснению неустойчивости УВ вызывает сильные сомнения.

Релаксационные зоны возникают также за УВ в многофазных средах. Однако их устойчивость до сих пор не исследована. Это связано со сложностью подлежащих изучению уравнений, а также с тем, что в некоторых случаях (газ с твердыми частицами) используемые системы уравнений оказываются неэволюционными [73, 74]. Экспериментальные и численные исследования показывают, что в некоторых случаях (газо- и парожидкостные среды) возможно усиление или ослабление УВ, возникновение осцилляций давления за фронтом УВ. Однако отсутствие теоретических разработок не позволяет трактовать эти явления как неустойчивость.

В случае $\lambda \sim l$ решение задачи устойчивости сводится к нахождению спектра краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и однородными краевыми условиями при $x_1 \to \pm\infty$ [75—77]. Поиск спектра резко усложняется, если рассматриваются неоднородные возмущения, ибо в этом случае изучаемая система дифференциальных уравнений содержит комплексные коэффициенты, зависящие от компонент волнового вектора, лежащих в подпространстве $\{x_2, \ldots, x_n\}$. Поэтому большинство известных авторам исследований задач об устойчивости структуры проведены относительно одномерных возмущений. Это обстоятельство ограничивает область практического применения рассматриваемого приближения, так как в подавляющем большинстве случаев наблюдаемые в экспериментах проявления неустойчивости разрывов носят существенно неоднородный характер.

Остановимся на некоторых конкретных результатах, относящихся к случаю $\lambda \sim l$. Устойчивость структуры фронтов медленного горения в диффузионно-тепловом приближении и предположении о постоянстве плотности смеси по обе стороны от разрыва исследовалась в [75, 78]. При числе Льюиса $L = 1$, когда температурные и диффузионные поля подобны, рассмотрение сводится к решению задачи Штурна — Лиувилля и фронт медленного горения оказывается устойчивым по отношению к одномерным возмущениям [75]. При $L < 1$ возможна одномерная неустойчивость по механизму Льюиса и Эльбе [79]. При $L > 1$ фронт медленного горения устойчив по отношению к одномерным возмущениям, но может оказаться неустойчивым по отношению к двумерным возмущениям [77]. Эта неустойчивость связана с преобладанием диффузии над теплопроводностью, в результате чего выпуклые по отношению к несгоревшей смеси участки фронта медленного горения начинают обгонять вогнутые участки и возмущения нарастают.

В [80] изучалась устойчивость ДВ Чепмена — Жуге, распространяющейся по цилиндрической трубе. Течение за инициирующей УВ описывалось уравнениями Эйлера, уравнения химической кинетики заменялись модельными уравнениями для величины β — степени завершенности химических реакций. Точка Чепмена — Жуге соответствовала значению $\beta = 0$. Поскольку возмущения из области за точкой Чепмена — Жуге не проникают в структуру, неустойчивость ДВ может быть обусловлена только процессами внутри структуры. Возмущения рассматривались в [80] в виде цилиндрических гармоник с произвольным номером n. Исследование устойчивости по описанной выше схеме сводилось к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которая затем решалась численно.

Изучалось влияние на устойчивость безразмерного параметра δ — отношения характерной ширины зоны химических реакций к радиусу трубы. Показано, что гармоника с номером n неустойчива в диапазоне $\delta_-(n) < \delta < \delta_+(n)$, причем $(d\delta_+)/dn > 0$, $(d\delta_-)/dn < 0$. Кроме того, для любого $\delta > 0$ найдется n, такое, что $\delta \in [\delta_-(n), \delta_+(n)]$, т. е. ДВ Чепмена — Жуге неустойчива. Отметим, что увеличение номера n первой неустойчивой моды с уменьшением δ соответствует известному из экспериментов факту об уменьшении характерных линейных размеров структур, наблюдаемых на ДВ при увеличении степени их пересжатия.

Устойчивость УВ с учетом неравновесной диссоциации газа за УВ (с кинетикой аррениусовского типа) относительно одномерных возмущений изучалось в [76], где было показано, что рассматриваемое течение устойчиво. Некоторые результаты, относящиеся к одномерной устойчивости решений типа структуры параболических систем общего вида, приведены в [77] и цитируемой там литературе.

4. Нелинейная устойчивость сильных разрывов. Ряд наблюдаемых явлений («расщепление» сильных разрывов, образование на них точек излома и сложных структур типа ячеек) не могут быть объяснены в рамках линейного приближения. Среди работ, изучающих нелинейную устойчивость разрывов, можно выделить четыре основных направления: построение автомодельных решений, которые можно интерпретировать как расщепление или распад разрыва; изучение устойчивости разрыва в слабонелинейном приближении; «полуэмпирические» модели нелинейных структур, возникающих на поверхности разрыва; численное моделирование натурных экспериментов с целью изучения механизмов формирования разрывов и возникновения на них сложных структур. Остановимся коротко на каждом из этих направлений.

