

УДК 532.135:539.374

© 1996 г. А. В. ГНОВОЙ, Д. М. КЛИМОВ, А. Г. ПЕТРОВ,  
В. М. ЧЕСНOKОВ

## ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕД В УЗКИХ КАНАЛАХ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Дается вывод уравнений движения сплошной среды в тонком слое при заданной функциональной зависимости тензора напряжений от тензора скорости деформации. В приближении тонкого слоя рассматривается общая задача течения вязкопластичной среды, когда материальные точки граничных поверхностей смещаются в поперечном направлении по заданному закону.

Получены выражения для проекций скорости точек среды, давления, расхода через любое сечение канала, мощности внешних сил в зависимости от закона деформирования границ. Поставлена задача об определении закона деформирования границ канала при заданном законе распределения давления на границах. Выражения расхода среды, давления и мощности внешних сил, записанные как функционалы расстояния между стенками канала, позволяют ставить задачи управления течением вязкопластичной среды в тонких слоях и оптимизации этих процессов.

В [1] изложен метод исследования течений вязкопластичных сред при сложных граничных условиях. Метод основан на введении понятия эквивалентной вязкости и последующем ее аналитическом определении, что позволяет обосновать переход от уравнений Генки [2] к уравнениям Навье — Стокса в задачах анализа течений вязкопластичных сред при относительно малых числах Сен-Венана. Имеется ряд работ, в которых изучаются плоские течения вязкопластичных сред при различных граничных условиях [3, 4].

В настоящей работе рассмотрен другой способ решения задач течений вязкопластичных сред в тонких слоях при сложных граничных условиях, основанный на замене точных уравнений Генки [2] полученными приближенными уравнениями без ограничений на величину числа Сен-Венана.

1. Рассмотрим тонкий слой вязкопластичной среды, ограниченный деформируемой поверхностью, в котором берется элемент со следующими характерными размерами  $l \sim l_1 \sim l_2, l_3 \ll l$  (фиг. 1). Введем следующие характерные параметры:  $V$  — скорость течения в плоскостях параллельных плоскости  $xu$ , касательной к поверхности слоя,  $U$  — скорость течения в направлении оси  $z$ , перпендикулярной поверхности слоя,  $\Theta$  — напряжение в точках среды,  $\Delta p$  — перепад давления,  $T$  — время.

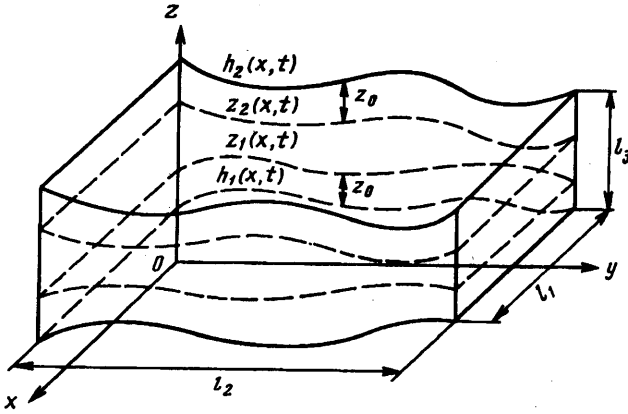
Перейдем в уравнения движения сплошной среды в напряжениях к безразмерным переменным по формулам

$$x = lx', \quad y = ly', \quad z = l_3 z', \quad t = Tt', \quad v_x = Vu_x, \quad (1.1)$$

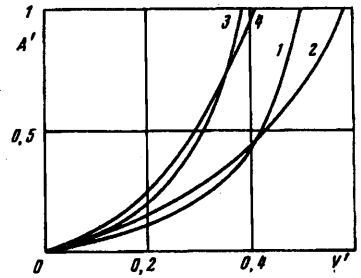
$$v_y = Vu_y, \quad v_z = Uu_z, \quad \tau_{ij} = -\Delta p p' \delta_{ij} + \Theta \tau'_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \delta_{ii} = 1$$

Здесь штрихами обозначены безразмерные координаты, время, давление и напряжения, а через  $u_x, u_y, u_z$  — безразмерные проекции скорости точек среды.



