

УДК 533.6.011.5

© 1996 г. С. В. ГУВЕРНЮК, К. Г. САВИНОВ

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С НЕРАВНОМЕРНЫМИ СВЕРХЗВУКОВЫМИ ПОТОКАМИ

Исследуются свойства установившихся течений газа в ударном слое при осесимметричном обтекании затупленных тел сверхзвуковым потоком, содержащим произвольную неоднородность сдвигового типа.

Неравномерные сдвиговые течения могут быть хорошим приближением при моделировании различных газодинамических явлений, таких, например, как струи, изобарическая часть аэродинамического следа за твердыми телами [1] или за областями внешнего энергоподвода [2] и т. п. Хотя влияние эффектов вязкости и теплопроводности приводит к эволюции неравномерных течений в сторону выравнивания неоднородностей вниз по потоку, в ряде задач о сверхзвуковом обтекании затупленных тел вполне допустимо пренебрегать продольным изменением структуры неравномерности и считать набегающий поток зависящим только от поперечной координаты [3].

В зависимости от характеристик неоднородности возможны существенные изменения структуры течения в ударном слое перед телом [4]. В случае неравномерного течения типа сверхзвукового следа с минимумом скорости и максимумом энтальпии на оси симметрии усиление неоднородности приводит к образованию в ударном слое вторичных течений [5]. Явление образования зон возвратного течения перед телами, расположенными в следе за стационарным тепловым пятном, отмечено в [2]. В случае неоднородности струйного типа с максимумом скорости на оси симметрии увеличение поперечных градиентов может привести к возбуждению незатухающих колебаний в ударном слое [6]. Практический интерес представляет определение условий, при которых в ударном слое еще нет ни вторичных течений, ни автоколебаний. Некоторые оценки критических значений параметров неоднородности для гиперзвуковых течений даны в [1, 7].

Структура ударного слоя с внутренними вторичными течениями весьма чувствительна к величине числа Рейнольдса и к теплопередаче на теле, поэтому при моделировании необходимо учитывать эффекты вязкости и теплопроводности [8]. В отличие от этого возможность моделировать обтекание затупленных тел без вторичных течений на основе уравнений Эйлера при больших числах Рейнольдса сомнений не вызывает. Выполненный в [1, 5, 7] анализ влияния эффектов вязкости на критические значения параметров неравномерности показывает, что если при некотором числе Рейнольдса Re_0 вторичных течений нет, то это свойство справедливо и для всех $Re < Re_0$. Отсюда следует, что найденные в рамках модели невязкой среды условия существования течений без рециркуляции будут достаточными условиями отсутствия вторичных течений и в вязкой среде.

Ниже рассмотрено невязкое установившееся обтекание тел совершенным газом со сдвиговой неоднородностью общего вида, выявлены классы геометрически подобных течений, для которых показана возможность сведения кинематической неоднородности к термодинамической — и наоборот. На примере численного параметрического исследования задачи об обтекании сферы определены границы существования ударного слоя без вторичных течений и автоколебаний.

1. Распределение газодинамических характеристик в невозмущенном сверхзвуковом потоке задается в виде

$$u = f(y)u_0, v = 0, h = g(y)h_0, p = p_0 \quad (1.1)$$

где y — расстояние до оси симметрии, u, v — продольная и поперечная компоненты скорости, h — удельная энтальпия, p — статическое давление, u_0, h_0, p_0 — постоянные параметры потока на оси симметрии, $f(0) = g(0) = 1$. При $f(y) \equiv g(y) \equiv 1$ поток является равномерным. Предполагается, что конфигурация затупленного тела удовлетворяет условиям, при которых существует решение задачи об установившемся обтекании равномерным сверхзвуковым потоком идеального совершенного газа головной части тела без образования зон с замкнутыми линиями тока. Очевидные примеры здесь — сфера, затупленные конуса и т. п. Можно ожидать, что при некоторых ограничениях на f и g подобные решения существуют и для неравномерных потоков. Определение таких ограничений является содержанием исследования.