Распад на плоские волны. Пусть $U^\circ = \{U_0^-,\ x_1 < 0;\ U_0^+,\ x_1 > 0\}$ есть решение задачи (1.1)—(1.2), содержащее разрыв, совпадающий с плоскостью $x_1 = 0$. Будем искать решения системы (1.1), зависящие только от переменной $\xi = x_1/t$ и удовлетворяющие начальным условиям

$$t = 0{:}\ U = U_0^-,\ x_1 < 0;\ U = U_0^+,\ x_1 > 0 \tag{4.1}$$

Исходный разрыв является тривиальным решением задачи (1.1), (1.2), (4.1).

Наличие какого-либо другого решения этой задачи можно интерпретировать как возможность самопроизвольного распада исходного разрыва на систему плоских разрывов $\{S_i(\xi)\}$, удовлетворяющих условиям (1.2)—(1.3), и простых волн $\{R_j(\xi)\}$, являющихся непрерывными решениями (1.1).

Распад на наклонные волны. Пусть $U^\circ(x_1) \equiv \{U_0^-,\ x_1 < 0;\ U_0^+,\ x_1 > 0\}$ есть решение задачи (1.1)—(1.2), содержащее исследуемый разрыв. Будем искать решение системы (1.1), зависящее от переменной $\xi = (x_2 - V_\lambda t)/x_1$. Исходный разрыв является, очевидно, тривиальным решением рассматриваемой задачи. Наличие какого-либо другого решения можно интерпретировать как возможность самопроизвольного распада разрыва S_0 на систему разрывов $\{SN_j(\eta)\}$, удовлетворяющих соотношениям (1.2)—(1.3), и простых волн $\{RN_i(\eta)\}$, являющихся непрерывными решениями системы (1.1). Система разрывов $\{SN_j(\eta)\}$ и простых волн $\{RN_i(\eta)\}$ образует λ-образную конфигурацию, движущуюся с постоянной скоростью V_λ вдоль исходного разрыва S_0. Подобная интерпретация представляется законной, если все разрывы являются «уходящими» [8] от центра образовавшейся λ-конфигурации, т. е. распад не вызван «внешними» причинами.

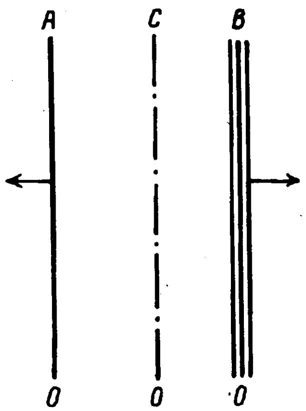
Если существование нетривиального решения задачи о распаде на плоские волны означает некорректность задачи Коши о распаде разрыва S_0 и тем самым его неустойчивость в нелинейном приближении, то существование нетривиального решения задачи о распаде на наклонные волны не свидетельствует о некорректности или неустойчивости, ибо не описывает временну́ю эволюцию изучаемого разрыва S_0 от первоначального состояния к λ-конфигурации. Если, однако, нетривиальное решение существует и при $V_\lambda \to \infty$, то λ-конфигурация переходит в «плоское» решение о распаде на плоские волны и некорректность имеет место.

Если интенсивности всех уходящих разрывов и простых волн стремятся к нулю, то они могут быть описаны в линейном приближении и условием существования нетривиального решения является нейтральная устойчивость разрыва S_0 [32].

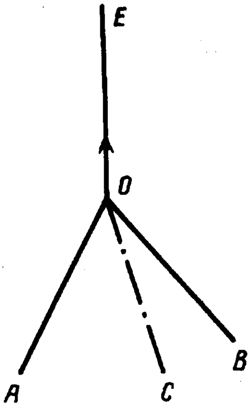
Необходимо подчеркнуть, что словосочетание «самопроизвольный распад разрыва» употребляется здесь по аналогии с введенным Кочиным термином «задача о распаде произвольного разрыва». В действительности из неединственности рассмотренного выше автомодельного решения вовсе не следует, что разрыв S_0 «обязан» распасться. Его дальнейшая судьба должна определяться в каждом конкретном случае. Известны два способа отбора автомодельного решения. Один из них состоит в том, что только одно из возможных решений оказывается устойчивым относительно малых возмущений. Так, при сверхзвуковом обтекании бесконечного конуса с присоединенной ударной волной решение с «сильным» скачком оказывается неустойчивым [81]. Аналогичный результат справедлив и для бесконечного клина [82].