Фиг. 1



Фиг. 2

Предполагая среду несжимаемой и считая, что вид безразмерного уравнения несжимаемости такой же, как и размерного, получим из последнего

$$V/l \sim U/l_3, \quad U \ll V \quad (1.2)$$

Подставим соотношения (1.1) и (1.2) в уравнения движения сплошной среды в напряжениях, полагая, что выполняются условия

$$\frac{l_3}{l} \ll 1, \quad \frac{\rho U^2 l}{l_3 \Theta} \ll 1, \quad \frac{\rho U^2}{\Theta} \ll 1, \quad \frac{\Delta p}{\Theta} \gg 1, \quad \frac{\Delta p}{\Theta} \gg \frac{\rho U l_3}{T \Theta}$$

Пренебрегая в этих уравнениях слагаемыми, коэффициенты которых являются малыми величинами, получим в напряжениях уравнения движения среды в тонком слое

$$\frac{\rho U l}{T \Theta} \frac{\partial u_x}{\partial t'} = -\frac{\Delta p l_3}{\Theta} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial z'}, \quad \frac{\rho U l}{T \Theta} \frac{\partial u_y}{\partial t'} = -\frac{\Delta p l_3}{\Theta} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial z'} \quad (1.3)$$

$$0 = \frac{\partial p'}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x'} + \frac{\partial u_y}{\partial y'} + \frac{\partial u_z}{\partial z'} = 0$$

Если в первых двух уравнениях системы (1.3) положить  $\rho U l / T \Theta \ll 1$ , то получим уравнения стационарного или квазистационарного движения сплошной среды в тонком слое

$$\frac{\Delta p l_3}{\Theta} \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial z'}, \quad \frac{\Delta p l_3}{\Theta} \frac{\partial p'}{\partial y'} = \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial z'} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x'} + \frac{\partial u_y}{\partial y'} + \frac{\partial u_z}{\partial z'} = 0$$

В случае плоского движения изотропной сплошной среды, например параллельно плоскости,  $\epsilon'_{yx} = 0$ ,  $\tau'_{yz} = 0$ . Таким образом, уравнения (1.4) примут вид

$$\frac{\Delta p}{\Theta} \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial z'}, \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} = \frac{\partial p'}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x'} + \frac{\partial u_z}{\partial z'} = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения (1.3), (1.4) и (1.5) являются аналогами уравнений Рейнольдса [5, 6] для вязкой жидкости.

2. Рассмотрим пример течения вязкопластичной среды в тонком слое между двумя материальными гибкими деформируемыми оболочками, уравнения которых  $z = h_1(x, t)$  и  $z = h_2(x, t)$ ;  $z \in [h_1, h_2]$  (фиг. 1). При выполнении условий

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} \sim \frac{l_3}{l} \ll 1, \quad h_2 - h_1 \sim l_3 \ll l \quad (i = 1, 2)$$

можно применить уравнения (1.5), которые запишем с помощью обратного перехода к размерным переменным по равенствам (1.1)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

В силу неравенства  $l_3/l \ll 1$ , компонента касательного напряжения

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (2.2)$$

Примем, что материальные точки границ, определяемые уравнениями  $z = h_1(x, t)$  и  $z = h_2(x, t)$ , движутся только вдоль оси  $z$ , т. е. на границе  $v_x = 0$ .

Это граничное условие можно обосновать, если граничная  $z = h_2(x, t)$  оболочка является нерастяжимой с фиксированной координатой  $x = 0$ . При выполнении вышеуказанных условий тонкого слоя длина дуги  $s$  верхней граничной оболочки от точки  $x = 0$  до точки  $x$  имеет вид

$$s = \int_0^{x(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2} dx \approx x(t) + \int_0^{x(t)} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2 dx$$

Принимая во внимание условия нерастяжимости  $ds/dt = 0$ , оценку  $\partial h_2/\partial x \sim l_3/l \ll 1$  и теорему о среднем, получим

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = |v_x| \sim \frac{l_3}{l} v_z$$

Таким образом, граничные условия для всей области  $z \in [h_1, h_2]$  и  $x \in [x_1, x_2]$  можно записать в виде

$$z = h_i(x, t): \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial h_i}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$x = x_1: \quad p = p_1 \quad \text{или} \quad Q(x_1, t) = Q_0(t) \quad (2.4)$$

$$x = x_2: \quad p = p_2$$

Здесь  $\psi(x, z, t)$  — функция тока,  $i = 1, 2$ ,  $p_1$  и  $p_2$  — давления в сечениях  $x = x_1$  и  $x = x_2$ ,  $Q(x_1, t)$  — расход среды в сечении  $x = x_1$ .

