

УДК 532.528

© 1996 г. Л. М. ЗИГАНГАРЕЕВА, О. М. КИСЕЛЕВ

## КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ДИСКА ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

С помощью метода [1] решена задача о кавитационном обтекании диска по схеме Рябушинского осесимметричным дозвуковым потоком газожидкостной смеси. Приведены формулы, характеризующие зависимость основных параметров течения от числа кавитации, числа Маха на свободной поверхности и отношения объемных содержаний газа и жидкости в заторможенном потоке.

1. Сочетание не очень малых чисел кавитации с достаточно большими числами Маха при кавитационном обтекании препятствия потоком воды в обычных условиях не реализуется из-за того, что скорость звука в воде велика [1]. Поэтому кавитационное обтекание препятствия водой можно, как правило, исследовать, пользуясь моделью несжимаемой жидкости. Другая ситуация возникает при рассмотрении кавитационных течений газожидкостной смеси (газонасыщенной жидкости). Газожидкостные смеси часто встречаются в природе, создаются и используются в различных технологических процессах. Скорость звука в них обычно в десятки раз меньше, чем в «чистой» жидкости. Поэтому при исследовании кавитационных течений газожидкостных смесей необходим учет сжимаемости среды.

Простую математическую модель равновесного течения газожидкостной смеси можно получить на основе описания, приведенного в [2, § 32].

Пусть  $\alpha$  — объемная концентрация газа в смеси,  $\delta = \alpha/(1 - \alpha)$  — отношение объемных концентраций газа и жидкости,  $\rho$ ,  $\rho_G$ ,  $\rho_F$  — плотность смеси, газа и жидкости соответственно. По определению

$$\rho = \alpha \rho_G + (1 - \alpha) \rho_F \quad (1.1)$$

Считается, что отношение масс газа и жидкости в элементарном объеме смеси сохраняется, т. е.

$$\alpha \rho_G = \text{const} (1 - \alpha) \rho_F \quad (1.2)$$

Течение полагается изотермическим (при достаточно малом объемном газосодержании такое допущение вполне оправданно [3, с. 298]). Считается, что пузырьки газа полностью увлекаются жидкостью и что давление газа в пузырьке  $p_G$  совпадает с давлением жидкости, а следовательно, и с давлением смеси  $p$  в соответствующей точке (капиллярным давлением можно пренебречь). При сделанных допущениях

$$p = p_G = a_G^2 \rho_G, \quad a_G^2 = \text{const} \quad (1.3)$$

где  $a_G$  — скорость звука в газе.

Используя (1.3) и полагая  $\rho_F = \text{const}$ , из (1.2) получим

$$\delta = \frac{\delta_0}{s}, \quad \alpha = \frac{\delta_0}{s + \delta_0}, \quad s = \frac{p}{p_0} \quad (1.4)$$

где нижним индексом ноль отмечаются значения параметров в заторможенном потоке.

Из (1.1) и (1.4) следует

$$v = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(1 + \delta_0) s}{s + \delta_0} \quad (1.5)$$

Дифференцируя (1.5) по  $p$ , получим выражение для скорости звука  $a$  в смеси

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0 \delta_0} \frac{(s + \delta_0)^2}{1 + \delta_0} = \frac{p}{\alpha \rho} \quad (1.6)$$

Полагая течение безвихревым и пренебрегая массовыми силами, уравнение Бернулли можно записать в виде

$$V^2 = \frac{2p_0}{\rho_0 (1 + \delta_0)} (1 - s - \delta_0 \ln s) \quad (1.7)$$

где  $V$  — скорость потока. Из (1.6) и (1.7) следует

$$\lambda^2 = \frac{V^2}{a_*^2} = \frac{2}{\delta_0} \frac{(1 - s - \delta_0 \ln s)}{(1 + s/\delta_0)^2}, \quad M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{2}{\delta_0} \frac{(1 - s - \delta_0 \ln s)}{(1 + s/\delta_0)^2} \quad (1.8)$$

Здесь  $\lambda$  — приведенная скорость,  $M$  — число Маха,  $a_*$  — критическая скорость,  $s_*$  — критическое значение  $s$ , для которого  $a = a_*$ ,  $\lambda = M = 1$ . При заданном значении  $\delta_0$  величина  $s_*$  однозначно определяется из решения уравнения

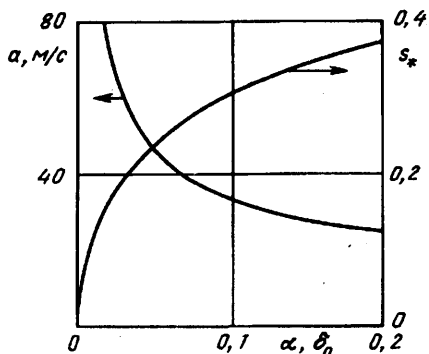
$$1 - s_* - \delta_0 \ln s_* = 1/2 \delta_0 (1 + s_*/\delta_0)^2 \quad (1.9)$$

Таким образом, безразмерные локальные характеристики течения выражаются через  $\delta_0$  и  $s$  с помощью соотношений (1.4), (1.5), (1.8), (1.9). Заметим, что принятая модель газожидкостной смеси использовалась ранее для исследования одномерного течения в сопле Лавала [3, § 9.10].