Ищем стационарное решение уравнений Эйлера с осевой симметрией в сферической системе координат θ, r

$$\frac{\partial X}{\partial t} + E_1 \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r} E_2 \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{1}{r} F = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ p \\ \rho \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} v_r & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & v_r & 0 & 0 \\ \gamma p & 0 & v_r & 0 \\ \rho & 0 & 0 & v_r \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} v_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_\theta & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma p & v_\theta & 0 \\ 0 & \rho & 0 & v_\theta \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -v_\theta^2 \\ v_r v_\theta \\ \gamma p (2v_r + v_\theta \operatorname{ctg} \theta) \\ \rho (2v_r + v_\theta \operatorname{ctg} \theta) \end{pmatrix}$$

в области $ABCD$ (фиг. 1) со следующими граничными условиями: на теле AD , $r = r_b(\theta)$ — условие непротекания, на головной ударной волне BC , $r = r_i(\theta)$ — соотношения Рэнкина — Гюгионо, на оси AB , $\theta = 0$ — условия симметрии, на периферийном отрезке CD , $\theta = \theta_{\max}$, лежащем в сверхзвуковой части течения, — условия свободного вытекания. Задаваемые функции $f(y), g(y), r_b(\theta)$ должны удовлетворять ограничениям, при которых стационарное решение задачи существует и не содержит областей с замкнутыми линиями тока.

Здесь t — время, $y = r \sin \theta$, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты, v_r, v_θ — компоненты скорости вдоль направлений r, θ .

Наиболее распространено в литературе [1, 5—8 и др.] трехпараметрическое представление профилей неоднородности в виде [3], т. е. с учетом (1.1) — в виде

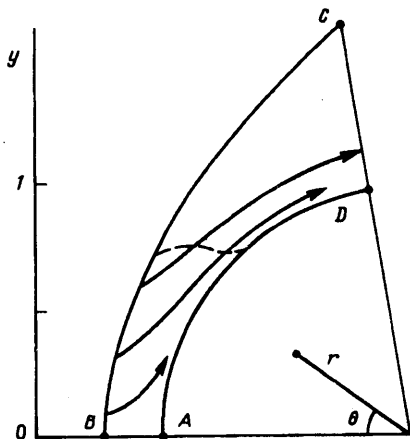
$$f(y) = \frac{1 - ae^{-by^2}}{1 - a}, \quad g(y) = 1 + c - c^2(y) \quad (1.2)$$

$$H(y) = H(0) + \frac{u^2 - u^2(0)}{2} \left(1 - \frac{c}{c_0}\right), \quad c_0 = \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2$$

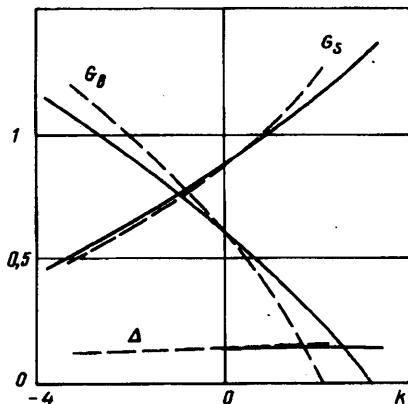
Здесь и ниже H — полная энтальпия, M_0 — число Маха на оси симметрии, a, b, c — параметры неоднородности, M_∞ — число Маха при $y \rightarrow \infty$.

Другой пример встречающихся на практике профилей сдвиговой неоднородности — соотношения

$$M(y) = M_\infty + (M_0 - M_\infty) e^{-by^2}, \quad H = \text{const} \quad (1.3)$$



Фиг. 1. Обтекание тупого тела неравномерным потоком



Фиг. 2. Зависимости (3.2)

которые хорошо аппроксимируют экспериментально полученные профили неоднородности в сверхзвуковой части ближнего следа за осесимметричными телами в аэродинамических трубах¹.

2. Численные решения поставленной краевой задачи в области ABCD (фиг. 1) строились методом установления по физическому времени [9].

Использовались равномерные прямоугольные сетки в плоскости модифицированных переменных η, ξ

$$\eta = \frac{\theta}{\theta_{\max}}, \quad \xi = \frac{r - r_b}{r_s - r_b}$$

Координатная линия $\xi = 0$ совпадает с контуром тела, $\xi = 1$ — с фронтом ударной волны. В качестве характерных размерных величин брались: w_0, ρ_0 — скорость и плотность невозмущенного потока на оси симметрии, R_0 — радиус кривизны в лобовой точке тела, $\rho_0 u_0^2$ — масштаб давления. Численный метод установления [9] систематически применялся на практике при составлении базовых таблиц сверхзвукового обтекания канонических тел. Разностная схема, неявная по времени, имеет 2-й порядок аппроксимации по пространственным координатам, содержит механизм подключения искусственной вязкости. Рассматривалось обтекание сферы, эллипсоида, сферического сегмента и цилиндрического торца. Основная масса расчетов выполнена на сетках 31×21 . Контрольные расчеты сделаны на сетках с удвоенным и учетверенным числом узлов.