Из второго граничного условия (2.3) получим выражение для функций тока  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на границах  $z = h_1(x, t)$  и  $z = h_2(x, t)$  соответственно, а также для расхода  $Q(x, t) = \psi_2 - \psi_1$  через сечение в точке  $x$

$$\psi_1 = -\int_{x_1}^x \dot{h}_1 dx, \quad \psi_2 = Q(x_1, t) - \int_{x_1}^x \dot{h}_2 dx \quad (2.5)$$

$$Q = Q(x_1, t) - 2 \int_{x_1}^x \dot{h} dx \quad (2.6)$$

$$h = \frac{1}{2} (h_2 - h_1) \quad (2.7)$$

Здесь через  $Q(x, t)$  обозначен расход в сечении  $x = x_1$ , произвольную постоянную в функции тока выбираем из условия  $\psi(x_1, h_1) = 0$ . Касательное напряжение  $\tau_{xz}$ , определенное выражением (2.2) и записанное через функцию тока, примет вид

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.1) следует, что  $\partial p / \partial x$  не зависит от  $z$ , а следовательно,  $\tau_{xz}$  есть линейная функция  $z$ . Введя в рассмотрение границы квазитвердой области  $z = z_1(x, t)$  и  $z = z_2(x, t)$ , на которых функция  $\tau_{xz}(x, z, t)$  принимает по абсолютной величине предельное значение  $\tau_0$ , найдем

$$\tau_{xz} = \operatorname{sign} Q \frac{\tau_0}{z_1 - z_2} (2z - z_1 - z_2) \quad (2.9)$$

Из первого уравнения (2.1) и (2.9) находим градиент давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \operatorname{sign} Q \frac{2\tau_0}{z_1 - z_2} \quad (2.10)$$

Учитывая непрерывность функции  $\psi(x, z)$  в слое  $z \in [h_1, h_2]$  и равенство нулю внутри квазитвердой области интенсивности скоростей деформации, из (2.8), (2.9) и граничных условий (2.5) для функции тока  $\psi(x, z, t)$  получим следующее выражение:

$$\psi = \psi^\circ + \frac{\tau_0 \operatorname{sign} Q}{2\mu (h - z_0)} \begin{cases} -\frac{1}{3}(x - z_2)^3 - (h^\circ - z)z_0^2, & z \in [z_2, h] \\ -(h^\circ - z)z_0^2, & z \in [z_1, z_2] \\ -\frac{1}{3}(z - z_1)^3 - (h^\circ - z)z_0^2, & z \in [h_1, z_1] \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\psi^\circ = 1/2 (\psi_1 + \psi_2) \quad h^\circ = 1/2 (h_1 + h_2)$$

$$z_1 - h_1 = h_2 - z_2 = z_0 \quad (2.12)$$

Из (2.9) следует, что границы квазитвердой области  $z_1$  и  $z_2$  находятся на равных расстояниях от границ области (фиг. 1). Вычисляя на основании (2.11) значения функции тока  $\psi$  на границах течения  $\psi_2 = \psi(x, h_2)$  и  $\psi_1 = \psi(x, h_1)$  с учетом граничных условий (2.5) и вычитая из первого значения второе, получим уравнение для определения границы квазитвердой области  $z_0$ , которое удобно представить в безразмерной форме

$$Z_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} Z_0\right) = a(1 - Z_0) \quad (2.13)$$