Второй способ отбора основан на рассмотрении решений, близких к автомодельному. Так, в магнитной гидродинамике автомодельная задача о поршне с ионизирующими ударными волнами в определенном диапазоне параметров имеет несколько решений [83]. Для любого сколь угодно близкого к автомодельному закона движения поршня $U_n(t)$: $\{U_n(t) = 0,\ t < 0,\ U_n(t) \to U^0,\ t \to \infty,\ \|U_n(t) - U^0\| > \varepsilon,\ |t| < \delta\}$ решение единственно, причем можно найти такие функции $U_n(t)$, при которых в пределе при $t \to \infty$ реализуется каждое из возможных автомодельных решений [84]. Поэтому неединственность автомодельного решения «не имеет физических последствий».

Наиболее полно задача о самопроизвольном распаде разрыва решена для случая УВ в нормальном газе. Показано [85—87], что неустойчивые УВ ($\delta <$ $< -1-2M$, $\delta > 1$ — см. (2.3)) могут распадаться на тройные конфигурации, состоящие из УВ, волны Прандтля — Мейера и контактного разрыва (фиг. 2). Решение существует и при $U_\lambda \to \infty$, так что неустойчивая УВ распадается и на плоские волны (фиг. 3). Образующаяся при этом УВ является устойчивой [87, 88].



Фиг. 3



Фиг. 4

Нейтрально устойчивые УВ ($-1-2M < \delta < \delta_0$ — см. (2.2)) могут распадаться как на тройные конфигурации описанного выше типа, так и на тройные конфигурации, состоящие из двух УВ и контактного разрыва [85] (фиг. 4). Тип распада зависит от значения параметра δ и скорости U_λ центра тройной конфигурации. Предельный переход к плоскому распаду возможен лишь при $-1-2M < \delta < -1$ [85]. Это означает, что в указанном диапазоне значений δ задача Коши, содержащая нейтрально устойчивую УВ, некорректна в нелинейном приближении. Напомним, что в линейном приближении соответствующая задача Коши корректна. В [89] были приведены соображения, демонстрирующие неустойчивость термодинамического состояния двух однородных потоков газа, соединенных УВ, при $-1-2M < \delta < -1$. В этом же диапазоне значений δ неустойчиво автомодельное решение задачи о поршне, вдвигаемом в газ с постоянной скоростью [90].

Тройные конфигурации второго типа образуются также и на нейтрально устойчивых пересжатых ДВ (см. (2.5)) [86, 91], причем разрывы *OA* и *OE* (см. фиг. 4) являются ДВ, а разрыв *OB* — УВ. В [91] подчеркивалось, что такие конфигурации соответствуют наблюдаемой локальной структуре ДВ в точке взаимодействия соседних ячеек и что ячеистая структура является следствием нелинейного развития возмущений на нейтрально устойчивой ДВ.

Было показано, что если самоподдерживающаяся ДВ (режим Чепмена — Жуге) неустойчива в приближении двухфронтовой структуры, то эта структура распадается на плоские волны [66].

В магнитной гидродинамике неэволюционные ударные волны могут распадаться на эволюционные разрывы и простые волны [13, 14]. Однако возможность распада эволюционных неустойчивых МГД ударных волн пока не обнаружена.

Установление связи между линейной неустойчивостью разрыва и возможностью его распада на автомодельное течение того или иного вида, содержащее только устойчивые разрывы, представляется одной из наиболее интересных и весьма далеких от разрешения проблем нелинейной устойчивости разрывов.

Слабонелинейная устойчивость. Пусть $U_0^\pm(x_1)$ — исследуемое на устойчивость решение системы (1.1), содержащее сильный разрыв, совпадающий с плоскостью $x_1 = 0$. Рассмотрим близкое к нему решение $U^\pm(x, t)$, такое, что

$$U_0^\pm - U^\pm = \varepsilon u_1^\pm (x, t) + \varepsilon^2 u_2^\pm (x, t) + \ldots, \quad 0 \ll \varepsilon \ll 1 \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (1.1) и (1.2) для первого приближения, получим краевую задачу

$$L_1 u_1 = 0 \tag{4.3}$$

$$x_1 = 0:\ \mathrm{M}_1 (u_1, S (x_2, \ldots, x_n, t, 0)) = 0$$
$$u_1 \to 0, \quad x_1 \to \pm \infty$$

которая соответствует приближению Ландау — Дьякова — Иорданского. Здесь $x_1 = S(x_2, ..., x_n, t, \tau)$ — возмущение поверхности сильного разрыва, $\tau = \delta t$, $\delta << 1$ — «медленное» время, описывающее нелинейную эволюцию разрыва, индекс «±» везде для краткости опущен.

Второе приближение u_2 удовлетворяет уравнениям

$$L_1 u_2 = f_1 (u_1) \tag{4.4}$$
$$x_1 = 0:\ \mathrm{M}_1 (u_2, S (x_2, \ldots, x_n, t, \tau))$$
$$u_2 \to 0, \quad x_1 L \pm \infty$$

которые отличаются от (4.3) наличием правых частей, описывающих нелинейное взаимодействие слабых возмущений и нелинейность краевых условий.