Стратегия расчетов включала построение решения при $f, g = \text{const}$ и затем, по мере увеличения степени неоднородности, анализ эволюции структуры решения задачи о неравномерном обтекании вплоть до нарушения условий установления стационарного течения либо до нарушения условия отсутствия зон рециркуляции. На этом пути были обнаружены некоторые общие закономерности, выявлены классы геометрически эквивалентных течений. В частности, любые отклонения функций $f(y)$ и $g(y)$ от 1, если только они удовлетворяют условию

$$m(y) \equiv 1, \quad m = f^2/g \tag{2.1}$$

не вызывают изменения геометрии течения, а именно: фронт головного скачка уплотнения и конфигурации линий тока установившегося течения остаются такими же, как при равномерном обтекании. Очевидна связь между $m(y)$ и распределением числа Маха в набегающем потоке

$$M^2 = \frac{u^2}{(\gamma - 1)h} = \frac{(fM_0)^2}{g} = m(y) M_0^2$$

¹ Отчет Института механики МГУ. 1992. № 4175.

Следовательно, соотношения (1.1), (2.1) задают класс неравномерных течений геометрически эквивалентных равномерному потоку при обтекании тел любых конфигураций, допускающих стационарные решения при $M \equiv M_0$.

В дальнейшем было найдено доказательство более общего свойства, заключающегося в том, что для всякой наперед заданной неоднородности (1.1), обеспечивающей существование стационарного обтекания тела, существует бесконечный набор геометрически эквивалентных неравномерных потоков вида (1.1) с теми же u_0, h_0 , но с другими $f(y), g(y)$. Единственным условием, выделяющим класс отмеченного подобия, является сохранение $m(y)$.

Интересное следствие — возможность сведения неоднородности общего вида (1.1) к неоднородности специального типа, например к сугубо тепловой неоднородности с $f(y) \equiv 1$ или к чисто кинематической неоднородности с $g(y) \equiv 1$. В частности, неоднородность вида (1.2), изотермическая при $c = 0$, геометрически эквивалентна изоэнергетической неоднородности вида (1.3).

Таким образом, $m(y)$ выступает мерой неоднородности сдвигового потока. Для гладких профилей с $f'(0) = g'(0) = 0$ распределение $m(y)$ в окрестности оси $y = 0$ определяется одним параметром k , входящим в разложение

$$m = 1 + k \left(\frac{y}{R_0} \right)^2 + o(y^2), \quad k = \left(f''(0) - \frac{1}{2} g''(0) \right) R_0^2$$

Можно ожидать, что в тех случаях, когда приосевая неоднородность играет основную роль в механизмах формирования структуры течения в ударном слое перед телом, будет иметь место приближенное подобие течений по числовым параметрам M_0 и k .

Физический смысл k состоит в том, что это — относительная кривизна профиля скоростного напора $1/2\rho u^2$ невозмущенного потока около оси симметрии. В случае трехпараметрического профиля (1.2)

$$k = \frac{2a(1+c)}{1-a} bR_0^2$$

Такой параметр возникал в асимптотической теории [1].

3. Результаты расчетов приведем для сверхзвукового обтекания лобовой части сферы радиуса R_0 неравномерным потоком идеального совершенного газа при $3 \leq M_0 \leq 6, \gamma = 1,4$ и двухпараметрическом представлении профиля неоднородности в форме (1.3)

$$M(y) = M_0 \frac{1 - ae^{-by^2}}{1 - a}, \quad a = 1 - \frac{M_0}{M_\infty} \quad (3.1)$$