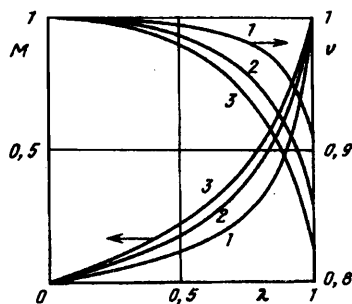
Пренебрегая первым членом в правой части (1.1), из (1.6) получим, что  $a^2 = p [\alpha (1 - \alpha) \rho_F]^{-1}$ . Зависимость скорости звука  $a$  от объемной концентрации газа  $\alpha$  в однородном потоке водовоздушной смеси при  $p = 1 \text{ атм} = 101,325 \text{ кПа}$  показана на фиг. 1 (при изменении  $\alpha$  от 0,02 до 0,2 значение  $a$  падает от 71,9 до 25,2 м/с, в то время как для чистой воды в обычных условиях  $a \approx 1460 \text{ м/с}$ ). На фиг. 1 показана также зависимость  $s_*$  от  $\delta_0$ . Зависимости  $M(\lambda)$  и  $v(\lambda)$  для  $\delta_0 = 0,02; 0,06$  и  $0,1$  представлены на фиг. 2 кривыми 1—3 соответственно.

2. Будем рассматривать стационарное дозвуковое обтекание диска по схеме Рябушинского осесимметричным потоком газожидкостной смеси, параметры которого подчинены соотношениям (1.4)—(1.9).

Пусть  $p_a, \rho_a, V_a, \lambda_a$  — значения  $p, \rho, V, \lambda$  в невозмущенном потоке,  $p_c, \lambda_c, M_c$  — значения  $p, \lambda, M$  на свободной поверхности,  $s_a = p_a/p_0, s_c = p_c/p_0, \tau = \lambda/\lambda_a, \tau_0 = \lambda_c/\lambda_a, X$  — сопротивление диска. Пусть  $x, r$  — цилиндрические координаты (ось  $x$  и плоскость  $x = 0$  являются осью и плоскостью симметрии потока),  $\theta$  — угол наклона скорости к оси  $x$  ( $\theta = \theta_0 = \pi/2$  на обтекаемом диске),  $L$  — длина каверны,  $R$  — радиус миделя каверны,  $K$  — кривизна дуги свободной поверхности в меридиональной плоскости ( $x, r$ ) в точке пересечения ее с плоскостью симметрии  $x = 0, R_0$  — радиус диска, принимаемый за масштаб длины ( $R_0 = 1$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

С учетом (1.4), (1.5), (1.8) коэффициент сопротивления диска  $C_x$  и число кавитации  $Q$  определяются по формулам

$$Q = \frac{2(p_a - p_c)}{\rho_a V_a^2} = \frac{(s + \delta_0)(s_a - s_c)}{s_a(1 - s_a - \delta_0 \ln s_a)}$$

$$C_x = \frac{2X}{\pi \rho_a V_a^2 R_0^2} = \frac{2(s_a + \delta_0)}{s_a^2(\tau_0, \theta_0)} \int_0^{\tau_0} \frac{r^2(\tau, \theta_0) \tau d\tau}{1 + \delta_0/s}$$

Согласно [1], при обтекании диска кавитационным осесимметричным потоком несжимаемой жидкости (этому случаю соответствует значение  $\delta_0 = 0$ ) основные характеристики течения (отмечаемые в этом случае верхним индексом  $^\circ$ ) на интервале  $0,15 \leq Q \leq 1$  могут быть вычислены по аппроксимационным формулам