Из (4.3) следует связь между возмущениями физических величин и возмущениями поверхности разрыва $u_1 = G_0(S)$, подставляя которую в (5.4), получим смешанную краевую задачу

$$L_1 u_2 = f_1 [G_0 (S)];\ x_1 = 0:\ \mathrm{M}_1 (u_2, S) = g_1 [G_0 (S)] \tag{4.5}$$

позволяющую после исключения u_2 получить нелинейное уравнение для S, записываемое в виде

$$S_\tau = \varepsilon \delta^{-1} G_1 (S, \nabla S) \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) описывает слабонелинейную эволюцию возмущений поверхности сильного разрыва, учитывая все члены второго порядка малости.

Решающим образом слабая нелинейность влияет на поведение разрыва в случае нейтральной устойчивости, когда отсутствуют другие механизмы роста или затухания возмущений. В случаях устойчивости или неустойчивости подобный подход имеет смысл только для описания эволюции возмущений с длинами волн, обеспечивающими инкремент роста или затухания, сравнимый с величиной ε.

Изложенная выше процедура получения уравнения (4.6) наиболее просто реализуется именно в случае нейтральной устойчивости, когда, согласно [32], соотношение $u_1 = G_0(S)$ упрощается и, при достаточно больших временах $t > T_0$, представляет собой сумму плоских волн. Если $T_0 << \delta^{-1}$, то при выводе (4.6) можно пользоваться этой простой асимптотикой [92, 51].

Уравнение (4.6) применялось при исследовании нелинейной устойчивости ударных [92] и детонационных [51] волн. В [92] было установлено, что при определенных ограничениях на уравнение состояния нормального газа уравнение (4.6), описывающее нелинейную эволюцию нейтрально устойчивой УВ, имеет неограниченно растущее при конечных временах решение. Существование такого решения обусловлено резонансным взаимодействием трех мод с определенным образом подобранными длинами волн. Причиной неустойчивости является нелинейное взаимодействие уходящих звуковых и энтропийно-вихревых волн, а нелинейность краевых условий является стабилизирующим фактором.

В [51] уравнение (4.6) использовалось для исследования нелинейной устойчивости пересжатой ДВ. Численно было продемонстрировано образование изломов на поверхности ДВ и рост амплитуды возмущений. Эти результаты и доказательство возможности самопроизвольного распада нейтрально устойчивой ДВ [91] позволили авторам [51, 91] рассматривать уравнение (4.6) как уравнение, описывающее образование ячеистой структуры. Условие возникновения таких структур есть переход ДВ в режим нейтральной устойчивости [51, 91]. Неучет конечной протяженности возмущенной зоны за разрывом не позволил авторам [51, 91] рассмотреть периодические возмущения и изучить резонансное взаимодействие трех мод, аналогичное рассмотренному в [92].

Изложенная выше процедура получения уравнения для слабонелинейных возмущений поверхности разрыва, хотя и позволяет учесть все нелинейные члены, очень сложна для реализации в случаях с большим, чем в газовой динамике, числом уходящих от разрыва простых волн или при использовании более сложных, чем нормальный газ, моделей сплошной среды до и за разрывом. Так, например, в [93] при изучении влияния химической кинетики и нелинейности на образование ячеек на ДВ не учитывалось нелинейное взаимодействие уходящих от ДВ газодинамических возмущений, хотя, согласно [51, 92] и многочисленным экспериментам [52, 94], именно такое взаимодействие, приводящее к образованию «поперечных волн», является механизмом, поддерживающим многофронтовую детонацию.

Поэтому достаточно привлекательными выглядят «полуэмпирические» модели возникающих на разрывах нелинейных структур [52, 94, 95]. Основной чертой этих работ является то, что механизм нелинейной эволюции структуры, наблюдаемой в эксперименте, представляется в виде последовательности «элементарных» газодинамических процессов. Например, в [52, 95], многофронтовая ДВ представлена в виде сменяющих друг друга последовательных состояний: цилиндрическая ДВ с тепловыделением на фронте: УВ, в которую трансформируется исходная ДВ после срыва пламени за ней; инициирование несгоревшей смеси за УВ за счет столкновения «поперечных» волн; переход горения в детонацию и образование исходной ДВ. При этом динамика переходов от одного состояния к другому не изучается, а моменты переходов определяются из простых оценок характерных времен протекания соответствующих процессов. Аналогично в [94] для описания многофронтовых структур на ДВ используются автомодельные решения о пересечении ударных и детонационных волн.

Достоинствами этого подхода является то, что он позволяет рассматривать сильно нелинейную стадию изучаемого процесса, вводить в рассмотрение элементы реальных наблюдаемых в эксперименте газодинамических взаимодействий внутри структуры и получать конечные формулы для размеров ячеек и других основных характеристик сложных структур. К недостаткам построенных на сегодняшний день «полуэмпирических» моделей следует отнести невозможность предсказания вне эксперимента существования в заданных условиях того или иного типа структуры и ее эволюцию при изменении определяющих параметров. Тем не менее именно полуэмпирический подход позволяет в настоящее время получить наиболее приближенное к эксперименту, хотя и математически нестрогое, описание нелинейных структур на разрывах.