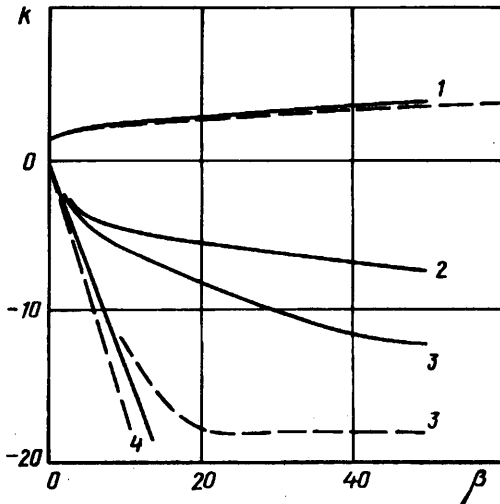
Соответствующий класс геометрически подобных стационарных решений выделяется в (1.1) соотношением $m(y)g(y) = f^2(y)$, где

$$m = \left(1 + \frac{k}{2\beta} (1 - e^{-\beta z^2}) \right)^2 = 1 + kz^2 + O(z^4)$$

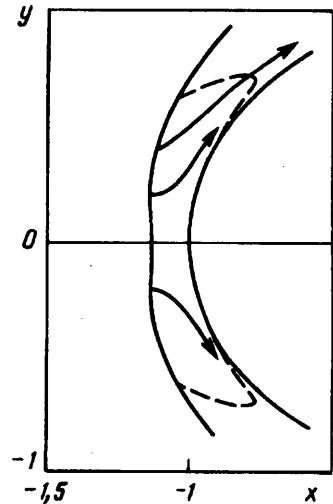
$$z = \frac{y}{R_0}, \quad \beta = bR_0^2, \quad k = \frac{2a\beta}{1-a}$$

Условие $M > 1$ при $0 < y < \infty$ влечет ограничения $M_0 > 1, 1 - M_0 < a < 1$. Следовательно, допустимые значения параметров задачи образуют в плоскости (β, k) сектор, ограниченный лучами $\{\beta = 0, k > 0\}$ и $\{k = -2\beta(1 - M_0^{-1}), \beta > 0\}$. Если неоднородность фиксирована параметрами a, b , то изменению радиуса сферы R_0 от 0 до ∞ соответствует движение вдоль луча $\{k = 2\beta a(1 - a)^{-1}, \beta > 0\}$.

Далее используются безразмерные представления переменных в соответствии с масштабами, определенными в разделе 2, в частности принято $y = z$.



Фиг. 3. Граничные кривые 1 — $k = k_1(\beta)$, 2 — $k = -k_2(\beta)$, 3 — $k = -k_3(\beta)$, 4 — $k = -2\beta(1 - M_0^{-1})$, сплошные линии — $M_0 = 3$, штрихи — $M_0 = 6$



Фиг. 4. Обтекание сферы неравномерным потоком с максимумом числа Маха на оси симметрии, $M_0 = 6$, $\beta = 40$, $k = -18$

При $k > 0$ и постоянных M_0, β наблюдается монотонное изменение величин

$$\Delta(k) = r_s(0) - r_b(0), G_b(k) = \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}^{r=r_b}, G_s(k) = \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}^{r=r_s} \quad (3.2)$$

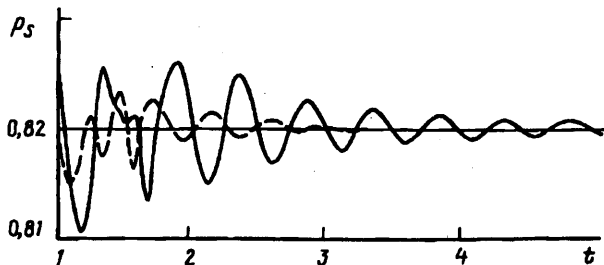
где Δ — отход ударной волны на оси симметрии, G_b — градиент растекания в точке торможения на теле, G_s — градиент поперечной скорости на волне и, в силу (1.1), величина, пропорциональная кривизне фронта волны на оси. На фиг. 2 построены зависимости (3.2) при $M_0 = 6$, $\beta = 40$ — сплошные линии, $\beta = 10$ — штриховые. С увеличением k происходит быстрое уменьшение градиента растекания G_b и при достижении некоторого $k = k_1(\beta, M_0)$ G_b обращается в ноль. В интервале $0 < k < k_1$ структура ударного слоя топологически эквивалентна обтеканию сферы в равномерном потоке ($k = 0$), вторичных течений нет, максимум кривизны фронта ударной волны достигается на оси симметрии. Граничные кривые $k = k_1(\beta)$ построены на фиг. 3.