$$C_x^\circ = 0,72084 + 0,11178(1 + Q)^{-1} + 0,92960Q$$

$$L^\circ = 0,20970 - 0,60585Q^{-1} \ln Q + 1,78362Q^{-1} \quad (2.1)$$

$$R^\circ = 0,96034 + 0,08936Q^{-1} \ln Q + 0,42422Q^{-1}$$

$$K^\circ = 0,03415Q + 0,64976Q^2 - 0,21896Q^3$$

С помощью численно-аналитического метода [1], пригодного для произвольно заданных зависимостей  $M(\lambda)$ ,  $v(\lambda)$ , выполнены расчеты кавитационного обтекания диска газожидкостной смесью на сетке  $50 \times 50$  при  $\delta_0 = 0,06$ ,  $Q = 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35$  и  $M_c^2 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ , а также при  $Q = 0,25$ ,  $\delta_0 = 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1$  и  $M_c^2 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ . На основе выполненных расчетов методом наименьших квадратов построены аппроксимационные формулы для параметров  $L, R, C_x, K$  при  $\delta_0 = 0,06$  ( $0,15 \leq Q \leq 0,35$ ) и  $Q = 0,25$  ( $0,02 \leq \delta_0 \leq 0,1$ ):

$$C_x = \alpha_1 C_x^\circ, \quad L = \beta_1 L^\circ, \quad R = \delta_1 R^\circ, \quad K = \gamma_1 K^\circ$$

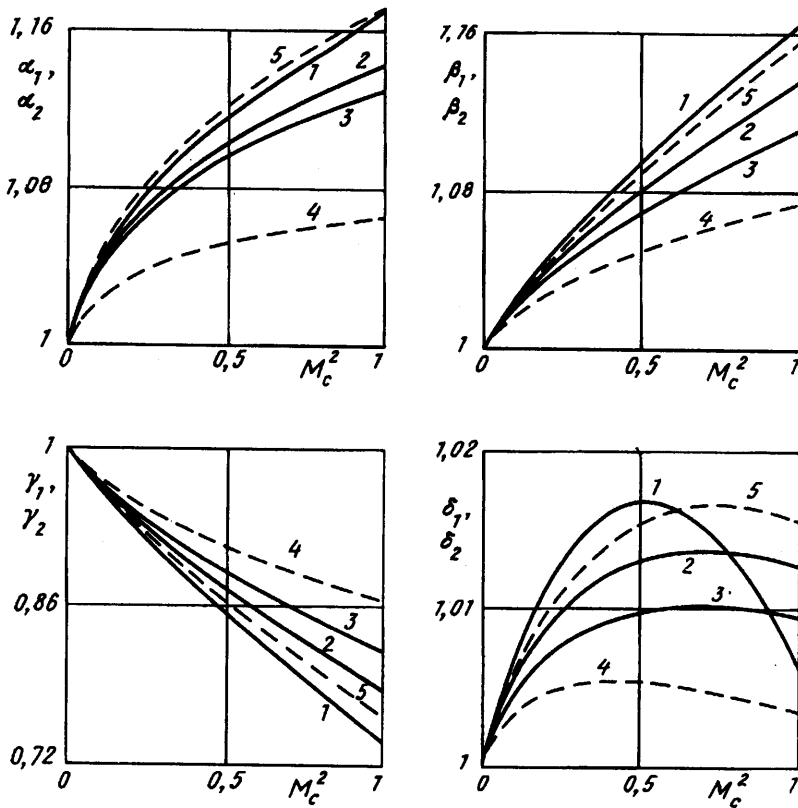
$$\mu_1 = \mu_1(M_c, Q) = 1 + a M_c^2 + b M_c^{5/2} + c M_c^3, \quad \mu_1 = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \quad (2.2)$$

$$d = d_1 + d_2 Q^{-1} \ln Q + d_3 Q^{-1}, \quad d = a, b, c, \quad d_j = a_j, b_j, c_j \quad (\delta_0 = 0,06)$$

$$C_x = \alpha_2 C_x^\circ, \quad L = \beta_2 L^\circ, \quad R = \delta_2 R^\circ, \quad K = \gamma_2 K^\circ$$

$$\mu_2 = \mu_2(M_c, \delta_0) = 1 + f M_c^2 + g M_c^{5/2} + h M_c^3, \quad \mu_2 = \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \quad (2.3)$$

$$d = d_1 + d_2 \delta_0^{1/2} + d_3 \delta_0, \quad d = f, g, h, \quad d_j = f_j, g_j, h_j \quad (Q = 0,25)$$



Фиг. 3

Здесь  $C_x^\circ$ ,  $L^\circ$ ,  $R^\circ$ ,  $K^\circ$  — функции  $Q$ , определенные формулами (2.1). Значения коэффициентов  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $f_j$ ,  $g_j$ ,  $h_j$  для аппроксимационных формул (2.2) и (2.3) и значения  $\varepsilon$  максимальных относительных погрешностей аппроксимации приводятся в табл. 1 и 2.