Существует еще один подход к исследованию устойчивости разрывов, идея которого восходит к работе Дж. Уизема [63], предложившего приближенный способ описания движения УВ по каналу переменного сечения. Рассмотрим, следуя [8], в качестве стенок канала две близкие параллельные линии тока, пересекающие плоскую поверхность разрыва. Если в начальный момент времени эта поверхность возмущена, то рассматриваемые линии тока перестают быть параллельными. Пусть участок поверхности разрыва, заключенный в выделенной трубке тока, является выпуклым в сторону набегающего потока. Если его скорость, вычисленная в приближении Дж. Уизема, больше соответствующей скорости плоского фронта, то рассматриваемое возмущение будет расти со временем и разрыв следует признать неустойчивым.

Достоинством описанного выше метода является его сравнительная простота и возможность получения аналитических результатов как в линейном, так и в нелинейном приближении. Метод позволяет получить правильные значения границ области неустойчивости в обычной и релятивистской [96] газовой динамике, он дает хорошо согласующиеся с экспериментом результаты при исследовании неустойчивости сходящейся сферической волны [97, 98]. Критерии неустойчивости, соответствующие рассматриваемому приближению, могут быть сформулированы и в общем случае для произвольной системы законов сохранения (1.1) [96]. В то же время в рассматриваемом приближении не удается выявить режим нейтральной устойчивости.

Многие факторы (способ инициирования, конечность скоростей химических реакций или каких-либо иных физико-химических процессов, неравновесность излучения, пристеночные эффекты, сильная нелинейность и т. д.), влияние которых на поведение сильных разрывов не вызывает сомнений и многократно подтверждено экспериментами, могут быть учтены только путем численного моделирования, проведенного в рамках достаточно полных систем уравнений (нестационарные двух- или трехмерные уравнения Эйлера или Навье — Стокса).

Не имея возможности сколько-нибудь подробно проанализировать многочисленные работы, относящиеся к численному моделированию течений с разрывами, остановимся только на некоторых, наиболее тесно связанных с вопросами устойчивости результатах.

Так, в численном эксперименте удалось проследить возникновение многофронтовой детонационной волны и такие характерные детали этой структуры, как поперечные ударные волны и зоны непрореагировавшей смеси [99—102]. Показано, что ячеистая структура может возникать из первоначально плоской ДВ за счет возбуждения и усиления поперечных акустических мод под действием экзотермических реакций [101, 102]. Детально изучено образование сложных вихревых структур в совершенном газе в результате взаимодействия плоской УВ и контактного разрыва [103] (различные варианты неустойчивости Рихтмайера — Мешкова). Численно проанализировано образование ячеистых структур на фронтах медленного горения [104, 105].

Если численные эксперименты, проводимые в рамках модели идеального совершенного газа, позволяют детально изучить и понять механизм формирования той или иной структуры и часто оказываются более информированными, чем физический эксперимент, то в более сложных моделях, включающих физико-химические процессы [99—102, 104, 105], полученные результаты пока не выходят за рамки понимания существа изучаемых явлений, достигнутого в физическом эксперименте. Кроме того, практически отсутствуют связь и сопоставление численных и аналитических результатов. Поэтому до сих пор остается открытым вопрос о том, что происходит с неустойчивыми или нейтрально устойчивыми в линейном приближении разрывами на сильно нелинейной стадии развития неустойчивости. В частности, неясно, может ли наступить стабилизация разрыва, приводящая к образованию сложной, но квазирегулярной структуры типа ячеек, или произойдет «размывание» разрыва в нерегулярную, турбулизованную зону. Неясно также, как будет устроено решение тех или иных задач, содержащих неустойчивые разрывы, например, автомодельной задачи о плоском поршне или задачи об обтекании сферы, когда один из участков отошедшей УВ является неустойчивым. В связи с этим наряду с прямым численным моделированием большой интерес представляли бы и аналитические подходы к решению этих принципиальных задач.

Авторы благодарят Н. В. Солдатову за помощь при оформлении статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jeffrey A.* Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves. L.: Pitman, 1978. 230 p.
2. *Majda A.* Compressible fluid flow and systems of sonservation laws in several space variables. N. Y.: Springer, 1984. 159 p. (Appl. Math. Sci. V. 53).
3. *Majda A.* The existence and stability of multi-dimensional shock fronts//Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 4. № 3. P. 342—344.
4. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций//Бюл. МГУ. Секц. А. Математика и механика. 1938. Т. 1. № 7. С. 1—72.

5. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений//Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 87—158.
6. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391 с.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws. II//Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 4. P. 537—566.
10. *Курант Р., Фридрихс К. О.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
11. *Галин Г. Я.* К теории ударных волн//Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 55—58.
12. *Smith R. G.* The Riemann problem in gas dynamics//Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 249. № 1. P. 1—50.
13. *Ахиезер Л. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В.* Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике//ЖЭТФ. 1958. Т. 35. Вып. 3. С. 731—737.
14. *Сыроватский С. И.* Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике//ЖЭТФ. 1958. Т. 35. Вып. 6. С. 1466—1470.
15. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* О некоторых свойствах ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн//ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 793—798.
16. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
17. *Куликовский А. Г.* Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура//Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1988. № 182. С. 261—290.
18. *Куликовский А. Г.* О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике//ПММ. 1968. Т. 32. № 6. С. 1125—1131.
19. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме//Бюлл. МГУ. 1937. Секц. А. Т. 1. № 6. С. 1—26.
20. *Новиков С. С., Рязанцев Ю. С.* О существовании и единственности решения системы уравнений тепловой теории горения//ПМТФ. 1965. № 4. С. 86—88.
21. *Matalon M., Matcowsky B. J.* Flames as gasdynamic discontinuities//J. Fluid. Mech. 1982. V. 124. P. 239—259.
22. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизующих газ//Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. № 1. С. 52—55.
23. *Бармин А. А., Куликовский А. Г.* Об ударных волнах, ионизующих газ при наличии произвольно ориентированного магнитного поля//Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969. С. 35—48.
24. *Куликовский А. Г.* О структуре ударных волн//ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 631—641.
25. *Дьяков С. П.* Об устойчивости ударных волн//ЖЭТФ. 1954. Т. 27. № 3. С. 288—295.
26. *Брушлинский К. В.* Неустойчивость сходящейся сферической ударной волны//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22. № 6. С. 1468—1479.
27. *Иорданский С. В.* Об устойчивости плоской стационарной ударной волны//ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 465—472.
28. *Erpenbeck J. J.* Stability of step shocks//Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 10. P. 1181—1187.
29. *Ландау Л. Д.* К теории медленного горения//ЖЭТФ. 1944. Т. 14. № 6. С. 240—245.
30. *Gardner C. S., Kruskal M. D.* Stability of magnetohydrodynamic shocks//Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 5. P. 700—706.
31. *Синкевич О. А.* Устойчивость плоской ионизующей ударной волны//Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. № 1. С. 48—50.
32. *Егорушкин С. А., Куликовский А. Г.* Об устойчивости решений некоторых краевых задач для гиперболических уравнений//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 40—51.
33. *Филиппова О. Л.* Устойчивость плоских МГД ударных волн//Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 616.
34. *Филиппова О. Л.* Устойчивость плоских МГД ударных волн в идеальном совершенном газе//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 6. С. 128—136.