$$a = \frac{\mu |Q|}{\tau_0 h^2}, \quad Z_0 = \frac{z_0}{h} \quad (2.14)$$

Таким образом, безразмерное расстояние  $Z_0$  границы квазитвердой области от границы области течения зависит от одного безразмерного параметра  $a$ , обратного местному числу Сен-Венана. При любом  $a \geq 0$  уравнение (2.13) имеет единственный корень, удовлетворяющий условию  $0 \leq Z_0 \leq 1$ , для которого можно получить следующие асимптотические разложения:

$$Z_0(a) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}(a+1)^{-1} + O\left(\frac{1}{a}\right)^4, & a \gg 1 \\ \sqrt{a} - \frac{1}{3}a + O(a^{3/2}), & a \ll 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Выражая в (2.10) градиент давления через функцию  $Z_0(a)$  с помощью (2.12) и (2.14), получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\text{sign } Q \tau_0}{h(1 - Z_0(a))} \quad (2.16)$$

Отсюда путем интегрирования в пределах  $[x_1, x]$  получаем выражение для определения перепада давления  $\Delta p$  на участке  $[x_1, x]$

$$\frac{\Delta p}{\tau_0} = - \int_{x_1}^x \frac{\text{sign } Q}{h} \frac{dx}{1 - Z_0(a)} \quad (2.17)$$

В приближении тонкого слоя проекция полного напряжения  $p_{xx}$  на ось  $z$  сводится только к давлению  $p_{xx} \approx -p$ . Поэтому соотношением (2.17) можно также пользоваться для расчета в каждый момент времени  $t$  распределения по координате  $x$  такого внешнего давления на стенки канала, который обеспечит деформацию стенки канала по заданному закону. Для получения зависимости между градиентом давления и законом деформирования стенок выразим  $Z_0(a)$  через  $\partial p / \partial x$  из (2.16) и подставим ее в уравнение (2.13)

$$\left( h \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0 \right)^2 \left( 2h \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0 \right) = -3\mu |Q| \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \quad (2.18)$$

$$\frac{2}{3} \Pi + \frac{1}{3\Pi^2} = a + 1, \quad \Pi = - \frac{h}{\tau_0} \frac{\partial p}{\text{sign } Q} \quad (2.19)$$

При любом  $a \geq 0$  уравнение (2.19) имеет три корня:  $\Pi_1 < \Pi_2 < \Pi_3$ . Первый корень отрицательный, остальные положительные. Асимптотическому решению (2.15) соответствует наибольший корень. Асимптотики для наибольшего корня  $\Pi(a)$  можно получить, подставив асимптотические разложения (2.15) в (2.16)

$$\Pi(a) = \begin{cases} \frac{3}{2}(a+1) - \frac{2}{9(a+1)^2} + O\left(\frac{1}{a+1}\right)^5, & a \gg 1 \\ 1 + \sqrt{a} + \frac{2}{3}a + O(a^{3/2}), & a \ll 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Таким образом, по известному закону деформирования  $h(x, t)$ , функция  $\Pi$  и градиент давления  $\partial p / \partial x$  находятся из простых алгебраических уравнений (2.19), (2.18) или приближенно из асимптотических разложений (2.20).

Из уравнения (2.18) легко определяется расход  $Q$  как функция  $h$  и  $\partial p / \partial x$ . Отсюда при заданном распределении давления найдется закон деформирования из уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q \left( h, \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right]$$

Мощность внешних сил, затрачиваемая на перемещение среды по участку канала  $[x_1, x]$ , определяется выражением

$$W = \int_{x_1}^x \frac{\tau_0 |Q|}{h} \frac{dx}{1 - Z_0(a)} \quad (2.21)$$

Аналитические выражения (2.6), (2.13), (2.17)–(2.21) дают математическую постановку задачи оптимального управления. При этом функцию  $h(x, t)$  можно рассматривать как управляющую функцию, а расход  $Q$ , перепад давления  $\Delta p$  и мощность  $W$  — оптимизируемые функционалы. С использованием уравнений (2.18), (2.19) можно оптимизировать функционалы  $Q$  и  $W$ , рассматривая функцию  $p(x, t)$  как управляющую.