Удобным критерием степени близости рассматриваемых течений к режиму с рециркуляционными зонами может служить отношение

$$K = \frac{G_b(k)}{G_b(0)}, K(k_1) = 0$$

Следует отметить, что при $K \rightarrow 0$ резкое увеличение отхода ударной волны не происходит; в частности, изображенная на фиг. 1 картина течения рассчитана при $M_0 = 3$, $k = 2,55$, $\beta = 20$, т. е. для параметров предотрывного обтекания. Анализ результатов расчета показывает, что при $K \sim 1$ влияние β несущественно и доминирующую роль играет «приосевой» параметр k , однако при $K \rightarrow 0$ влияние β резко возрастает. Последнее обстоятельство указывает на трудность правильного определения критических параметров неравномерности, основываясь на приосевом приближении типа [1], когда все характеристики течения представляются усеченными степенными рядами по y и в результате от характеристик неравномерности набегающего потока в уравнениях главного приближения остается лишь один параметр k .

При $k < 0$ стационарные решения удавалось получать, снижая k от 0 до значений, при которых величина G_s обращалась в 0 ($k = k_2$) и даже становилась отрицательной ($k < k_2$). В промежутке $k_2 < k < 0$, фиг. 3, параметры G_b, Δ, G_s



Фиг. 5. Затухание возмущений в ударном слое при импульсном энергоподводе, штрихи — $k = 0$, сплошные линии — $k = -6,5$

изменяются монотонно, фронт ударной волны имеет выпуклость навстречу набегающему потоку, однако максимум кривизны фронта может достигаться не на оси симметрии. При $k \rightarrow k_2 + 0$ кривизна ударного фронта на оси обращается в 0. Существует конечный промежуток $k_3 < k < k_2$, в котором $G_3 < 0$, но обтекание тела еще остается установившимся. При этом фронт ударной волны в окрестности оси симметрии имеет вогнутость, а приосевая струйка тока — горловину в промежуточном сечении между волной и телом (фиг. 4).

С целью определения некоторого физического параметра, характеризующего при $k < 0$ степень близости установившегося течения к автоколебательному режиму, анализировалась эволюция вынужденных начальных возмущений в ударном слое. Возмущения вносились в стационарное поле течения $X = X_*(\eta, \xi)$ путем импульсного энергоподвода в малой окрестности точки торможения на теле. Массовая мощность источника внешнего энергоподвода задавалась в виде

$$q = q_0 \chi(\varepsilon - \eta - \xi) \delta(t), \quad \chi(x) = 0, x < 0, \quad \chi(x) = 1, x \geq 0 \quad (3.3)$$

Здесь $\xi, \eta, \varepsilon > 0$, δ — импульсная функция Дирака, ε — начальный размер возмущенной области. Время t нормировано на $u_0^{-1} R_0$, мощность энергоподвода — на $u_0^3 R_0^{-1}$.

Нетрудно показать, что действие импульсного источника (3.3) сводится к мгновенному искажению давления в исходном поле течения X_* при $t=0$, а именно

$$p|_{t=0} = p_* + (\gamma - 1) \rho_* q_0 \chi(\varepsilon - \eta - \xi)$$

Если $\varepsilon > 0, q_0 \neq 0$, то при $t > 0$ в ударном слое будут распространяться нестационарные волны давления, вызванные распадом начального разрыва на границах области $\eta + \xi < \varepsilon$ импульсного энерговыделения (3.3). Характерный временной масштаб данного процесса можно оценить как период τ прохождения звукового сигнала от тела до головного скачка уплотнения и обратно

$$\tau = \frac{2\Delta}{d}, \quad d = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2} + M_0^{-2}}$$