35. *Kreiss H.-O.* Initial boundary value problems for hyperbolic systems//Communs Pure and Appl. Math. 1970. V. 23. № 3. P. 277—296.
36. *Majda A., Oscher S.* Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary//Communs Pure and Appl. Math. 1975. V. 28. № 5. P. 607—675.
37. *Блохин А. М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
38. *Griffiths R. W., Sandeman R. J., Hornung H. G.* The stability of shock waves in ionizing and dissociating gases//J. Phys. D: Appl. Physics. 1976. V. 9. № 12. P. 1681—1691.
39. *Егорушкин С. А., Успенский В. С.* Влияние опережающего излучения на устойчивость сильных ударных волн в газах с произвольным уравнением состояния//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 125—133.
40. *Егорушкин С. А., Пекуровский М. Л., Успенский В. С.* Неустойчивость сильных ударных волн в одноатомных газах//Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 1. С. 39—41.
41. *Егорушкин С. А., Успенский В. С.* О свойствах сильных ударных волн в одноатомных газах//Хим. физика. 1992. Т. 11. № 7. С. 1013—1020.
42. *Glass I. I., Liu W. S.* Effects of hydrogen impurities on shock structure and stability in ionizing monatomic gases//J. Fluid. Mech. 1978. V. 84. Pt 1. P. 55—77.
43. *Тумакаев Г. К., Масленников В. Г., Серова Б. В.* О неустойчивости течения за ударными волнами большой интенсивности в одноатомных газах//Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. Вып. 6. С. 354—358.
44. *Барышников А. С., Бедин А. П., Масленников В. Г., Мишин Г. И.* О неустойчивости фронта головной ударной волны//Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5. Вып. 5. С. 281—284.
45. *Тумакаев Г. К.* Систематизация аномальных явлений в ударно нагретых одноатомных газах. Природа их возникновения и развития//Высокотемпературные, газодинамические, ударные трубы и ударные волны: Матер. междунар. школы-семинара. Минск, 1982. С. 154—160.
46. *Кузнецов Н. М., Алиева И. А. С.* К устойчивости движения ударной волны в каналах//Хим. физика. 1988. Т. 7. № 3. С. 377—381.
47. *Алиева И. А., Андреев Е. А.* Об устойчивости ударных волн в инертных газах//ЖТФ. 1987. Т. 57. № 6. С. 1172—1174.
48. *Meier P., Sandeman R. J.* Interferometric studies of shock waves into argon up to 17 km/sec. in the free piston double diafragm Shock Tube//Modern Developments in Shock Tube Research: Proc. 10th Intern. Shock Tube Symp. Kyoto. 1975. P. 328—335.
49. *Glass I. I., Liu W. S., Takayama K., Brimelow P. I.* Interaction of shock structure with shock-induced quasi-steady laminar sidewall and flat-plate boundary layer flows in ionizing argon. Shock Tubes and Waves//Proc. 12th Intern. Symp., Jerusalem, 1979. Jerusalem: Magnes Press, 1980. P. 232—241.
50. *Erpenbeck J. J.* Stability of steady-state equilibrium detonations//Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 5. P. 604—614.
51. *Majda A., Rosales R.* A theory of spontaneous Mach stem formation in reacting shock frouts. I. The basic perturbation analysis//SIAM Journal Appl. Math. 1983. V. 43. № 6. P. 1310—1334.
52. *Васильев А. А., Митрофанов В. В., Топчиян М. Е.* Детонационные волны в газах//Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23. № 5. С. 109—131.
53. *Синкевич О. А.* Устойчивость плоской ионизирующей ударной волны в магнитном поле//Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 1. С. 122—128.
54. *Зубцов В. М., Синкевич О. А.* Границы устойчивости ударной волны в поперечном магнитном поле//Теплофизика высоких температур. 1975. Т. 13. № 6. С. 1286—1288.
55. *Зубцов В. М., Синкевич О. А.* Устойчивость плоской ионизующей ударной волны в продольном магнитном поле//Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 2. С. 195—198.
56. *Истратов А. Г., Либрович В. Б.* О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени//ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 451—466.
57. *Germain P., Guiraud J.-P.* Conditions de choc et structure desondes de choc dans un ecoulement stationnaire de fluide dissipatif//Publ. O. N. E. R. A., 1962. № 105. 45 p.
58. *Зайдель Р. М.* Развитие возмущений в плоских ударных волнах//ПМТФ. 1967. № 4. С. 30—39.
59. *Башкиров А. Г.* Поверхностные свойства и устойчивость ударных волн в газах//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 748—757.
60. *Markstein G. H.* Experimental and theoretical studies of flame-front stability//J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18. № 3. P. 199—209.

61. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
62. *Маркштейн Дж. Г., Генош Г., Патнэм А. А.* Нестационарное распространение пламени. М.: Мир, 1968. 437 с.
63. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
64. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
65. *Коршунов С. Е.* Об устойчивости ударных волн с конечной зоной релаксации//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 176—179.
66. *Левин В. А., Соломаха Б. П., Чикова С. П.* Об устойчивости плоской детонационной волны//Тр. Ин-та механики МГУ. 1974. № 32. С. 44—59.
67. *Галин Г. Я., Куликовский А. Г.* Об устойчивости течений, возникающих при распадении произвольного разрыва//ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 95—102.
68. *Бармин А. А., Гусарова О. Л.* Устойчивость течений с поверхностями разрыва//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 10—18.
69. *Мишин Г. И., Бедин А. П., Ющенкова Н. И. и др.* Аномальная релаксация и неустойчивость ударных волн в газах//ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 11. С. 2315—2324.
70. *Ющенкова Н. И.* О механизме релаксационной неустойчивости в ударных волнах инертных газов//Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. Вып. 21. С. 1283—1288.
71. *Houwing A. F. P., McIntyre T. J., Taloni P. A., Sandeman R. J.* On the population of the metastable behind unstable shock wave in ionizing argon//J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 319—337.
72. *Железняк М. Б., Филимонова Е. А.* Влияние ассоциативной ионизации на релаксацию за фронтом сильных ударных волн в аргоне//Теплофизика высоких температур, 1986. Т. 24. № 6. С. 1203—1205.
73. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
74. *Иорданский С. В., Куликовский А. Г.* О движении жидкости, содержащей мелкие частицы//Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С. 12—19.
75. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Об устойчивости распространения пламени//ПММ. 1959. Т. 21. Вып. 6. С. 856—859.
76. *Жиляев А. М., Кузнецов Н. М.* К устойчивости ударных волн в химически реагирующем газе//Мат. моделирование. 1991. Т. 3. № 7. С. 71—77.
77. *Вольперт В. А.* Нелинейная устойчивость волн горения//Тепло- и массообмен в химически реагирующих системах. Матер. междунар. школы-семинара. Минск: Ин-т тепло- и массообмена, 1988. Ч. 1. С. 31—36.
78. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г.* О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени//ПМТФ. 1962. № 4. С. 21—26.
79. *Lewis B., Elbe G.* On the theory of flame propagation//J. Chem. Phys. 1934. V. 2. № 8. P. 537—546.
80. *Пухначев В. В.* Об устойчивости детонации Чепмена — Жуге//ПМТФ. 1963. № 6. С. 66—73.
81. *Блохин А. М., Роменский Е. И.* Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса//Изв. СО АН СССР. 1978. № 13. Сер. техн. наук, вып. 3. С. 87—97.
82. *Русанов В. В., Шаракшанэ А. А.* Исследование линеаризованной нестационарной модели обтекания бесконечного клина. Препринт № 103. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1980. 29 с.
83. *Бармин А. А., Куликовский А. Г.* Изменение скорости газа в ионизующих ударных волнах. Задача о проводящем поршне//ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 3. С. 495—499.
84. *Бармин А. А., Успенский В. С.* Развитие пульсационных режимов в одномерных нестационарных МГД-течениях с выключением электропроводности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 115—122.
85. *Егорушкин С. А.* Распад плоской ударной волны в двупараметрической среде с произвольным уравнением состояния//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 147—153.
86. *Fowles G. R., Houwing A. F. P.* Instabilities of shock and detonation waves//Phys. Fluids. 1984. V. 27. № 8. P. 1982—1990.
87. *Кузнецов Н. М.* К теории устойчивости ударных волн//ЖЭТФ. 1985. Т. 88. Вып. 2. С. 470—486.
88. *Gordner C. S.* Comment on «Stability of step shocks»//Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 9. P. 1366—1367.
89. *Fowles G. R.* Conditional stability of shock waves — a creterion for detonation//Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 2. P. 227—238.