3. Рассмотрим задачу определения работы внешних сил, необходимых для вытеснения данного объема вязкопластичной среды из щели с непроницаемой левой стенкой.

Пусть в начальный момент имелся тонкий прямоугольный слой  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq z \leq h_0$ , заполненный вязкопластичной средой. Левая стенка  $x = 0$  твердая и непроницаемая, правая щель  $x = l$  открыта. Вязкопластичная среда вытесняется через правую щель при непрерывном деформировании границы слоя по закону

$$\frac{h}{h_0} = f(x', t'), \quad x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{t}{T} \quad (3.1)$$

где  $T$  — время процесса деформирования. Объем  $V$ , выдавленный за время  $T$ , можно определить по формуле

$$V' = \frac{V}{V_0} = 1 - \int_0^1 f(x', t') dt', \quad V_0 = 2h_0l \quad (3.2)$$

Работа  $A$ , произведенная за время  $T$ , определится интегрированием мощности  $W$  (2.2) по времени. Тогда из (2.2) получим

$$A' = \frac{A}{A_0} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f_1| dx' dt'}{f(1 - Z_0(a))}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^x f(x', t') dx', \quad A_0 = 2V_0 p \quad (3.3)$$

Параметр  $a$  и расход  $Q$  в сечении  $x'$  с помощью (2.6), (2.16), (3.1) и (3.3) можно выразить через безразмерные функции  $f$  и  $f_1$

$$Q = -\frac{2h_0l}{T} f_1(x', t'), \quad a = \frac{2f_2}{f^2 S}, \quad S = \frac{\tau_0 h_0 T}{\mu l} \quad (3.4)$$

где  $S$  — число Сен-Венана.

Приведем два примера вытеснения вязкопластичной среды.

*Пример 1.* Вытеснение по экспоненциальному закону

$$f(x', t') = e^{-\alpha x' t'} \quad (3.5)$$

*Пример 2.* Вытеснение параллельными пластинами, движущимися по закону

$$f(t') = \frac{(1 - e^{-\alpha t'})}{\alpha t'} \quad (3.6)$$

Нетрудно проверить по формуле (3.2), что за время  $T$  в обоих примерах вытесняется одинаковый объем вязкопластичной среды, равный

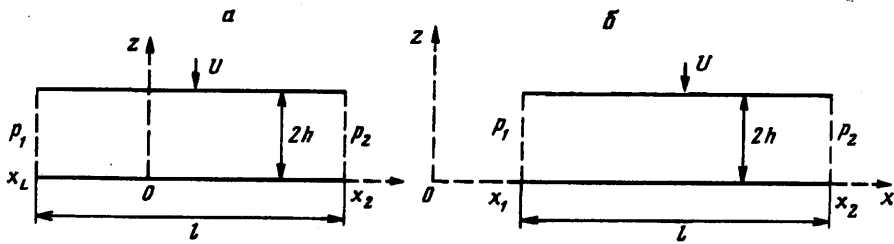
$$V' = \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha} - 1 + \alpha) \quad (3.7)$$

Работа, затраченная на вытеснение этого объема, определяется численно по формулам (3.3).

На фиг. 2 сравниваются работы  $A'$ , производимые по вытеснению объема  $V'$  при законах деформирования соответственно (3.5) и (3.6). Кривые 1 и 3 соответствуют зависимостям  $A'$  ( $V'$ ) при экспоненциальном законе деформирования (3.5) при  $S = 0,5$  и 2, кривые 2 и 4 — зависимости  $A'$  ( $V'$ ) при выдавливании параллельными пластинами (3.6) соответственно при  $S = 0,5$  и 2.

Как следует из фиг. 2, при вытеснении объема существует значение  $V_*$ , такое, что при  $V' < V_*$  ( $S$ ) энергетически более выгоден экспоненциальный способ деформирования. При  $V' > V_*$  ( $S$ ) более выгодно выдавливание двумя параллельными пластинами.

Таким образом, наиболее простой способ вытеснения среды параллельными пластинами оказывается менее энергетически выгоден на начальном участке вытеснения. При этом с увеличением числа Сен-Венана величина этого участка возрастает.