На фиг. 3 показана зависимость параметров  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\delta_1$  ( $\delta_0 = 0,06$ ) от  $M_c^2$  при  $Q = 0,15; 0,25; 0,35$  (сплошные кривые 1—3 соответственно). Там же показана зависимость параметров  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $\delta_2$  ( $Q = 0,25$ ) от  $M_c^2$  при  $\delta_0 = 0,02; 0,08$  (штриховые кривые 4—5 соответственно).

Из приведенных данных видно, что величины  $L$ ,  $C_x$  и  $K^{-1}$  растут с увеличением числа Маха на свободной поверхности, причем зависимость  $L$ ,  $C_x$  и  $K$  от  $M_c$  проявляется тем сильнее, чем меньше число кавитации и чем больше концентрация газа в смеси. Относительно параметра  $R$  аналогичное утверждение справедливо только вблизи точки  $M_c = 0$ .

Дополнительные расчеты, выполненные для значений  $\delta_0 \neq 0,06$  и  $Q \neq 0,25$  при различных значениях  $M_c$  из интервала  $[0,1]$ , показали, что для определения параметров  $L$ ,  $R$ ,  $C_x$ ,  $K$  в области  $Q \in [0,15; 0,35]$ ,  $\delta_0 \in [0,02; 0,1]$ ,  $M_c \in [0,1]$  можно использовать приближенные формулы

$$P = 1/2 P^\circ \mu_1 \mu_2 [\mu_1^{-1}(M_c; 0,25) + \mu_2^{-1}(M_c; 0,06)] \quad (2.4)$$

$$P = P(M_c, Q, \delta_0) = C_x, L, R, K, \quad P^\circ = P^\circ(Q) = C_x^\circ, L^\circ, R^\circ, K^\circ$$

Таблица 1

$\mu_1$	$d_j$	$j = 1$	2	3	$\varepsilon \cdot 10^4$
$\alpha_1$	$a_j$	1,01423	0,00914	0,05770	8
	$b_j$	-1,78098	0,03765	0,03993	
	$c_j$	0,85947	-0,04522	-0,08300	
$\beta_1$	$a_j$	0,42796	0,01567	0,01668	7
	$b_j$	-0,66985	-0,00708	0,05710	
	$c_j$	0,20659	0,01658	0,00384	
$\delta_1$	$a_j$	-0,07260	0,05745	0,13143	9
	$b_j$	0,22511	-0,13994	-0,29182	
	$c_j$	-0,19286	0,09485	0,19082	
$\gamma_1$	$a_j$	-0,56062	-0,01239	-0,01521	5
	$b_j$	0,86381	-0,02702	-0,13573	
	$c_j$	-0,30832	0,01192	0,06053	

Таблица 2

$\mu_2$	$d_j$	$j = 1$	2	3	$\varepsilon \cdot 10^4$
$\alpha_2$	$f_j$	-0,13280	7,8521	-10,598	6
	$g_j$	0,11037	-12,466	20,042	
	$h_j$	-0,00206	5,1939	-9,0336	
$\beta_2$	$f_j$	0,43743	-0,18171	0,03739	6
	$g_j$	-0,92265	3,1877	-3,9389	
	$h_j$	0,45694	-2,2105	3,3842	
$\delta_2$	$f_j$	0,03050	0,95136	-2,2682	4
	$g_j$	-0,11878	-1,1857	4,2964	
	$h_j$	0,07700	0,34946	-2,0989	
$\gamma_2$	$f_j$	-0,53665	-0,33959	1,0054	5
	$g_j$	0,96173	-2,5548	2,5008	
	$h_j$	-0,41147	1,6715	-2,3198	

$$\mu_1 = \mu_1(M_c, Q) = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \quad \mu_2 = \mu_2(M_c, \delta_0) = \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$$

Здесь  $P^\circ$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — функции, определенные формулами (2.1), (2.2), (2.3) и табл. 1, 2, причем параметру  $S_x$  отвечают функции  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , параметру  $L$  — функции  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , параметру  $K$  — функции  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , параметру  $R$  — функции  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ . Погрешность аппроксимации, получаемая при использовании формул (2.4), в указанной выше области изменения параметров  $Q$ ,  $\delta_0$ ,  $M_c$  не превышает 1% для  $S_x$ ,  $L$ ,  $R$  и 2% для  $K$ .

Авторы благодарны Г. Ю. Степанову за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01763).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зигангареева Л. М., Киселев О. М. О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости//ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93—107.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
3. Уоллис Г. Б. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972. 440 с.

Казань

Поступила в редакцию  
13.I.1995