90. *Кузнецов Н. М.* Критерий неустойчивости ударной волны, поддерживаемой поршнем//Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 65—68.
91. *Majda A., Rosales R.* A theory for spontaneous Mach — stem formation in reacting shock fronts. II. Steady-wave bifurcations and evidence for breakdown//Stud. Appl. Math. 1984. V. 71. № 2. P. 117—148.
92. *Егорушкин С. А.* Нелинейная неустойчивость спонтанно излучающей ударной волны//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 110—118.
93. *Борисов А. А., Шарыпов О. В.* Моделирование автоволновых процессов в химически неравновесных средах//Гидродинамика турбулентных течений. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1989. С. 5—42.
94. *Денисов Ю. Н.* Газодинамика детонационных структур. М.: Машиностроение, 1989. 176 с.
95. *Васильев А. А., Николаев Ю. А.* Модель ячейки многофронтовой газовой детонации//Физика горения и взрыва. 1976. Т. 12. № 5. С. 744—754.
96. *Anile A. M., Russo G.* Corrugation stability for plane relativistic shock waves//Phys. Fluids. 1986. V. 19. № 9. P. 2847—2852.
97. *Fujuwara Kuzuhito, Matsuo Hideo, Hiroe Tetsuyuki.* Stability of imploding shocks//J. Japan. Soc. Aeronaut. and Space Sci. 1991. V. 39. № 445. P. 81—90.
98. *Барышников А. С., Васильев Н. Ю.* Эволюция нелинейных возмущений фронта и устойчивость сходящейся ударной волны в реальных средах. Препринт № 1517. Л.: физ.-техн. ин-т, 1991. 61 с.
99. *Guirguis R., Oran E. S., Kailasanath K.* Numerical simulations of the cellular structure of detonations in liquid nitromethane. Regularity of the cell structure//Combust. and Flame. 1986. V. 65. № 3. P. 339—365.
100. *Kailasanath K., Oran E. S., Boris J. P., Young T. R.* Determination of detonation cell size and the role of transverse waves in two-dimensional detonations//Combust. and Flame. 1985. V. 61. № 3. P. 199—209.
101. *Oran E. S., Young T. R., Boris J. P. et al.* A study of detonation structure: the formation of unreacted gas pockets//Proc. 19th Sympos. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh: Combust. Inst., 1982. P. 573—582.
102. *Sugimura Tadagoshi, Fujuwara Toshitaka, Lee J. M.* Cellular detonation — instability and substructure//Mem. Fac. Eng. Nagaya Univ. 1990. V. 42. № 2. P. 360—373.
103. *Войнович П. А., Евтюхин Н. В., Жмакин А. И. и др.* Расслоение ударных волн в неоднородных средах//Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23. № 1. С. 77—80.
104. *Игнатьев С. М., Петухов Ю. И.* Нелинейный анализ ячеистой структуры фронта пламени с учетом гидродинамических и диффузионно-тепловых процессов//Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25. № 5. С. 58—62.
105. *Зулинян Г. А., Махвиладзе Г. М., Мелихов В. И.* Влияние числа Льюиса на закономерности распространения пламени//Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28. № 6. С. 46—51.

Москва

Поступила в редакцию
20.III.1995