Фиг. 3

4. Рассмотрим задачу несимметричного вытеснения вязкопластичной среды из узкого канала параллельными пластинами при наложенном перепаде давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  (фиг. 3). Задача симметричного выдавливания решалась в [7] в приближении  $h/l \ll 1$  и  $S \gg 1$ . При этом решение для вязкопластичного течения искалось как поправка к известному решению Прандтля для чисто пластичного течения.

Пусть длина пластин  $l$ , расстояние между пластинами  $2h$ , пластины сближаются со скоростью  $U = |2\dot{h}|$ , в точке  $x = x_1$  давление  $p_1$ , а в точке  $x_2$  давление  $p_2$ . Будем считать для определенности, что  $p_1 \geq p_2$ . Начало координат поместим в сечение, в котором расход равен нулю. Тогда в сечениях  $x = x_i$  ( $i = 1, 2$ ) расходы  $Q(t, x_i)$  определяются из (2.6), местные обратные числа Сен-Венана  $a_i$  — из (2.17), а давления  $p_1$  и  $p_2$  — из (2.19). В рассматриваемом случае получим

$$Q(t, x_i) = Q_i = -2\dot{h}x_i, \quad a_i = a_0 \frac{|x_i|}{l}, \quad a_0 = \frac{\mu U l}{\tau_0 h^2} \quad (4.1)$$

$$p(x_i) = p_i = p_0 - \frac{\tau_0 l}{h a_0} P(a_i), \quad P(a) = \int_0^a \frac{da}{1 - Z_0(a)} \quad (4.2)$$

Координаты концов пластин  $x_1$  и  $x_2$  следует определить из системы уравнений

$$p(x_1) - p(x_2) = \Delta p, \quad x_2 - x_1 = l \quad (4.3)$$

Дадим решение системы уравнений (4.3) и затем всей задачи для случая  $a_0 \gg 1$ , для которого безразмерная функция  $P(a)$  с помощью (4.2) и (2.17) представляется в виде разложения

$$P(a) = \frac{3}{4} a^2 + \frac{3}{2} a - \frac{2}{9} + O\left(\frac{1}{a}\right) \quad (4.4)$$

С помощью (4.4) и (4.1), (4.2) система (4.3) приведет к следующему безразмерному виду:

$$\frac{3}{4} (a_2^2 - a_1^2) + \frac{3}{2} (a_2 - a_1) = \Pi_0 a_0$$

$$a_1 + a_2 = a_0, \quad \Pi_0 \leq \frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{2} \quad (4.5)$$

$$a_2 - a_1 = a_0, \quad \Pi_0 \geq \frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{2}$$

$$\Pi_0 = \frac{\Delta p h}{\tau_0 l}$$

Неравенства в (4.5) для безразмерных чисел  $\Pi_0$  и  $a_0$  соответствуют двум

случаям, когда сечение с нулевым расходом  $x = 0$  лежит внутри отрезка  $(x_1, x_2)$  и вне его. Нетрудно убедиться, что решение системы (4.5) имеет вид

$$a_2 = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + \frac{2\Pi_0 a_0}{3(a_0 + 2)}, & \Pi_0 \leq \frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \Pi_0 - 1 + \frac{1}{2} a_0, & \Pi_0 \geq \frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{2} \end{cases} \quad (4.6)$$

Координаты концов щели  $x_1, x_2$  и координату  $x$  можно выразить через  $a_1$  и  $a_2$  с помощью (4.1)

$$x_2 = \frac{la_2}{a_0}, \quad x_1 = \frac{l(a_2 - a_1)}{a_0}, \quad x = x_1 + d \quad (4.7)$$