Взаимодействуя с границами ударного слоя, волны давления постепенно приобретают характер затухающих гармонических колебаний вида $p = p_* + A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$ около стационарного решения $p_*(\eta, \xi)$. На фиг. 5 показаны расчетные зависимости давления $p_s(t) = p(t, 0, 1)$ в центральной точке на ударной волне при $M_0 = 3, \varepsilon = 0,2, q_0 = 0,3, \beta = 50$. С уменьшением k декремент затухания колебаний $\nu = 2\lambda\alpha/\omega$ уменьшается. Кривые $k = k_3(\beta)$ на фиг. 3 ограничивают область, в которой были получены стационарные решения с положительным декрементом затухания возмущений (данные границы оказались весьма чувствительными к величине искусственной вязкости). Таким образом, величину ν

можно принять в качестве искомого критерия степени близости рассматриваемых установившихся течений при $k < 0$ к автоколебательному режиму, при этом следует иметь в виду, что данный критерий получен из рассмотрения нестационарных течений, поэтому его величину нельзя автоматически распространять на весь класс геометрически подобных установившихся течений.

В итоге определена область существования установившегося обтекания сферы неравномерным сверхзвуковым потоком без вторичных течений. Анализ границ этой области в плоскости параметров β, k (фиг. 3) показывает, что в случае неоднородности с вогнутым профилем числа Маха (минимум $M = M_0$ — на оси симметрии), граница состоит из трех звеньев: луча $\{k = 0, 0 < \beta < \infty\}$, соответствующего равномерному потоку (и классу геометрически подобных неоднородных течений), кривой $\{k = k_1(\beta), 0 < \beta < \infty\}$, на которой $G_b = 0$, и отрезка $\{\beta = 0, 0 < k < k_1(+0)\}$, соответствующего $a \rightarrow 1$, т. е. $M \rightarrow \infty$ при $u > 0$. Насколько можно судить по результатам расчетов, функция $k_1(\beta)$ изменяется монотонно и имеет конечные пределы

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} k_1 = B_\infty, \lim_{\beta \rightarrow +\infty} k_1 = B_0, B_\infty > B_0$$

следовательно, $k < B_\infty$ — необходимое, а $k < B_0$ — достаточное условие отсутствия вторичных течений. Можно также утверждать, что для любой фиксированной неоднородности (3.1) существует критический размер сферы $R_0 = R_*$ такой, что при $R_0 \leq R_*$ вторичных течений нет (как отмечалось выше, изменению R_0 при $a, b = \text{const}$ соответствует движение вдоль луча $k/\beta = \text{const}$). В случае выпуклого профиля числа Маха с максимумом M_0 на оси симметрии граница существования установившегося обтекания также состоит из трех звеньев: луча $\{k = 0, 0 < \beta < \infty\}$, отрезка $\{k = -2\beta(1 - M_0^{-1}), 0 < \beta < \beta_{\min}\}$, и кривой $\{k = k_3(\beta), \beta_{\min} < \beta < \infty\}$. Неравенство $k > k_3(\beta_{\min})$ — достаточное условие отсутствия автоколебаний.

Работа выполнена в рамках НТП «Университеты России».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремейцев И. Г., Пилюгин Н. Н., Хлебников В. С., Юницкий С. А. Исследование аэродинамических характеристик и теплообмена тел в неравномерных сверхзвуковых потоках газа. М.: Изд-во МГУ, 1988. 105 с.
2. Георгиевский П. Ю., Левин В. А. Сверхзвуковое обтекание тел при наличии внешних источников тепловыделения // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 8. С. 684—687.
3. Lin T. C., Reeves B. L., Siegelman D. Blunt-body problem in nonuniform flowfields // AIAA Journal. 1977. V. 15. № 8. P. 1130—1137.
4. Каменецкий В. Ф., Турчак Л. И. Сверхзвуковое обтекание тел неоднородным потоком идеального газа. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 21 с.
5. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Циркуляционное течение у лобовой поверхности сферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком типа следа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 143—148.
6. Гувернюк С. В., Савинов К. Г. Об автоколебательном режиме взаимодействия сверхзвукового неравномерного потока с преградой // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 12. С. 73—77.
7. Пилюгин Н. Н., Галипов Р. Ф., Утюжников С. В. О точности асимптотических решений при неравномерном сверхзвуковом обтекании затупленного тела // ПМТФ. 1994. № 1. С. 61—66.
8. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В., Цымбалов В. В. О численном моделировании некоторых отрывных течений на основе уравнений Навье — Стокса и Эйлера // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1267—1269.
9. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. Т. 1. М.: Наука, 1970. 287 с.