где  $d$  — расстояние от левого края щели. Местное обратное число Сен-Венана  $a$  выражается через  $|x|$

$$a = \frac{a_0 |x|}{l} \quad (4.8)$$

По формулам (2.11), (2.15), (2.17) через параметр  $a$  в сечении  $x$  определяются функции тока, поле скорости, область квазитвердого ядра, давление

$$p = p_0 - \frac{\tau_0 h}{la_0} P(a) \quad (4.9)$$

С помощью (4.6)—(4.9) можно вычислить силу, действующую на пластину со стороны вытесняемой среды

$$F = \int_{x_1}^{x_2} p dx \quad (4.10)$$

Интегрированием по частям и переходом к безразмерному давлению (4.9) и безразмерной координате  $a$  (4.8) получим

$$F = p_2 x_2 - p_1 x_1 + F_0 \quad (4.11)$$

$$F_0 = - \int_{x_1}^{x_2} x \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{\mu U l^3}{2h^3} \begin{cases} \frac{a_0 + 3}{4a_0} + \frac{4\Pi_0^2 (a_0 + 1)}{3(a_0 + 2)^2}, & \Pi_0 \leq \frac{3}{4} (a_0 + 2) \\ 1 + \frac{3}{2a_0}, & \Pi_0 \geq \frac{3}{4} (a_0 + 2) \end{cases} \quad (4.12)$$

В случае симметричного истечения вязкопластичной среды  $p_1 = p_2$ ,  $\Pi_0 = 0$  и из (4.11) и верхнего равенства (4.12) получим

$$F_0 = \frac{\mu U l^3}{8h^3} \frac{a_0 + 3}{a_0} \quad (4.13)$$

Если в (4.12) положить  $a_0 \rightarrow \infty$  (вязкая жидкость), то соответствующие формулы для  $F_0$  примут вид

$$F_0 = \frac{\mu U l^3}{2h^3} \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{4\Delta p^2 h^6}{2\mu^2 U^3 l^4}, & \frac{\Delta p h^3}{\mu U l^2} \leq \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{\Delta p h^3}{\mu U l^2} \geq \frac{3}{4} \end{cases} \quad (4.14)$$



При замене неравенств в (4.11) и (4.14) точными равенствами, выражения для  $F_0$  из верхних и нижних равенств (4.11) и (4.14) совпадают.

Полученные результаты позволяют говорить об эффективности предложенного решения задач исследования плоских течений вязкопластичных сред в каналах и полостях с деформируемыми по произвольным законам границами. А именно, можно определить все необходимые параметры вязкопластичной среды в тонком слое: поля скоростей; поля давлений; границу квазитвердой области; расход среды через любое сечение; перепад давления между сечениями; силу, приложенную к границе со стороны среды; мощность внешних сил и другие параметры.

Предложенный способ может распространяться для решения аналогичных задач течений в тонких слоях широкого класса неньютоновских жидкостей с различной линейной связью тензора напряжений и тензора деформаций. Все такие задачи сводятся к решению единой общей системы уравнений движения (1.5).

Кроме того, полученные выражения расходов среды, давления и мощности внешних сил, записанные в виде функционалов расстояния между стенками канала, позволяют ставить задачи управления течением вязкопластичной среды в тонких слоях и оптимизации этих процессов.

Формулы (3.2) и (3.3) представляют методику сравнения энергетических затрат на вытеснение среды при различных законах деформирования границ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гноевой А. В., Климов Д. М., Чесноков В. М. Об одном методе исследования пространственных течений вязкопластичных сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 4. С. 150—158.
2. Hencky H. Z. Über landsame stationäre Strömungen in plastischen Massen mit Rücksicht auf die Vorgänge beim Walzen, Pressen und Ziehen von Metallen//Z. angew. Math. und Mech. 1925. В. 5. Н. 2. S. 115—124.
3. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластичного тела//Учен. зап. МГУ. Сер. Механика. 1940: Вып. 39. С. 3—81.
4. Вишняков В. И., Павлов К. Б., Романов А. С. Перистальтическое течение неньютоновской вязкопластичной жидкости в щелевом канале//Инж.-физ. журн. 1976. Т. 31. № 3. С. 499—505.
5. Слезкин Н. А., Тарг С. М. Обобщенные уравнения Рейнольдса//Докл. АН СССР. 1946. Т. 54. № 3. С. 205—208.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жадкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
7. Мясников В. П. О сдавливании вязко-пластического слоя жесткими плитами//Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 4. С. 92—96.

Москва

Поступила в редакцию  
22.11.1994